418 — *c*) Enuncie o problema da compensação de observações indirectas de precisão diferente e indique a forma de o resolver. *d*) Enuncie os postulados de Gauss.

419 — Os 3 ângulos dum triângulo plano $A\ B\ C$ foram medidos, obtendo-se os seguintes resultados: $\widehat{A}=62°\,27'\,32''$ (pêso 2); $\widehat{B}=56°\,16'\,52''$ (peso 1); $\widehat{C}=61°\,15'\,44''$ (peso 2). Calcule, pelo método geral de compensação das observações condicionadas, os valores compensados dos ângulos. R: $\widehat{A}=62°\,27'\,30''$, $\widehat{B}=56°\,16'\,48''$, $\widehat{C}=61°\,15'\,42''$.

Outro exercício

420 — Com 3 baralhos completos de 52 cartas formam-se 3 grupos de cartas nas seguintes condições: 1.°) Com 40 cartas (tirando dum baralho completo os 8, 8 9, 9 e 10, 10). 2.°) Com as figuras dum baralho (ás, dama, valete e rei). 3.°) Um baralho completo de 52 cartas.

Escolhendo ao acaso um destes grupos tira-se uma carta, que depois se reconheceu ser o rei de espadas.

¿Qual é a probabilidade da carta pertencer ao 1.° grupo? E se a carta aparecida fosse o 10 de espadas ¿qual será a probabilidade de pertencer ao 1.° grupo?

PROBLEMAS

PROBLEMAS PROPOSTOS E SOLUÇÕES RECEBIDAS EM 1940

421 — Um sólido é limitado por duas bases nos planos horizontais $z=h/2$ e $z=-h/2$ e por uma superfície tal que a área de cada secção dum plano horizontal é dada por uma expressão da forma: $a_0 z^3+a_1 z^2+ +a_2 z+a_3$ (onde, como casos especiais, alguns dos coeficientes podem ser nulos). Mostrar que o volume do sólido é dado pela fórmula $V=[B_1+B_2+4M]\,h/6$ onde B_1 e B_2 são as áreas das bases e M é a área da secção média horizontal. Mostrar que as fórmulas para o volume dum cone e duma esfera podem ser incluídas nesta fórmula, no caso em que $a_0=0$.

R: *Considerando o sólido dividido em cilindros elementares, de base*

(1) $$a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$$

e altura dz, *teremos*

(2) $$V=\int_{-h/2}^{+h/2}(a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3)\,dz = \frac{a_1}{12}h^3+a_3 h.$$

Por outro lado

$$\begin{cases} B_1 = a_0(-h/2)^3+a_1(-h/2)^2+a_2(-h/2)+a_3 \\ B_2 = a_0(h/2)^3+a_1(h/2)^2+a_2 h/2+a_3 \\ M = a_3 \end{cases}$$

logo

(3) $$V=h\,[B_1+B_2+4M]/6 = a_1 h^3/12 + a_3 h$$

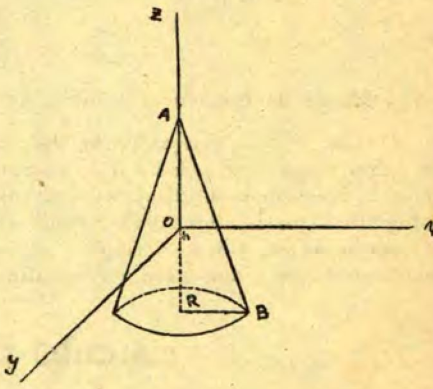
Como vemos as expressões (2) *e* (3) *são idênticas como se queria demonstrar.*

Cone: *Vejamos que aspecto toma* (1) *neste caso particular. A equação da recta geratriz* $\overline{AB}$, *situada no plano dos* xz *é* $z=-hx/R+h/2$. *Para termos a equação da superfície cónica de revolução em torno do eixo dos* zz *basta mudar* x *em* $\sqrt{x^2+y^2}$ *e portanto*

$$z=-h\sqrt{x^2+y^2}/R+h/2$$

donde

$$x^2+y^2=\frac{R^2z^2}{h^2}-\frac{R^2z}{h}+\frac{R^2}{4}.$$



A área de qualquer secção dum plano horizontal é

(1') $$\frac{\pi R^2}{h^2}z^2-\frac{\pi R^2}{h}z+\frac{\pi R^2}{4}$$

pois x^2+y^2 *é o raio de cada uma dessas secções; vê-se que não há termo em* z^3, *isto é,* $a_0=0$. *Então*

$$V_{cone}=\frac{1}{6}h\left[\pi R^2+0+4\frac{\pi R^2}{4}\right]=\frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Esfera: *A sua equação, em relação a 3 eixos ortogonais de origem no centro da esfera, é* $x^2+y^2=-z^2+R^2$. *Logo aqui a expressão* (1) *toma o aspecto*

(1'') $$-\pi z^2+\pi R^2.$$

Também aqui não há termo em z^3, *quere dizer,* $a_0=0$; *mas além dêste coeficiente é ainda nulo* a_2. *Então*

$$V_{esf.}=2R\,[0+0+4\pi R^2]/6=4\pi R^3/3.$$

Solução de José H. Arandes.

