222 — Verifique a seguinte igualdade:

$$(\cos x + \operatorname{sen} x)\cos(\pi/4 + x) = \sqrt{2}/2 \,.\, \cos 2x \,.$$

R: *Dividindo ambos os termos por* $\cos x + \operatorname{sen} x$ *vem*: $\cos(\pi/4 + x) = \sqrt{2}/2 \,.\, (\cos x - \operatorname{sen} x)$, *igualdade evidente atendendo a que* $\cos \pi/4 = \operatorname{sen} \pi/4 = \sqrt{2}/2$.

223 — Determine, sem recorrer às tábuas, os valores de $\operatorname{cotg}(-390°)$ e de $\sec 9\pi/4$. R: $\operatorname{cotg}(-390°) = -\operatorname{cotg} 330° = -\operatorname{cotg} 30° = -\sqrt{3}$; $\sec 9\pi/4 = \sec \pi/4 = \sqrt{2}$.

224 — Considere um triângulo ABC, rectângulo em A e designe por a, b e c os comprimentos dos lados opostos aos ângulos A, B e C. Exprima os comprimentos m, m' e m'' das medianas do triângulo em função dos lados. R: $m = a/2$, $m' = \sqrt{c^2 + b^2/4}$, $m'' = \sqrt{b^2 + c^2/4}$.

225 — Calcule, sem efectuar as operações, o resto da divisão por 4 do número $86 \times 381^4 + 74$. Enuncie as regras que usou.

Solução do n.^{os} 219, 222 e 223 de M. Zaluar e do n.º 224 de Maria Pilar Ribeiro.

I. S. C. E. F. — 25 de Julho de 1940

226 — *a*) Defina sistema de logarítmos e enuncie as propriedades fundamentais do cálculo logarítmico. Dada a decomposição em números primos dum número $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ exprima $\log n$ em função de $\log p_1$, $\log p_2, \ldots \log p_n$. *b*) Calcule por logaritmos $x = 0{,}01^3 \sqrt{1{,}002}/0{,}0002$. R: $x = 0{,}0024973$.

227 — Diga em que consiste o desenvolvimento do binómio de Newton; escreva o têrmo geral e enuncie a lei de passagem dum têrmo para o seguinte. Calcule

$$f(x) = \frac{(x+1)^n + (x-1)^n}{(x+1)^n - (x-1)^n}.$$

228 — São dadas no mesmo plano duas circunferências, uma de raio r, outra de raio $3r$; conhecendo o comprimento d da corda comum, calcular a distância dos centros. Discussão. R: *Deverá ser* $d \leq 2r$ *para que o problema seja possível. Com* $d < 2r$ *o problema tem as duas soluções* $(\sqrt{36r^2 - d^2} + \sqrt{4r^2 - d^2})/2$ *e* $(\sqrt{36r^2 - d^2} - \sqrt{4r^2 - d^2})/2$. *Com* $d = 2r$ *há a solução única* $\sqrt{36r^2 - d^2}/2$.

229 — Num rectângulo de lados L e l tiram-se as bissectrizes dos ângulos interiores. Verificar que os pontos de encontro dessas bissectrizes definem um quadrado e determinar a área dêsse quadrado. R: *A diagonal do quadrado é igual a* $L - l$ *e portanto a sua área será* $(L-l)^2/2$.

230 — Num triângulo rectângulo de ângulos agudos B e C exprimir $\operatorname{sen}(B-C)$, $\cos(B-C)$, $\operatorname{tg}(B-C)$ em função dos catetos b e c. R: $\operatorname{sen}(B-C) = (b^2 - c^2)/(b^2 + c^2)$, $\cos(B-C) = 2bc/(b^2 + c^2)$, $\operatorname{tg}(B-C) = (b^2 - c^2)/2bc$.

231 — Determinar os inteiros n tais que a soma $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ seja divisível por $1 + 2 + \cdots + n$.

Nota: — Sabe-se que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n(n+1) \cdot (2n+1)/6$. R: *O quociente de* $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$, *por* $1 + 2 + \cdots n$ *é* $(2n+1)/3$.

Deverá pois ser $2n + 1 = 3(2p+1)$ (p *inteiro*) *e portanto os inteiros* n *a determinar são os sucessores dos múltiplos de* 3.

Soluções dos n.^{os} 228 a 231 de Maria Pilar Ribeiro.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Álgebra Superior — 1.º exame de frequência — 1938-39.

I

232 — *a*) Defina divisão de números complexos e indique, justificando-a, a representação geométrica de tal operação. *b*) Defina limite de uma variável e enuncie as propriedades que dizem respeito à noção de limite. c) Defina funções homogéneas e enuncie o teorema de Euler que lhes respeita. *d*) Indique em que consiste o problema da transformação das equações algébricas e defina transformação homográfica. *e*) Defina equação recíproca, enuncie as condições a que devem satisfazer os coeficientes de uma tal equação e indique como se procede ao abaixamento do seu grau.

233 — Sabendo que as raizes da equação $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$, verificam as relações $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ e $\alpha_2 + \alpha_3 = -1$, determine os valores de α_1, α_2 e α_3. R: $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = -3$.

234 — Calcule a derivada de primeira ordem da função y definida pela equação

$$e^{\operatorname{sen} xy}-[\cos(x-y)]^{\operatorname{tg} x}+l\,\frac{xy}{1+x^2}=0\,.$$

235 — Determine os máximos e os mínimos da função $y=2\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^2 x$. R: $x=\pi/4+k\pi$ *conduzindo ao máximo* $y=1$.

II

236 — *a*) Defina números complexos conjugados e enuncie as propriedades que lhes respeitam. *b*) Defina função contínua num ponto no caso de uma só variável independente e enuncie os teoremas que respeitam a tais funções. *c*) Escreva as fórmulas de Taylor e de Maclaurin para as funções inteiras de uma só variável independente. *d*) Indique a condição necessária e suficiente para a divisibilidade de um polinómio inteiro em x por $x-\alpha$ e enuncie a regra de Ruffini. *e*) Indique em que consiste o problema da separação das raizes de uma equação algébrica e enuncie os teoremas de Rolle e de Descartes.

237—Calcule os valores de $z=\sqrt[4]{\dfrac{-1-2i}{2-i}+(1+2i)}$.
R: $|z|=\sqrt[8]{2}$, $\arg z=\pi(1/16+2k)$ $k=0,1,2,3$.

238 — Aplique a fórmula de Leibnitz à determinação da derivada de 4.ª ordem da função $y=a^{x+1}.\,lx$.

239 — Calcule $\lim\limits_{x=0} x\,(lx)^2$. R: $\lim\limits_{x=0} x\,(lx)^2=0$.

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — Exame de frequência

240 — Dado o sistema $\begin{cases}4x-2y-3z=1\\ x+3y+\ z=2\end{cases}$. *a*) Determinar x e y em função de z. *b*) Determinar os valores de z de modo que seja $\dfrac{y^3}{x^3}=1$. R: *a*) $x=\dfrac{z+1}{2}$, $y=\dfrac{-z+1}{2}$. *b*) $z_1=i\sqrt{3}$, $z_2=-i\sqrt{3}$, $z_3=0$.

241—Dadas duas funções $y(x)$ e $z(x)$ satisfazendo às relações $y^2+z^2=1$, $y'^2+z'^2=1$, $y''^2+z''^2=1$ mostrar que $yy'+zz'=0$, $yy''+zz''=-1$, $yy'''+zz'''=0$, $y^{IV}+z^{IV}=1$.

242 — Estudar e representar geomètricamente a função $y=\dfrac{x}{1-\dfrac{x^2}{4}}$.

243 — Calcular a soma $1+i+i^2+\cdots+i^n$ (discussão conforme os valores de n). R: *A soma é uma função do resto da divisão de* n *por* 4 *dada pela tabela de correspondência* $0\to1$, $1\to1+i$, $2\to i$, $3\to0$.

244 — Dada a equação $\dfrac{(x^2-1)^2}{x^2(x^2+1)}=k$, determinar k de modo que a equação se reduza à forma $x^n-A=0$ e resolvê-la, nessa hipótese. R: *Para* $k=-2$ *vem* $x^4+1/3=0$ *cujas raizes são* $x=\sqrt[4]{-1/3}$. *Para* $k=1$ *vem* $x^2=1/3$ *cujas raizes são* $x=\pm1/\sqrt{3}$. *Quando* $k\to1$ *o coeficiente de* x^4 *da equação dada tende para zero, tendendo para* $+\infty$ *os módulos de* 2 *das suas raizes.*

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência — 1938-39.

I

245 — Achar a derivada de: $y=\sqrt[x]{\dfrac{5x^3+10}{\log ch\,(\operatorname{tg} x)}}$.

246 — Estudar a função: $y=(9x^2-6x+1)/x^3$. Representação geométrica.

247 — Sendo $thx=0{,}75$, calcular x com 4 casas decimais.

248 — Provar que a série $\sum n^2\left(1-\cos\dfrac{x}{n}\right)$ é divergente para todos os valores de x diferentes de 0.

II

249 — Mostrar que todas as raizes da equação $\left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^3=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}$ são reais.

R: $\dfrac{i+ix}{i-ix}=\sqrt[3]{\cos\pi/3+i\operatorname{sen}\pi/3}=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$

(*com* $\theta=\pi/9+2k\pi/3$, $k=0,1,2$)

donde $x=\dfrac{1-\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta-(1+\cos\theta)\,i}=\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{18}+k\,\dfrac{\pi}{3}\right)$, *expressão que só toma* 3 *valores reais*, c. q. p.

250 — Calcular o triângulo isósceles de área máxima que pode ser cortado numa folha semi-circular, supondo que a base é paralela ao diâmetro do semi-círculo, e o vértice está no centro.

251 — Calcular dy/dx, sendo $10^x+y^x.\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}+y'^{\theta\,v}=0$.

252—Calcular o verdadeiro valor de $y=\dfrac{e^{-1/x}}{x}$ para $x=\pm0$.

Outros exercícios

253 — De uma folha metálica, com forma circular, é suprimido um sector de modo que a parte restante da folha pode formar um recipiente cónico. Calcular o ângulo que deve ter essa parte restante para que o recipiente tenha a capacidade máxima. R: *Represente-se por* r *o raio do círculo dado e por* x *o número de radianos do ângulo a calcular. Como o comprimento do arco de circunferência que permanece depois da supressão é* rx, *o raio da base do cone é* $rx/2\pi$. *E o problema é, agora, o da determinação do número que dá para a função* $V(x)=\frac{1}{3}\frac{\pi r^2x^2}{4\pi^2}\sqrt{r^2-\frac{r^2x^2}{4\pi^2}}$ *(volume do cone), um mínimo. Encontra-se que o ângulo pedido é* $\sqrt{8/3}\pi$ radianos.

254 — Determine λ de modo que $2+i$ verifique a equação $z^3-\lambda z^2+5-i=0$: R: $\lambda=61/25+2i/25$

255 — Resolver $\operatorname{sen} z=0$. R: *Há que resolver a equação* $(e^{iz}-e^{-iz})/2i=0$, *ou* $e^{2iz}=1$ *donde se tira* $z=k\pi$, *sendo* k *um número inteiro.*

256 — Sendo y uma função de x definida pela equação $x^{2/3}+y^{2/3}=1$, mostrar que é $y''=x^{-4/3}y^{-1/3}/3$.

257 — Dado um segmento rectilínio $\overline{AB}$ e uma recta $X'X$, perpendicular ao segmento e passando pelo ponto O do seu prolongamento, determinar o ponto P de $X'X$ do qual o segmento AB é visto sob o ângulo máximo. Determinação gráfica de P. ($\overline{OA}=a$; $\overline{OB}=b$; $a>b$). R: *Seja* $\overline{OP}=x$ *e* φ *a variável representativa da medida do ângulo sob o qual o segmento* $\overline{AB}$ *é visto dum ponto qualquer de* $X'X$. *Nota-se fàcilmente que* $\operatorname{tg}\varphi=(a/x-b/x):(1+ab/x^2)$. *E o problema, é agora, o da determinação do valor que dá um máximo para a função* $\varphi(x)=\operatorname{arctg}\frac{(a-b)x}{ab+x^2}$. *Encontra-se que o ponto* P *de* $X'X$ *deve ser tal que* $\overline{OP}$ *é a media geométrica de* a *e* b.

258 — Verificar a identidade $\operatorname{tg}x=\operatorname{cotg}x-2\operatorname{cotg}2x$ e utilisá-la no cálculo da soma da série convergente $\operatorname{tg}\pi/4+1/2\operatorname{tg}(1/2\times\pi/4)+\cdots+1/2^n\operatorname{tg}(1/2^n\times\pi/4)+\cdots$

259 — Resolver a equação $(z+i)^n-(z-i)^n=0$, mostrando que todas as raízes são reais.

260 — Demonstrar que se a série $\sum\alpha_n$ é convergente, também a série $\sum\frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}$ é convergente.

261 — Averigue se há polinómios inteiros em x que satisfaçam à equação $y''+(x-1)y'-4y=0$, ($y'=dy/dx$; $y''=d^2y/dx^2$). R: *Seja* $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+a_4x^{n-4}+\cdots+a_n$. *Calculando* y' *e* y'' *e substituindo na equação diferencial* $y''+(x-1)y'-4y=0$ *vem* $(n-4)a_0x^n+(-a_1-4a_0)x^{n-1}+(12a_0-3a_1-2a_2)x^{n-2}+(6a_1-2a_2-3a_3)x^{n-3}+\cdots=0$ *donde* $n=4\rightarrow a_1=-4a_0$, $a_2=12a_0$, $a_3=-16a_0$ *e* $a_4=10a_0$ *e portanto* $y=a_0(x^4-4x^3+12x^2-16x+10)$.

F. C. L. — 2.º exame de frequência — 1938-39.

I

262 — *a*) Defina eleminante e resultante dum sistema de equações algébricas. *b*) Defina coordenadas cilíndricas e deduza as expressões que as relacionam com as coordenadas dum sistema cartesiano ortogonal no caso em que coincidem os elementos de referência comuns aos dois sistemas. *c*) Indique quais os lugares geométricos que, em geometria analítica no espaço, são definidos por cada uma das equações $4x-y=0$; $2x^2+2y^2-y+x=0$. *d*) Escreva na forma reduzida e na forma normal a equação duma recta no plano e indique o significado geométrico das constantes que entram nessas equações, no caso dos eixos cartesianos serem oblíquos. *e*) Defina potência dum ponto em relação a uma circunferência e indique como procede à sua determinação no caso das coordenadas cartesianas ortogonais.

263 — Resolva a equação: $10x^6-27x^5-120x^4+120x^2+27x-10=0$. R: $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=5$, $x_4=1/5$, $x_5=-2$, $x_6=-1/2$.

264 — Deduza a equação da circunferência com centro no eixo dos YY e tangente à recta $y-3x+5=0$ no ponto P (2,1). R: $3(x^2+y^2)-10y-5+0$.

265 — Determine a distância do ponto P ao plano π: P é o traço da recta $x-2=y/-6=(z-2)/3$ no plano bissector do diedro $X\widehat{O}YZ$; π é um dos planos que passam pelo eixo OZ e fazem um ângulo de 60º com o eixo OY. R: *Há dois planos que passam por* OZ *e determinam com o semi-eixo* OY *um ângulo de* 60º. *As distâncias de* P *a esses planos são iguais a* $\sqrt{3}$.

Outros exercícios

266 — Resolva, pelo método dos divisores, a equação $2x^5-3x^4-14x^3+38x^2-8x-15=0$. R: $x_1=1$, $x_2=-3$, $x_3=-1/2$, $x_4=2+i$, $x_5=2-i$.

267 — Deduza a equação da circunferência que passa pelo ponto P (0,1) e forma com a circunferência $x^2+y^2-4x+9y+3=0$ um sistema que tem por eixo radical a recta $x-2y-1=0$. R: $3(x^2+y^2)+x+y-4=0$.

268 — Deduza a equação do plano que passa por r_1 e é paralelo a r_2; r_1 passa por $P_1(1,-1,2)$ e é perpendicular ao plano bissector do diedro $X\widehat{OZ}Y$; r_2 passa por $P_2(2,-1,3)$ e $P_3(1,0,1)$. R: $x+y=0$.

269 — Determine os limites das raízes da equação $2x^5-3x^4+x^2-5x-8=0$ usando os métodos de Bret e Newton.

270 — Deduza a equação duma recta que passe pelo centro da circunferência $x^2+y^2-3x+6y+7=0$ e faça um ângulo de 45° com a tangente a esta circunferência no ponto P (2,—1). R: $10y-6x+39=0$ e $6y+10x+3=0$.

271 — Determine a distância entre as rectas r_1 e r_2: r_1 passa por $P_1(1,-1,2)$ e é paralela aos planos $2x-5y+z-3=0$ e $x-2y-3z+1=0$; r_2 passa pelo centro da esfera $x^2+y^2+z^2+4y-16=0$ e pelo ponto P (6, 2, 2). R: $d=17/\sqrt{390}$.

272 — Determine λ de forma que o sistema $x-3y+2z+t=0$, $2x+y-2z-2t=0$, $-x+y+3z+2t=0$ e $x+y+z+\lambda t=0$ admita soluções não nulas. R: $\lambda=2/23$.

273 — Deduza a equação da bissectriz do ângulo formado pelas rectas r_1 e r_2: r_1 passa pelo centro da circunferência $x^2+y^2-4x-6y-13=0$ e pelo ponto P(3,—2); r_2 é a mediana relativa ao vértice A (2, 1) do triângulo cujos outros vértices são B (3,—2) e C (—1, 2). R: $(5\mp\sqrt{13})x+(1\pm\sqrt{13})y-(13\mp\sqrt{13})=0$.

274 — Deduza a equação da esfera cujo centro é o ponto de encontro das rectas r_1 e r_2 e que é cortada pelo plano dos XZ segundo uma circunferência de raio R=5

$$r_1\equiv\begin{cases}x=3z-5\\ y=2z+4\end{cases}\qquad r_2\equiv\begin{cases}x=z-7\\ y=-3z-1.\end{cases}$$

R: $x^2+y^2+z^2+16x-4y+2z+40=0$.

I. S. C. E. F. — 3.° exame de frequência — 20-6-1939

275 — Calcular três termos do desenvolvimento, em série de potências da função $y=\dfrac{1+x^2+x^4}{\cosh x}$. R: $y=1+x^2/2+17x^4/24+\cdots$.

276 — Dada a equação $x^3-4x^2+6x+\lambda=0$ determine λ de modo que uma das raizes seja igual ao produto das outras duas. Resolva, nessa hipótese, a equação. R: *Há dois valores de* λ: $\lambda=-9$ *a que correspondem as raizes* $\dfrac{1+i\sqrt{11}}{2}$, $\dfrac{1-i\sqrt{11}}{2}$ *e* 3, *e* $\lambda=-4$, *a que correspondem as raizes* $1+i$, $1-i$ *e* 2.

277 — É dada em eixos coordenados rectangulares a recta $r\equiv x/-2+y=1$; conduzir pelo ponto (0,2) uma recta r' tal que o triângulo formado pelas rectas r, r' e pelo eixo das abcissas tenha uma área dada m. Discussão. Examinar, em particular, os casos $m=1$ e $m=2$. R: *A equação de* r' *é* $x/\alpha+y/2=1$, *onde* α *é uma das raizes de* $\alpha^2+(4-m)\alpha+4(1-m)=0$, *que raduz ser* m *a área do triângulo em questão. O problema é sempre possível* ($m>0$) *com duas soluções distintas* (*excepto no caso* $m=0$ *que não interessa*). *Uma das solnções para* $m=1$ *é o eixo das ordenadas. Para* $m=2$ *as rectas soluções correspondem aos valores* $\alpha=-1\pm\sqrt{5}$.

I. S. C. E. F. — 3.° exame de freq. extraord. — 28-6-1939

278 — Duma função $y(x)$ conhecem-se os seguintes valores: x) $-2, -1, 0, 1, 2$; y) $21, 3, 1, 3, 21$. Calcular a função interpoladora $P(x)$ e fazer a sua representação geométrica.

279 — Dadas as rectas r) $x-y+2=0$ e r') $x+y-4=0$ tirar pelo seu ponto de encontro uma recta tal que o quadrilátero determinado pelos dois eixos coordenados e pelas rectas r e r' fique por ela dividido em duas figuras de área igual.

280 — Resolver a equação

$$2x^4+3x^3+2x^2-11x-21=0.$$

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 2.° exame de frequência — 1938-39.

281 — *a*) Demonstrar que o determinante

$$\begin{vmatrix} x^n & a & ax & \cdots & ax^{n-2} & ax^{n-1}\\ x^{n-1} & 1 & a & \cdots & ax^{n-3} & ax^{n-2}\\ x^{n-2} & 0 & 1 & \cdots & ax^{n-4} & ax^{n-3}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x & 0 & 0 & \cdots & 1 & a\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}\quad \text{é igual a } (x-a)^n.$$

R: *Representemos por* D_n *o determinante dado. Para* $n=1$ *é, evidentemente* $D_1=x-a$.

Adoptemos, na demonstração proposta o método de indução completa, admitindo assim a hipótese de que é $D_{n-1}=(x-a)^{n-1}$. *Desenvolvendo* D_n *segundo os elementos da segunda coluna, tem-se:*

$$D_n=-aD_{n-1}+xD_{n-1}=(x-a)\,D_{n-1}=(x-a)^n,\quad \text{c. q. p.}$$

282 — Dada, no plano $x0y$, a cónica $xy+2x-5y=0$ estudá-la, fazendo o seu traçado aproximado, e achando as suas equações referidas aos eixos e às assíntotas. R: *A cónica é uma hipérbole equilátera. A equação referida aos eixos é* $X^2/20-Y^2/20=1$ *e a equação referida às assíntotas é* $XY=-10$.

283 — Determinar a recta simétrica da recta $x-2=y=z$ em relação ao plano $3x+y-z=5$.

R: $\dfrac{3x-5}{-7}=\dfrac{3y+1}{5}=\dfrac{3z+1}{17}$.

Outros exercícios

284 — Discutir e resolver o sistema

$$\begin{cases} (a+b)\,x+(a-b)\,y=a^2+b^2 \\ (a-b)\,x+(a+b)\,y=a^2-b^2 . \end{cases}$$

Interpretar em geometria analítica no espaço.

285 — Dadas no plano $x0y$, as duas rectas $mx+$ $+(2m-1)\,y+3=0$ e $(4m-7)\,x-(m+2)\,y-8=0$ determinar m de modo que sejam 1.º) perpendiculares, 2.º) paralelas. Determinar no 1.º caso o ponto de encontro, no 2.º caso a sua distância.

286 — Verificar que os planos perpendiculares aos meios dos lados dum quadrilátero $ABCD$ são concorrentes num ponto. ¿Qual é a posição dêsse ponto se o quadrilátero é plano?

287 — Um triângulo variável tem vértices fixos nos pontos A (2,0) e B (0,4) deslocando-se o terceiro vértice C na recta $x+y=9$. Achar o lugar geométrico do baricentro do triângulo.

288 — Determinar a condição a que deve satisfazer λ para que a circunferência representada pelas equações $x^2+y^2+z^2=R^2$ e $x+y+z=\lambda$ seja real. Determinar, nesta hipótese, o centro e o raio dessa circunferência.

I. S. C. E. F. — Exame final, Outubro de 1940

289 — Dado o complexo $z=3/(2+\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ pô-lo sob a forma $x+yi$ e verificar que o lugar dos afixos de z é a circunferência $(x-2)^2+y^2=1$.

R: $\dfrac{3}{2+\cos\theta+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta}=\dfrac{3\,(2+\cos\theta-\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)}{(2+\cos\theta)^2+\mathrm{sen}^2\,\theta}=\dfrac{6+3\cos\theta}{5+4\cos\theta}-$ $-\dfrac{3\,\mathrm{sen}\,\theta}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{i}$. *O lugar geométrico dos afixos é definido paramètricamente pelas equações* $\mathrm{x}=\dfrac{6+3\cos\theta}{5+4\cos\theta}$, $\mathrm{y}=-\dfrac{3\,\mathrm{sen}\,\theta}{5+4\cos\theta}$ *donde, por eliminação de* θ, *se deduz*

$$(\mathrm{x}-2)^2=\left(\frac{-4-5\cos\theta}{5+4\cos\theta}\right)^2=\frac{16+40\cos\theta+25\cos^2\theta}{(5+4\cos\theta)^2},$$

$$\mathrm{y}^2=\frac{9\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{(5+4\cos\theta)^2},$$

$$(\mathrm{x}-2)^2+\mathrm{y}^2=\frac{16+40\cos\theta+9+16\cos^2\theta}{(5+4\cos\theta)^2}=1.$$

290 — Estudar e representar geomètricamente a função $\mathrm{y}=2\,\mathrm{sen}^2\,x-3\cos^2 x$.

291 — Calcular as raízes reais da equação x^4+x- $-10=0$. As raízes irracionais serão determinadas com um êrro inferior a 1/10.

Solução do n.º 289 de Manuel Zaluar.

F. C. C. — Exames de frequência, 1938-39

292 — Achar com duas casas decimais exactas a raiz real da equação: $f(x)=\mathrm{sen}\,x-2x+1=0$ pelo método de iteração.

293 — Encontrar as condições para que o sistema

$$\begin{cases} x=cy+bz \\ y=az+cx \\ z=bx+ay \end{cases}$$

represente uma linha recta; mostrar que a recta é representada por $\dfrac{x}{\sqrt{1-a^2}}=\dfrac{y}{\sqrt{1-b^2}}=\dfrac{z}{\sqrt{1-c^2}}$.

294 — Resolver a equação

$$\cos a\cos^2 x-\mathrm{sen}\,a\cos a/2\cos x+\mathrm{sen}^2\,a/2=0.$$

295 — Como aplicação da teoria dos complexos resolver a equação $\left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^4=\dfrac{1+ia}{1-ia}$. (Pode fazer-se $x=\mathrm{tg}\,\varphi$ e $a=\mathrm{tg}\,\alpha$).

296 — Calcular o limite para $n=\infty$ de

$$\frac{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}\,n^{\frac{1}{12}}.$$

297 — Em que casos são convergentes as séries: $\Sigma n\,(n+1)\,x^n$ e $\Sigma x^n\,\mathrm{sen}\,n\theta$?

298 — Traçar a curva $y=e^{\frac{1+x}{1-x}}$.

299 — Num triângulo esférico é $a=113^\circ\,2'\,56''$, $b=82^\circ\,39'\,28'',40$, $c=74^\circ\,54'\,31''$. Calcular os ângulos $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$.

F. C. L. — Alguns exercícios do curso

300 — Expressão geral dos números cujo produto por $a+bi$ é um número real. Mostre que o conjugado de $a+bi$ está contido nesta expressão. Lugar geométrico das imagens. R: *Seja* $\mathrm{x}+\mathrm{iy}$ *um número complexo tal que o produto* $(\mathrm{a}+\mathrm{ib})\,(\mathrm{x}+\mathrm{iy})=\mathrm{z}$ (número real). *Ora* $\mathrm{z}=(\mathrm{ax}-\mathrm{by})+\mathrm{i}\,(\mathrm{ay}+\mathrm{bx})$. *Se* z *deve ser real, deve ter-se* $\mathrm{ay}+\mathrm{bx}=0$ *donde* (1), $\mathrm{x}/\mathrm{y}=\mathrm{a}/-\mathrm{b}$. *Sendo* λ *um número real arbitrário será pois* $\mathrm{x}=\lambda\mathrm{a}$, $\mathrm{y}=-\lambda\mathrm{b}$. *A expressão geral dos números* $(\mathrm{x}+\mathrm{iy})$ *será então* (2) $\mathrm{x}+\mathrm{iy}=\lambda\mathrm{a}-\lambda\mathrm{bi}$. *O conjugado de* $\mathrm{a}+\mathrm{bi}$ *está contido nesta expressão: corresponde a* $\lambda=1$.

Lugar geométrico das imagens: *Êste lugar geométrico tem por equação, no plano* XOY, *a equação* (1). *É pois uma recta definida pela origem* (0, 0) *e pela imagem do conjugado de* $\mathrm{a}+\mathrm{bi}$.

301 — Escreva a expressão geral dos números cujo cociente por $a+bi$ é um imaginário puro. Lugar geométrico das imagens. R: *Procuremos a expressão geral dos números* $(x+iy)$ *tais que* $\frac{x+iy}{a+ib}=\lambda i$ *onde* λ *é um número real arbitrário. Logo,* $x+iy=-\lambda b+\lambda ai=$ $=kb-kai$ $(k=-\lambda)$. *Vê-se fàcilmente que o lugar geométrico das imagens dos números* $(x+iy)$ *é uma recta que passa pela origem e é perpendicular ao segmento orientado* OM, *que define o número* $a+bi$. V. B.

302 — Extraia algèbricamente a raiz quadrada a $a+bi$ e aproveite o resultado para: 1.º Provar que as raizes quadradas do conjugade de um número são respectivamente conjugadas das raízes quadradas dêsse número. 2.º Extrair algèbricamente a raiz quadrada a $1+i\sqrt{3}$ e o $1-i\sqrt{3}$. R: *Seja* $x+iy$ *uma raiz quadrada de* $a+bi$. *Teremos, por definição,* $(x+iy)^2=a+bi$ *ou* $(x^2-y^2)+2xyi=a+bi$. *Portanto:*

$$(1) \qquad \begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x^2+(-y^2)=a \\ x^2(-y^2)=-b^2/4 \end{cases}$$

o que mostra serem x^2 *e* $-y^2$ *as raizes da equação*

$$(2) \qquad u^2-au-b^2/4=0$$

que admite duas raizes reais $(-b^2/4<0)$. *Resolvendo a equação, obtemos* $u=\frac{a}{2}\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. *Por conseguinte*

$$(3) \qquad \begin{cases} x^2=\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ y^2=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\pm\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ y=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \end{cases}$$

A 2.ª expressão (1) *mostra que* xy *tem o sinal de* b *e que portanto* x *e* y *têm o mesmo sinal ou sinais contrários conforme* b 0. *Das* 4 *combinacões possíveis de sinais em* (3) *só duas conduzem pois a soluções do problema. O número* $a+bi$ *tem portanto duas raizes quadradas que são*

$$(4) \qquad \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+i\varepsilon\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right]$$

onde $\varepsilon=+1$ *se* $b>0$, $\varepsilon=-1$ *se* $b<0$.

Conclusões: 1.ª. *Dados os números* $a+bi$ *e* $a-bi$, *para uu dêles é* $\varepsilon=1$ *e para o outro* $\varepsilon=-1$.

A expressão (4) *mostra que* $a+bi$ *e* $a-bi$ *têm raízes quadradas respectivamente conjugadas.* 2.ª. *Para o número* $1+i\sqrt{3}$ *é* $\varepsilon=1$, *e as expressões* (4) *dão, para as suas raízes quadradas, os valores:* $\sqrt{6}/2+i\sqrt{2}/2$ *e* $-\sqrt{6}/2-i\sqrt{2}/2$. *As raízes quadradas de* $1-i\sqrt{3}$ *serão* $\sqrt{6}/2-i\sqrt{2}/2$ *e* $-\sqrt{6}/2+i\sqrt{2}/2$.

303 — Prove que todo o complexo de módulo 1 se pode pôr na forma $(1+ix):(1-ix)$ com x real. R: *O problema equivale ao seguinte: Prove que, dado um complexo qualquer de módulo* 1, $\cos\varphi+i\,\text{sen}\,\varphi$ *se pode determinar sempre um número real* x, *em função de* φ, *tal que* $\cos\varphi+i\,\text{sen}\,\varphi=(1+ix):(1-ix)$.

1.º modo de resolução: *Sendo* x *real, o complexo* $(1+ix):(1-ix)$ *tem efectivamente o módulo* 1 *pois que* $\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=1$. *Sendo* α *um argumento de* $1+ix$ *é* $-\alpha$ *um argumento de* $1-ix$, *seu conjugado. Um argumento do cociente é pois* $\alpha-(-\alpha)=2\alpha$. *Teremos* $2\alpha=\varphi+2k\pi$ *donde* $\alpha=\varphi/2+k\pi$ *e portanto*

$$(1) \qquad \text{tg}\,\alpha=\text{tg}\,\varphi/2.$$

Mas, visto ser α *um argumento de* $1+ix$, *temos*

$$(2) \qquad \text{tg}\,\alpha=x.$$

Atendendo a (1) $x=\text{tg}\,\varphi/2$.

2.º modo de resolução: *Temos, se* x *é real* $\frac{1+ix}{1-ix}=$ $=\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{2xi}{1+x^2}\cos\varphi+i\,\text{sen}\,\varphi$ *(verifica-se fàcilmente que* $a^2+b^2=1$).

$$(3) \qquad \begin{cases} \cos\varphi=\dfrac{1-x^2}{1+x^2} \\ \text{sen}\,\varphi=\dfrac{2x}{1+x^2}. \end{cases}$$

Mas, sendo $\cos\varphi=\frac{1-\text{tg}^2\,\varphi/2}{1+\text{tg}^2\,\varphi/2}$ *e* $\text{sen}\,\varphi=\frac{2\,\text{tg}\,\varphi/2}{1+\text{tg}^2\,\varphi/2}$, *e atendendo a* (3), *vemos que terá de pôr-se, para satisfazer ao problema* $x=\text{tg}\,\varphi/2$.

304 — Onde deve estar a imagem M dum número z para que, sendo M_1 e M_2 as imagens de z_1 e z_2, o cociente $\frac{z-z_1}{z-z_2}$

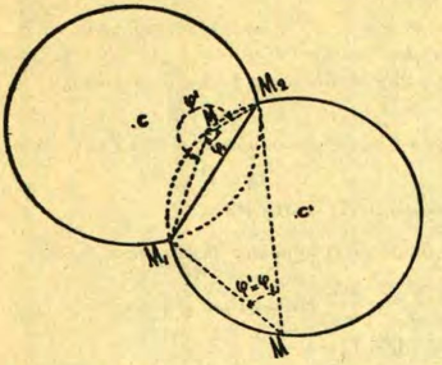
1.º seja real?

2.º seja imaginário puro?

3.º tenha um argumento dado φ?

R: *Escrevamos o cociente na forma* $\frac{z_1-z}{z_2-z}$ *e notemos que* z_1-z *é representado pelo segmento* $\overrightarrow{MM_1}$ *e que* z_2-z *é representada pelo segmento* $\overrightarrow{MM_2}$. *O cociente tem por módulo* $\frac{MM_1}{MM_2}$ *e tem por argumento um dos ângulos* α *que* $\overrightarrow{MM_1}$ *forma com* $\overrightarrow{MM_2}$ *(suporemos* $\alpha>0$ *e, portanto, contado no sentido directo de* $\overrightarrow{MM_2}$ *para* $\overrightarrow{MM_1}$).

Nestas condições: 1.º *O cociente é real se* $\alpha=k\pi$, *isto é, se* M *é colinear com* M_1 *e* M_2. 2.º *O cociente é imaginário puro se* $\alpha=(2k+1)\pi/2$ $(\alpha=90^\circ$ *ou* $\alpha=270^\circ)$. *Então* M *deve estar sobre a circunferência que tem* M_1M_2 *por diâmetro.* 3.º *Suponhamos que* φ' *é o argumento positivo mínimo que corresponde ao argumento dado* φ *e designemos por* φ_1 *o ângulo* φ' *se* $0<\varphi'<180^\circ$ *e o ângulo* $\varphi'-180^\circ$ *se* $180^\circ<\varphi'<360^\circ$. *Construam-se os* *dois segmentos capazes do ângulo* φ_1 *e passando por* M_1 *e* M_2. *Os segmentos são simétricos relativamente à recta* M_1M_2 *e tem-se* $M_1\widehat{CM_2}=M_1\widehat{C'M_2}=2\varphi_1$. *Então: se* $\varphi'<180°$, M *está sobre aqueles dois segmentos do qual*



se veja M_1 *à esquerda de* M_2. *Se* $\varphi'>180°$, M *está sobre aquele dos dois segmentos do qual se veja* M_1 *à direita de* M_2.

Nota. Se $\varphi_1<90°$ os dois arcos são os traçados a ponteado. Se $\varphi_1>90°$ os dois arcos são os traçados a cheio.

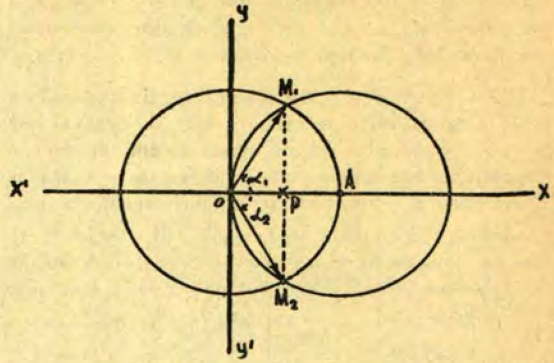
305 — Determine um número z de modo que z, $1/z$ e $1-z$ tenham módulos iguais. Idêntica questão com z, $1/z$ e $1+z$. Resolva também geomètricamente o problema. R: Resolução algébrica da primeira parte: *Pondo* $z=\rho(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)$ *teremos*

$1/z=1/\rho(\cos\alpha-i\,\text{sen}\,\alpha)$ *e* $1-z=(1-\rho\cos\alpha)-i\rho\,\text{sen}\,\alpha$.

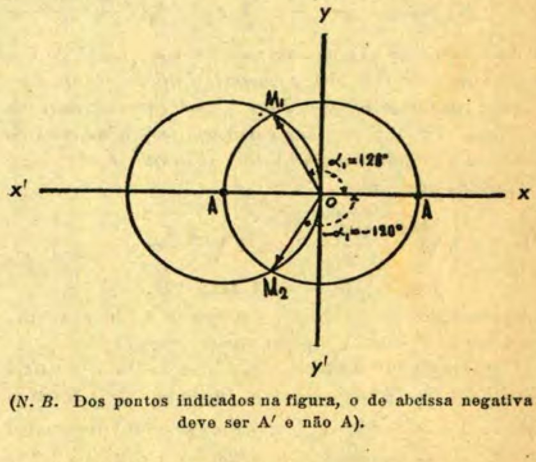
Se $|1/z|=|z|$ *será* $1/\rho=\rho$ *donde* $\rho=1$. *Temos ainda:* $|1-z|^2=(1-\cos\alpha)^2+\text{sen}^2\,\alpha=2-2\cos\alpha$. *E como tem de ser* $|1-z|=1$, *será* $2-2\cos\alpha=1$, $\cos\alpha=1/2$. *Logo* $\alpha=\pm\pi/3$. *Há, por conseguinte, duas soluções:*

$$(1)\qquad \begin{cases} z=\cos\pi/3+i\,\text{sen}\,\pi/3 \\ z=\cos\pi/3-i\,\text{sen}\,\pi/3\,. \end{cases}$$

Resolução geométrica. *Provámos fàcilmente que* $\rho=1$, *a partir da condição* $|z|=|1/z|$. *As imagens de todos os complexos tais que* $\rho=1$, *são os pontos da circunferência de centro na origem e raio* 1. *Por outro lado,* $1-z$ *deve ter o módulo* 1. *Ora, sendo* A *a imagem de* 1 *e* M *a de* z, $1-z$ *é representado pelo segmento orientado* $\overrightarrow{AM}$. *As imagens de* M *de todos os números* z *tais que* $|1-z|=1$ *estão, pois, sobre a circunferência de centro* A *e raio* 1. *As soluções do problema são os dois números cujas imagens são os pontos comuns às duas circunferências citadas. O segmento* $\overrightarrow{OM_1}$ *representa o complexo* $(1,\alpha_1)$. *O segmento* $\overrightarrow{OM_2}$ *representa o complexo* $(1,\alpha_2)=(1,-\alpha_1)$. *Da figura tira-se* $\cos\alpha_1=\cos\alpha_2=OP=1/2$ $(\alpha_1=\pi/3,\ \alpha_2=-\pi/3)$. *Os dois complexos* z_1 *e* z_2 *são pois os que determinámos*



algèbricamente. Resolução geométrica da segunda parte. *A resolução algébrica é análoga à primeira e conduz aos dois números* $z_1=\cos 2\pi/3+i\,\text{sen}\,2\pi/3$ *e* $z_2=\cos 2\pi/3-i\,\text{sen}\,2\pi/3$ (2). *As imagens dos números* z *tais que* $|z|=1$ *estão na circunferência de raio* 1 *e centro* O, *como vimos. Notemos agora que* $1+z=$ $=1-(-z)$ *e que, por conseguinte, as imagens dos*



(*N. B.* Dos pontos indicados na figura, o de abcissa negativa deve ser A' e não A).

números tais que $|1+z|=|1-(-z)|=1$ *estão sobre a circunferência de centro* A' *e raio* 1, *simétrica da circunferência* A *relativamente a* O, *visto que as imagens dos números* $-z$ *devem estar, como vimos, na circunferência de centro* A *e raio* 1. *As soluções* z_1 *e* z_2 *são os afixos dos pontos* M_1 *e* M_2, *os quais afixos são bem os complexos* (2).

306 — Resolva a equação $(x+1)^m-(x-1)^m=0$ (m inteiro positivo). R: *A equação dada pode escrever-se* $mx^{m-1}+\binom{m}{3}x^{m-3}+\binom{m}{5}x^{m-5}+\cdots=0$, *ou ainda* $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^m=1$ *donde* $\frac{x+1}{x-1}=\sqrt[m]{1}=\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta$ $(\theta=2k\pi/m)$. *A equação decompõe-se assim em* m *equações lineares em* x. *Uma porém destas equações é impossível — a que corresponde a* $\theta=0$ *ou ao valor* 1 *de* $\sqrt[m]{1}$. *Temos pois:* $(x+1):(x-1)=\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta$;

$$x\,(1-\cos\theta-i\,\mathrm{sen}\,\theta)=-\cos\theta-i\,\mathrm{sen}\,\theta-1\,;$$

$$x=\frac{\cos\theta+1+i\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta-1+i\,\mathrm{sen}\,\theta}=\frac{i\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta-1}=-i\,\mathrm{cotg}\,\theta/2.$$

As soluções são então dadas por $x=-i\,\mathrm{cotg}\,\theta/2$ *com* $\theta=2\pi/m$, $4\pi/m$, $6\pi/m$, $\cdots$, $2\,(m-1)\,\pi/m$, *por exemplo.* M. Z.

307 — Resolva a equação $(x+i)^m-(x-i)^m=0$.

308 — Resolva $\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^m-\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^m=0$.

309 — Resolva $\left(1+\sqrt{x^2-1}\right)^m-\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^m=0$.

Obs. A resolução da equação **307** é análoga à do n.º **306**; **308** e **309** reduzem-se ao mesmo tipo fazendo $\sqrt{1-x^2}=z$. M. Z.

Enunciados e soluções dos n.os 300 a 305 de Vergílio Simões Barroso.

CÁLCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR

F. C. L. — Cálculo — 1.º exame de freq. — 1938-39

I

310 — *a*) Defina séries inteiras e enuncie o teorema de Abel. Defina convergência uniforme. *b*) Potência de um conjunto. Conjuntos com a potência do contínuo; definição e propriedades. *c*) Defina infinitamente pequenos equivalentes e enuncie os teoremas sobre a substituição dos infinitamente pequenos. *d*) Critérios de integrabilidade. Funções integráveis; definição e propriedades. *e*) Determinante funcional; definição e aplicações às funções compostas e às funções inversas.

311 — Determine o número a que corresponde a fracção contínua $[2\,(3\,,1\,,1)]$. R: $(5+\sqrt{17})/4$.

312 — Determine x de forma que sejam coplanares os vectores

$\mathbf{u}=x\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}=2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{w}=\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3$.

R: *O anulamento do produto misto é uma condição suficiente (e necessária) que conduz a* $x=9/4$.

313 — Definidas as funções u e v de x e y pelo sistema $\begin{cases} v\,ly-e^u+x^3=0 \\ uv-2y=0 \end{cases}$ calcule $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$.

Nota. Por l representa-se o logaritmo neperiano.

II

314 — *a*) Critério geral de convergência de um produto infinito. Produtos infinitos absolutamente convergentes; definição e propriedades. *b*) Medida dos conjuntos. Conjuntos mensuráveis. *c*) Vectores colineares e vectores coplanares; definições e propriedades. *d*) Função contínua num conjunto. Continuidade uniforme. Teorema de Cantor. *e*) Enuncie o segundo teorema sobre a existência e derivabilidade das funções implícitas.

315 — Determine o carácter da série

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\cdots$$

R: *Termo geral* $u_n=\dfrac{1}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)}$; *o critério de Duhamel-Raabe mostra que a série e convergente.*

316 — Dados os vectores $\mathbf{u}=2\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2$ com a origem comum O, determine x e y de forma que o paralelogramo construido sobre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ seja rectângulo e tenha uma área igual a $\sqrt{70}$. R: *Para que o paralelogramo seja rectângulo tem de ser perpendiculares entre si os vectores* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$, *isto é, tem de ser nulo o seu produto interno; para que a área do paralelogramo seja igual a* $\sqrt{70}$ *deve ser este o módulo do vector produto externo. Portanto* $x=\pm1$ *e* $y=\pm2$.

317 — Definida a funcão z de x e y por $z=uv+w/u-v^w$, sendo $u=x^2-y^2$, $v=xy$ e $w=e^x$, calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

I. S. C. E. F. — 2.ª Cadeira — 1.º exame de frequência — 12-1-1939.

318 — As funções

$$y_1=2x^2+3x+1\,,\quad y_2=x-2\,,\quad y_3=4x^2-1\,,$$

são linearmente dependentes?

319 — Determine os máximos e mínimos da função $z=\mathrm{sen}\,x+\mathrm{sen}\,y+\mathrm{sen}\,(x+y)$.

320 — O sistema $\begin{cases} xy+uv=1 \\ \dfrac{x+y}{u+v}=-1 \end{cases}$ determina u e v como funções de x e y. Calcule $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

2.ª chamada — 19-1-1939

321 — Achar os máximos e mínimos da função implícita y de x definida pela equação

$$\cos(y-x) - 2 \operatorname{sen} y - \cos x = 0.$$

322 — Mudar a variável independente na equação

$$(x-x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} + (1-3x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0$$

sendo $x = \sqrt{1-t^2}$.

323 — Sendo

$$2x^2 x^y + \log \operatorname{sen} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+y^2} - 3 \operatorname{sen} \sqrt[3]{y^z} = 0$$

calcular $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

I. S. T. — 1.º exame de frequência — 1938-1939

324 — Calcular o integral $\displaystyle\int \frac{4x^2+1}{(x-1)^2(2x^2+1)} dx$.

325 — Estudar a convergência do integral

$\displaystyle\int_0^2 \frac{x^{a-1}}{1-x} dx$ para valores convenientes de a.

326 — Dado o sistema

$$\begin{cases} x^z - 2(\cos y)^x + \sqrt[3]{\operatorname{arc\,sen} \dfrac{x^2}{y^x}} = 0 \\ x^z \log y + \operatorname{tg} \dfrac{x^2+y}{z^x+x^y} = e^x \end{cases}$$

calcular $\dfrac{dz}{dx}$ e $\dfrac{dy}{dx}$.

327 — Determinar os máximos e mínimos da função $z = 5x+3y$ sendo $4 \operatorname{sen} x - 3 \cos y = 0$.

F. C. L. — Cálculo — Junho de 1939

328 — *a*) Linhas contínuas e rectificáveis: Definição e suas propriedades. *b*) Envolvente duma família de superfícies: Definição, equação e propriedades; características e aresta de reversão. *c*) Superfícies regradas: Sua equação vectorial; definição e equação vectorial da linha de estricção das superfícies enviezadas. *d*) Contacto de duas curvas torsas: Definição e condições analíticas do contacto de ordem n. *e*) Integrais definidos: Definição e propriedades gerais.

329 — Determine os máximos e mínimos da função $z = x^3+3x^2+4xy+y^2$. R: *A* $x=2/3$, $y=-4/3$ *corresponde um mínimo* $z=-4/27$.

330 — Determine as assíntotas da curva

$$x^2(x-y)^2 - a^2(x^2+y^2) = 0.$$

R: $X=a$, $X=-a$, $Y=X+a\sqrt{2}$, *e* $Y=X-a\sqrt{2}$.

331 — Calcule $\displaystyle\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x} dx$.

Outros exercícios

332 — Dada a equação

$$\frac{1-x^2}{x^2} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{x^3} \cdot \frac{dy}{dx} + y = 0$$

substitua a variável independente x por outra t ligada com esta pela relação $x = \sqrt{1-t^2}$.

333 — Determine os pontos de inflexão da curva $y = \dfrac{x^3}{x^2+3a^2}$ e as tangentes nesses pontos.

334 — Calcule $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^3+1}}$.

I. S. C. E. F.—2. cadeira, 2.º exame de freq.—21-4-1939

335 — Calcular o integral $\displaystyle\iint_A \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}}$

sendo A a área limitada pelos eixos coordenados e pela elipse $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ no quadrante positivo dos eixos. R: *Seja* I *o integral dado. A função integranda é infinita sobre parte do contorno de* A. *Façamos* $x=aX$, $y=bY$ A *transforma-se em* A', *domínio limitado pelos eixos coordenados e por* $X^2+Y^2=1$. *Atendendo a que é*

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)} = ab, \text{ vem } I = \iint_{A'} \frac{ab\,dX\,dY}{\sqrt{1-X^2-Y^2}} = \iint_{A'} \frac{ab\rho\,d\rho\,d\theta}{\sqrt{1-\rho^2}},$$

introduzindo coordenadas polares. É pois

$$I = ab \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

integral este, evidentemente convergente. Efectuando o cálculo obtém-se $I = \pi\,ab/2$.

336 — Determine os pontos de inflexão da curva

$$xy = 2a\sqrt{2ax-x^2}.$$

337 — O integral $\displaystyle\int_1^\infty [x(1+x^2)^{-1/6}]^{-3} dx$ será convergente?

Solução do n.º 335 de Manuel Zaluar.

I. S. T. — Cálculo — 2.º exame de freq. — 1938-39

338 — Calcular o integral duplo $\iint \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$ estendido ao interior da parábola $y^2=2px$.

339 — Integrar a equação
$$\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=0\,.$$

340 — Determinar os pontos singulares da curva
$$y^2-2x^2y+x^4-x^5=0\,.$$

341 — Integrar a equação $y''-y'=(x^2-1)\,e^x$.

II

342 — Sendo ρ o raio de curvatura num ponto P qualquer, e $n=\overline{PA}$ o segmento de normal compreendido entre o ponto P e o eixo dos xx, determinar, entre as curvas planas integrais de equação $\rho=2n$, aquela que tem ordenada mínima no ponto $(1\,,1/2)$. (Eixos rectangulares).

343 — Integrar a equação
$$2t^2\frac{d^2y}{dt^2}-2t\frac{dy}{dt}-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+4t^2=0$$
efectuando a transformação $x=t^2$.

344 — Calcular o volume do sólido comum aos dois paraboloides
$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{36}=2z\,,\quad \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}=2\,(2-z)\,.$$

345 — Determinar a de modo tal que a superfície $z=x^2+y^2+axy$ seja planificável. Escrever a equação do plano tangente na origem dos eixos coordenados.

F. C. L. — Cálculo — Exame final, 1939 — Alguns exercícios.

346 — Determinar os pontos singulares da curva
$$y^2=(2-x)^2\,(1-x)\,.$$

347 — Calcule $\int \frac{1+\cos x}{\cos x\,(1-2\cos x)}\,dx\,.$

348 — Calcule o integral geral de $xy^2dy=(x^3+y^3)\,dx$.

349 — Transforme a equação $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=0$ noutra em que as variáveis independentes x e y sejam substituídas pelas novas variáveis t e z relacionadas com as primeiras por $x=z^2+t^2$, $y=t^2-z^2$.

350 — Dadas as funções u e z de x e y definidas pelo sistema $\begin{cases} xz-\log u+e^v=0 \\ uz-y^2=0\,, \end{cases}$ calcule $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$.

351 — Calcule $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{5x-6-x^2}}$.

352 — Calcule o integral geral de $y^2\left[1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=3$.

353 — Calcule a área limitada pela curva $y^2=4x^2-x^4$.

354 — Calcule o volume gerado pela rotação em tôrno de OY da curva $x^2=y^3-4y$.

355 — Calcule $\int x\log(x^4-1)\,dx$.

F. C. L. — Análise — 1.º exame de freq. — 1938-39

356 — *a*) Funções analíticas num domínio: Definição; teorema das funções compostas e teorema das funções implícitas. *b*) Integrais de superfície: Definição; fórmula de Ostrogradsky-Green e fórmula de Stokes. *c*) Séries trigonométricas: Definição; fórmulas de Fourier para o intervalo $(-\pi\,,+\pi)$; condições a que deve satisfazer uma função para ser susceptível de tal desenvolvimento. *d*) Funções holomorfas: Definição; generalização da série de Taylor para o caso das funções de variável imaginária; desenvolvimento duma função holomorfa em torno de um dos seus zeros; teoremas relativos aos zeros. *e*) Resíduo de uma função: Definição; teorema dos resíduos de Cauchy relativo às funções meromorfas e sua aplicação ao caso das funções uniformes, numa região limitada por um contorno simples.

357 — Calcular a área da região da superfície $z^2-2xy=0$ compreendida pelos planos de equações $z=0$, $x=1$, $y=0$ e $y-x=0$.

358 — Verificar que a função $\cot z$ é periódica de período π, determinar os seus polos e reduzi-la à forma $u\,(x\,,y)+iv\,(x\,,y)$.

359 — Calcular $\int_\gamma y^2\,dx-2x^2\,ydy$ ao longo do arco da elipse $x^2+2y^2=1$ compreendido entre os pontos $A\,(1/2,\sqrt{6}/4)$ e $B\,(\sqrt{2}/2,1/2)$ no sentido de A para B.

F. C. C. — Análise — Exame de freq. — Junho de 1939

360 — Provar que a equação $x^2y''+4x\,y'+2y=X$ admite um integral regular na origem $x=0$ desde que X seja também regular neste ponto.

361 — Provar (sem recorrer ao teorema análogo de Lebesgue) que toda a função integrável R satisfaz à condição
$$\lim_{h=0}\int_a^b |\,f\,(x+h)-f\,(x)\,|\,dx=0\,.$$

F. C. L. — Análise — 2.° exame de freq. — 1939

362 — *a*) Equações diferenciais totais a três variáveis: $Pdx+Qdy+Rdz=0$. Definição da sua integração e condição para que uma equação deste tipo seja diferencial total. *b*) Equações não lineares às derivadas parciais de primeira ordem: generalidades; definição de integral completo. *c*) Equações às derivadas parciais de segunda ordem: definição de integral intermédio. *d*) Equação diferencial linear de ordem n: equações adjuntas e auto-adjuntas. Termo geral da equação auto-adjunta de segunda ordem. *e*) Definição e classificação das equações integrais. Transformação da equação de Volterra da primeira espécie numa da segunda espécie, quando o núcleo se não anula para valores iguais das variáveis.

363 — Aplicar o teorema dos resíduos ao cálculo do integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+2)^2\,(x^2-x+1)}$.

364 — Determinar o integral geral da equação $4x^3-y-xy^2+xy'=0$ de que é integral particular $y=-2x$.

365 — Determinar o sistema de integrais gerais do sistema

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+y-3z=\operatorname{sen}2x\\[2mm] \dfrac{dz}{dx}-3y+z=0.\end{cases}$$

Outros exercícios

366 — Calcular $\displaystyle\int_{2-i}^{2+i}\frac{dz}{\sqrt{(z-2)^2+1}\,(z^2+1)\,(z-1)^2}$.

367 — Determinar o integral geral da equação

$$xy\,y''-xy'^2-2y\,y'+xy^2=0\,.$$

368 — Determinar o integral geral da equação

$$y\,(z-y)\,dx+xz\,(x+1)\,dy-xy\,(x+1)\,dz=0\,.$$

F. C. L. — Análise — Exame final, Julho de 1939

369 — Calcule $\displaystyle\int_{-2-i}^{-2+i}\frac{dz}{(z+1)\,(z-1)^2\sqrt{(z+2)^2+1}}$.

370 — Determine o integral geral da equação $x\,(x-y')+y\,(1-y)=0$ de que é integral $y=x$.

371 — Aplique o teorema dos resíduos ao cálculo de

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+2x+5)^2\,(3x^2+1)}\,.$$

372 — Determine o integral da equação $(3+x)^3y'''+$ $+(3+x)^2y''+2\,(3+x)\,y'-2y=0$.

373 — Determine o sistema de integrais gerais do sistema:

$$\begin{cases}2y'-z'+3y-z=x\\ y'+2z'+y-3z=1.\end{cases}$$

374 — Determine os extremos do integral $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}y'^2\,dx$ sob a condição de ser $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}xy\,dx=1$ sendo $x_1=0$ $y_1=2$, $x_2=1$ $y_2=0$.

F. C. C. — Análise — Exame final, Julho de 1939

375 — Seja $f(z)$ uma função holomorfa no interior da região R, de contorno C, e seja z_0 um ponto interior a C. Provar que $f(z)$ necessàriamente se anula dentro de R quando se tenha, sobre C, $|f(z)|>|f(z_0)|$.

376 — Sejam $I_1, I_2, \cdots, I_n, \cdots, [I_n=(\alpha_n, \beta_n)]$ os intervalos contíguos a um conjunto C, de medida nula, perfeito e não-denso no intervalo $(0,1)$. Pondo $f(0)=0$, $f(1)=1$ e, em geral,

$$f(x)=\sum_0^x(\beta_n-\alpha_n)\qquad\text{para } 0<x<1,$$

abrangendo o somatório apenas os intervalos I_n situados no interior do intervalo $(0,x)$, pregunta-se:

¿É $f(x)$ de variação limitada? ¿Absolutamente contínua? Derivável? Achar os derivados à direita e integrá-los em $(0,x)$.

MECÂNICA RACIONAL

F. C. L. — 1.° exame de frequência — 1938-39

377 — *Cálculo vectorial:* 1) Defina produto mixto de três vectores e diga quais as suas propriedades. 2) Defina momento axial e momento polar de um vector aplicado. 3) Defina fluxo elementar de um vector. 4) Escreva a expressão vectorial do centro de um sistema de vectores paralelos e indique o significado das letras.

378 — *Cinemática:* 1) Escreva as componentes tangencial e centrípeta da aceleração dum ponto móvel. 2) O que entende por movimentos de aceleração constante? Quais as trajectórias destes movimentos? 3) Defina movimento central e enuncie as suas propriedades.

379 — Um sistema é constituído pelos vectores: $(A_1, 2\mathbf{e}_1)$, $(A_2, 3\mathbf{e}_1)$, $(A_3, -4\mathbf{e}_1)$ sendo as coordenadas dos pontos de aplicação $A_1(0,0,0)$ $A_2(0,2,0)$ $A_3(1,1,1)$; determinar o centro do sistema e a equação do seu eixo central.

380 — Um ponto material move-se de forma que as componentes da sua aceleração segundo dois eixos coordenados rectangulares são $x''=y$, $y''=-\operatorname{sen} t$. Determinar as equações do movimento e a equação da trajectória sabendo-se que para $t=0$ é: $x=2$, $x'=-1$, $y=0$, $y'=1$.

Escola Naval — 1.º exame de frequência — 1939

381 — Um ponto move-se segundo uma recta com a seguinte lei dos espaços $s=t^3+3t+2$. Determine o instante em que a velocidade e a aceleração têm o mesmo valor e os valores médios da velocidade e da aceleração no intervalo $t=1$ a $t=3$.

382 — Um ponto percorre uma circunferência de 2 m de raio com a velocidade linear $v=4$ m/s. Determine o número de voltas por minuto e a aceleração centrípeta.

F. C. L. — 2.º Exame de frequência — 4-5-1939

383 — *Cinemática:* *a*) O que entende por movimento de roto-translacção; defina decomposição própria e imprópria. *b*) Enuncie o teorema de Coriolis e escreva a sua expressão definindo as diferentes acelerações. *c*) Defina os ângulos de Euler. *d*) Enuncie o teorema de Chasles (movimento de uma figura plana no seu plano).

384 — *Estática e Dinâmica:* *a*) Defina forças motoras e resistentes. *b*) Enuncie os teoremas gerais sobre o equilíbrio. *c*) Enuncie as condições gráficas necessárias para o equilíbrio dos polígonos funiculares. *d*) Escreva as equações de Euler relativas ao movimento do ponto material livre (equações intrínsecas).

385 — *Problemas:* *a*) Determine as coordenadas do centro de gravidade do sólido gerado pela área plana compreendida entre o eixo OY, a recta $y=p$ e a parábola $y^2=2px$, quando ela roda de 360° em torno de OY: R: $\xi=0$ $\eta=5p/6$ $\zeta=0$. *b*) Um ponto material de peso mg é obrigado a permanecer sobre uma circunferência situada num plano vertical. Determinar a força que deve atrair o ponto para a extremidade superior do diâmetro vertical, a-fim-de que ele esteja em equilíbrio num dos extremos do diâmetro horizontal. R: $F=\sqrt{2}\,mg$.

GEOMETRIA PROJECTIVA — GEOMETRIA SUPERIOR

F. C. L. — Geom. Projectiva — Exame de frequência — 1.ª Chamada — 8-2-1939.

386 — *a*) Razão dupla de 4 elementos de uma forma de 1.ª espécie; definição, propriedades, valores principais e suas relações. *b*) Feixes harmónicos; definições e suas propriedades. *c*) Coordenadas projectivas nas formas de 1.ª espécie; definição e transformação de coordenadas. *d*) Involução nas formas de 1.ª espécie; difinição. Ponto central e norma da involução; definições e sua determinação analítica. *e*) Geração projectiva das cónicas e propriedades que dela derivam.

387 — Dados dois raios a e b de um feixe de centro próprio, determine gràficamente o raio c tal que seja $(abc)=-3/2$. Justifique a construção empregada.

388 — Determine a equação da projectividade entre duas pontuais sobrepostas u e u' sendo conhecidas as abscissas 2 e 6 dos seus pontos limites I e J', respectivamente, e 3 e 5 as de dois pontos homólogos A e A', respectivamente, e calcule as abscissas dos seus pontos unidos. R: *A equação é* $xx'-6x-2x'+13=0$ *e as abscissas dos pontos unidos são* $4+\sqrt{3}$ *e* $4-\sqrt{3}$.

389 — Determine gràficamente os pontos de intersecção de uma recta dada r com uma cónica definida por cinco pontos A, B, C, D e E. Justifique a construção empregada.

F. C. L. — Geom. Projectiva — Exame de frequência — 2.ª Chamada — 10-2-1939.

390 — *a*) Razões simples de pontos e de raios; definições e sua relação. *b*) Pontuais harmónicas; definição e suas propriedades. *c*) Coordenadas projectivas homogéneas nas formas de 1.ª espécie; definição e significado geométrico. Coordenadas dos elementos fundamentais. *d*) Formas projectivas; definições e propriedades. *e*) Teorema de Desargues sobre as cónicas e seus casos limites.

391 — Sendo dados, sobre uma pontual, tres pontos A, B e C tais que $\overline{AB}+3\,\overline{BC}=0$, determine gràficamente o ponto D de modo que seja $(ABCD)=-1$. Justifique a construção empregada.

392 — Determine a equação da involução sobre uma pontual, sendo conhecidas as abscissas -9 do ponto central e $+1$ e -1 de dois pontos homólogos, e calcule as abscissas dos pontos unidos dessa involução. R: *A equação é:* $xx'+9(x+x')+1=0$ *e as abscissas dos pontos unidos são* $-9+\sqrt{80}$ *e* $-(9+\sqrt{80})$

393 — Definida uma cónica por cinco tangentes a, b, c, d e e determine gràficamente uma outra tangente à mesma cónica e o ponto de contacto da tangente b. Justifique a construção empregada.

F. C. C. — Geom. Superior — **Exame de frequência, Junho de 1939.**

394 — Supondo $a'_{ik}=\lambda a_{ik}$, com λ constante, exprimir a curvatura de $f'=a'_{ik}\,dx_i\,dx_k$ em função da curvatura de $f=a_{ik}\,dx_i\,dx_k$.

395 — Seja V_2 a variedade linear bidimensional construida sobre as direcções concorrentes ξ e η, e seja ζ uma direcção arbitrária de V_2. Provar que a relação sen $(\zeta\xi)=\cos(\zeta\eta)$ implica $\cos(\xi\eta)=0$.

F. C. L. — Geom. Sup. — **Exame de frequência — 1939**

396 — *a*) Invariantes e parâmetros diferenciais. Covariantes. Primeiro parâmetro diferencial e parâmetro diferencial mixto. *b*) Equivalência de duas formas diferenciais quadráticas. Definição. Condições de integrabilidade do sistema de equações de Christoffel. *c*) Métrica angular sobre uma superfície. Involução circular de elementos lineares. *d*) Sistemas de coordenadas curvilíneas isotérmicas; parâmetros isométricos.

397 — Determinar o parâmetro λ de modo que a forma $f=2xt+\lambda yz+x^2+y^2-2zt$ seja degenerada; para o valor positivo de λ formar uma sua cadeia de menores principais e concluir a partir dela quais os números característicos da forma.

398 — Dada a forma $\varphi=x^2\,dx\,dy-dz^2-xy\,dx\,dz+$ $+zdx^2-ydydz$ calcular o símbolo $\left\{ {1\,2 \atop 3} \right\}$.

Outros exercícios

399 — Determinar os parâmetros m, n, p de modo que a substituição $\begin{cases} X=mx+ny \\ Y=px+y/2 \end{cases}$ seja ortogonal. Indicar o número de soluções do problema e fazer a associação dos valores correspondentes.

400 — Transformar a forma $f=y^2\,dx^2+ydxdy-dy^2$ mediante a substituição $x=X+Y$, $y=e^{X-Y}$ e verificar a relação entre as funções A_{ik} e A'_{rs} para os valores $i=k=1$.

GEODESIA — ASTRONOMIA

F. C. L. — Geodesia — **Exame de frequência — 1938-39**

401 — *a*) Defina o geoide e a intensidade da gravidade num ponto. *b*) Indique a significação que se deve dar ao «comprimento de um fio de invar» indicado no certificado do construtor. Quais são, as correcções a fazer para atender à inclinação da recta que une os extremos do fio?

402 — *a*) Quais são as condições a que deve satisfazer um teodolito em estação para servir na medição dos ângulos azimutais? Como se determina o ângulo de inclinação do eixo dos munhões dum teodolito? *b*) Defina latitude, longitude e azimutes geodésicos. Como explica a necessidade de calcular os azimutes geodésicos dos lados dos triângulos de uma cadeia.

403 — O mesmo ângulo foi determinado por 20 medidas feitas com um instrumento e 25 feitas com outro, obtendo-se para valores compensados num e noutro caso 45,2375 gr e 45,2361 gr. Computando-se em 20″ e 30″ respectivamente os erros médios quadráticos duma medida isolada: *a*) fazer a compensação de todas as medidas; *b*) determinar o erro médio quadrático do valor compensado final.

404 — Para determinar o ângulo azimutal de duas direcções CA e CB adoptou-se a estação excêntrica E. As leituras azimutais feitas para A, C e B foram respectivamente 178° 43′ 22″, 148° 20′ 10″ e 115° 3′ 26″. Calcular o valor do ângulo ABC, fazendo a redução das direcções ao centro da estação, supondo: 1.° que a graduação do limbo cresce no sentido do movimento dos ponteiros dum relógio; 2.° que as distâncias horizontais CA e CB são respectivamente 20206,1 m e 14203,4 m; 3.° que a distância $CE=3{,}08$ m.

F. C. L. — Astronomia — **2.ª exame de freq. — 8-5-1939**

405 — *a*) Defina directriz e linha média de um nível. Diga o que entende por nível calado e por nível rectificado. *b*) Defina colimação de um instrumento de passagens colocado no meridiano. Que métodos conhece para a determinação de colimação? *c*) Quais as estrêlas mais convenientes para a determinação de azimute de um I. P. colocado no meridiano; justifique a resposta. *d*) Como se reduzem as observações feitas nos diferentes fios do retículo, de um I. P. colocado no meridiano, ao fio do meio? *e*) O que é paralaxe de um astro? Que espécies de paralaxe conhece?

f) Indique as principais diferenças entre os métodos de Gago Coutinho e de Talcott (determinação de latitude).

406 — *a*) Observaram-se duas estrêlas na sua passagem meridiana e determinaram-se os tempos $\theta = 15^h\,20^m\,24^s,80$ e $\theta_2 = 15^h\,30^m\,10^s,04$ das suas passagens na média dos fios. Pretende conhecer-se o azimute do I. P., supondo-se constante o êrro de nível e nulo o de colimação. A latitude do lugar de observação é $\varphi = 38^o\,43'\,0''$, e as coordenadas das estrêlas são

$$\begin{cases} \alpha_1 = 15^h\,18^m\,12^s,40 \\ \delta_1 = -5^o\,20'\,12'',00 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \alpha_2 = 15^h\,27^m\,54^s,40 \\ \delta_2 = 55^o\,10'\,25'',00 \end{cases}$$

R: $\alpha = 2^s,71$.

c) Supondo que $\theta = 15^h\,20^m\,14^s,80$ é o tempo sideral de Lisboa, determinar a hora legal nesse instante. A longitude de Lisboa é $\lambda = +0^h\,36^m\,44^s,68$.

R: $H_L = 0^h\,57^m\,8^s,27$.

COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA E DE GEOMETRIA ANALÍTICA

F. C. C. — Exame de frequência — Junho de 1939

407 — Achar a composição de

$$f(z) = (z - r_1)(z - r_2)\cdots(z - r_n)$$

e do seu grupo G de Galois na hipótese de existir uma função circulante para $r_1, r_2, \cdots, r_n$.

408 — Tendo-se $\psi(\beta) = 0$ e $\beta = \chi(\alpha)$ com ψ e χ no corpo C, toda a equação que α verifique neste corpo é de grau pelo menos igual ao grau de ψ. (Supõe-se ψ irredutível).

F. C. L. — Exame de frequência — Junho de 1939

409 — Defina: 1) Substituição linear ortogonal e enuncie as principais propriedades das substituições deste tipo. 2) Polos duma substituição linear. 3) Matriz de Hermite. Propriedades. 4) Covariante e invariante duma forma algébrica. Exemplos. 5) Índice dum sub-grupo num grupo dado de substituições. 6) Isomorfismo holoédrico e meriédrico entre dois grupos de substituições.

410 — Mostre que o conjunto das quatro matrizes

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

forma um grupo, adoptando como lei de composição o produto de matrizes.

411 — Determine a equação da hipérbole que tem por assíntotas as rectas de equações $y - x - 1 = 0$ e $x = 0$ e passa pelo ponto $P(-2,0)$.

Outros exercícios

412 — Determine a equação da hipérbole equilátera que passa pela origem, tem por assíntota a recta $x/2 + y/6 = 1$ e por centro o ponto de abcissa 1. Determine em seguida, por aplicação dos invariantes, a equação da curva referida às assíntotas.

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C. L. — 1.º exame de frequência — 8-2-1939

413 — *a*) No problema das provas repetidas como define desvio médio quadrático do número de vezes que o acontecimento se realiza em n provas? Como define desvio provável e desvio médio absoluto? Indique algumas relações entre estes desvios. *b*) Quais são as expressões exactas da probabilidade de que o acontecimento se realize n vezes e de que o desvio tenha o valor 1?

414 — *a*) Defina curvas de probabilidade e indique as suas principais propriedades. *b*) Enuncie os teoremas de Tchebycheff e de Bernoulli.

415 — Calcule a probabilidade de obter duas vezes e só duas vezes, a sena, quando se lançam sobre uma mesa 4 dados. Descreva o raciocínio que fez. R: *Probabilidades de obter a sena em dois dados prèviamente fixados, e só neles:* $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot$ *Probabilidade pedida:* $\binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216}$.

416 — Qual é o número de vezes que se deve lançar uma moeda ao ar para que seja $1/2$ a probabilidade de aparecer um desvio relativo em valor absoluto menor que $0{,}02$? Descreva o raciocínio que fêz.

F. C. L. — 2.ª exame de frequência — 2-6-1939

417 — *a*) Conceito de probabilidade elementar e sua importância nos problemas de probabilidades contínuas. Princípio da invariância por deslocamento. *b*) Enuncie o problema das probabilidades das causas. Teorema de Bayes.

418 — *c*) Enuncie o problema da compensação de observações indirectas de precisão diferente e indique a forma de o resolver. *d*) Enuncie os postulados de Gauss.

419 — Os 3 ângulos dum triângulo plano $A\ B\ C$ foram medidos, obtendo-se os seguintes resultados: $\hat{A}=62^\circ\,27'\,32''$ (pêso 2); $\hat{B}=56^\circ\,16'\,52''$ (peso 1); $\hat{C}=61^\circ\,15'\,44''$ (peso 2). Calcule, pelo método geral de compensação das observações condicionadas, os valores compensados dos ângulos. R: $\hat{A}=62^\circ\,27'\,30''$, $\hat{B}=56^\circ\,16'\,48''$, $\hat{C}=61^\circ\,15'\,42''$.

Outro exercício

420 — Com 3 baralhos completos de 52 cartas formam-se 3 grupos de cartas nas seguintes condições: 1.º) Com 40 cartas (tirando dum baralho completo os 8, 8 9, 9 e 10, 10). 2.º) Com as figuras dum baralho (ás, dama, valete e rei). 3.º) Um baralho completo de 52 cartas.

Escolhendo ao acaso um destes grupos tira-se uma carta, que depois se reconheceu ser o rei de espadas.

¿Qual é a probabilidade da carta pertencer ao 1.º grupo? E se a carta aparecida fosse o 10 de espadas ¿qual será a probabilidade de pertencer ao 1.º grupo?

PROBLEMAS

PROBLEMAS PROPOSTOS E SOLUÇÕES RECEBIDAS EM 1940

421 — Um sólido é limitado por duas bases nos planos horizontais $z=h/2$ e $z=-h/2$ e por uma superfície tal que a área de cada secção dum plano horizontal é dada por uma expressão da forma: $a_0 z^3+a_1 z^2+ + a_2 z+a_3$ (onde, como casos especiais, alguns dos coeficientes podem ser nulos). Mostrar que o volume do sólido é dado pela fórmula $V=[B_1+B_2+4M]\,h/6$ onde B_1 e B_2 são as áreas das bases e M é a área da secção média horizontal. Mostrar que as fórmulas para o volume dum cone e duma esfera podem ser incluídas nesta fórmula, no caso em que $a_0=0$.

R: *Considerando o sólido dividido em cilindros elementares, de base*

(1) $$a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$$

e altura dz, *teremos*

(2) $$V=\int_{-h/2}^{+h/2}(a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3)\,dz = \frac{a_1}{12}h^3+a_3 h.$$

Por outro lado

$$\begin{cases} B_1 = a_0\,(-h/2)^3 + a_1\,(-h/2)^2 + a_2\,(-h/2) + a_3 \\ B_2 = a_0\,(h/2)^3 + a_1\,(h/2)^2 + a_2\,h/2 + a_3 \\ M = a_3 \end{cases}$$

logo

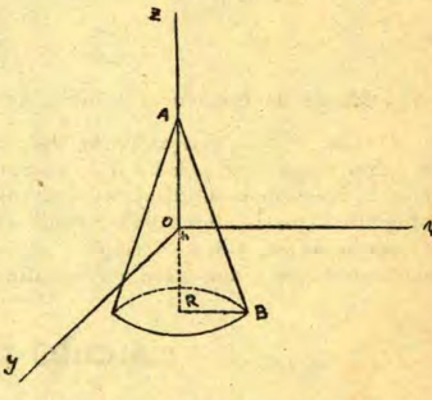
(3) $$V = h\,[B_1+B_2+4M]/6 = a_1 h^3/12 + a_3 h$$

Como vemos as expressões (2) *e* (3) *são idênticas como se queria demonstrar.*

Cone: *Vejamos que aspecto toma* (1) *neste caso particular. A equação da recta geratriz* $\overline{AB}$, *situada no plano dos* xz *é* $z=-hx/R+h/2$. *Para termos a equação da superfície cónica de revolução em torno do eixo dos* zz *basta mudar* x *em* $\sqrt{x^2+y^2}$ *e portanto*

$$z=-h\sqrt{x^2+y^2}/R+h/2$$

donde $$x^2+y^2=\frac{R^2z^2}{h^2}-\frac{R^2z}{h}+\frac{R^2}{4}.$$



A área de qualquer secção dum plano horizontal é

(1') $$\frac{\pi R^2}{h^2}z^2-\frac{\pi R^2}{h}z+\frac{\pi R^2}{4}$$

pois x^2+y^2 *é o raio de cada uma dessas secções; vê-se que não há termo em* z^3, *isto é,* $a_0=0$. *Então*

$$V_{cone}=\frac{1}{6}h\left[\pi R^2+0+4\frac{\pi R^2}{4}\right]=\frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Esfera: *A sua equação, em relação a 3 eixos ortogonais de origem no centro da esfera, é* $x^2+y^2=-z^2+R^2$. *Logo aqui a expressão* (1) *toma o aspecto*

(1'') $$-\pi z^2+\pi R^2.$$

Também aqui não há termo em z^3, *quere dizer,* $a_0=0$; *mas além dêste coeficiente é ainda nulo* a_2. *Então*

$$V_{esf.}=2R\,[0+0+4\pi R^2]/6=4\pi R^3/3.$$

Solução de José H. Arandes.