422 — Calcular

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{e^n}$. *b)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x (1+\operatorname{sen} 2t)^{1/t}\, dt$.

R: a) *Para determinar o* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{e^n}$, *onde* n *é a variável inteira, notemos que será* $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *onde* x *é a variável contínua, se existir* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. *Então, teremos aplicando duas vezes a regra de l'Hôpital,* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 2 \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} = 2 \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ *e portanto* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{e^n} = 0$. b) *Aplicando a regra de l'Hôpital e supondo que o limite é* A,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1+\operatorname{sen} 2t)^{1/t}\, dt = \lim_{x\to 0} (1+\operatorname{sen} 2x)^{1/x} = A.$$

Determinemos A: *Sabe-se que*

$$\log A = \lim_{x\to 0} 1/x \cdot \log(1+\operatorname{sen} 2x)$$

e, aplicando a regra de l'Hôpital, vem

$$\log A = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{1+\operatorname{sen} 2x} = 2$$

logo será $A = e^2$.

Solução de Augusto Sá da Costa.

423 — Fazer o traçado da curva de equação

$$y = -m\left[\sqrt[3]{a \pm \sqrt{a^2-x^2}} - \sqrt[3]{a}\right]^4, \quad m > 0,\ a > 0.$$

424 — Determinar $2n+1$ números inteiros consecutivos tais que a soma dos quadrados dos primeiros $n+1$ seja igual à soma dos quadrados dos n restantes.

R: *Seja* p *o número médio, dos* $2n+1$ *números que satisfazem às condições do enunciado. Será:*

$$(p-n)^2 + \cdots + (p-1)^2 + p^2 = (p+1)^2 + \cdots + (p+n)^2$$

ou

$$(n+1)\,p^2 + (1+2^2+\cdots+n^2) - 2p\,(1+2+\cdots+n) =$$
$$= np^2 + (1+2^2+\cdots+n^2) + 2p\,(1+2+\cdots+n)$$

donde $p^2 = 2pn\,(n+1)$ *e o problema tem duas soluções:*

I) $-n, \cdots, 0, \cdots, n$

II) $2n^2+n, \cdots, 2n^2+2n, \cdots, 2n^2+3n$.

Para $n=1$ II) *dá-nos as medidas dos lados do triângulo de ouro; para* $n=2$ *é-se conduzido ao primeiro problema sob a epígrafe* Curiosidades (vidé *Gazeta de Matemática,* Vol. I, 2.ª ed., pág. 11).

425 — Mostrar que a primitiva de $\dfrac{(x-a)\,(x-b)}{(x-c)^2\,(x-d)^2}$ se reduz a uma função racional quando se verifica a relação harmónica $2\,(ab+cd) = (a+b)\,(c+d)$.

R: *Pela aplicação do método de Fubini virá:*

$$\int \frac{(x-a)\,(x-b)}{(x-c)^2\,(x-d)^2}\,dx = M\log(x-c) + N\log(x-d) + \frac{Ox+P}{(x-c)\,(x-d)}$$

em que M, N, O, P *são constantes a determinar.*

Para que a primitiva se reduza a uma função racional, terá que ser necessàriamente $M=N=0$, *logo:*

$$\int \frac{(x-a)\,(x-b)}{(x-c)^2\,(x+d)^2}\,dx = \frac{Ox+P}{(x-c)\,(x-d)}.$$

Derivando esta igualdade vem:

$$\frac{(x-a)\,(x-b)}{(x-c)^2\,(x-d)^2} = \frac{O\,(x-c)\,(x-d) - (Ox+P)\,(2x-c-d)}{(x-c)^2\,(x-d)^2}$$

donde

$$(x-a)\,(x-b) = O\,(x-c)\,(x-d) - (Ox+P)\,(2x-c-d)$$
$$x^2 - (a+b)\,x + ab = -Ox^2 - 2Px + Ocd + P\,(c+d).$$

Identificando:

$$O = -1,\ -(a+b) = -2P,\ ab = Ocd + P\,(c+d),$$

e eliminando O *e* P *vem:*

$$ab = -cd + \frac{(a+b)\,(c+d)}{2} \quad \text{ou} \quad 2\,(ab+cd) = (a+b)\,(c+d),$$

Solução de Orlando Morbey Rodrigues.

426 — Determinar um conjunto ordenado de cinco algarismos e uma base de numeração tais que o número representado por esse conjunto nessa base seja duplo do número representado pelo mesmo conjunto na base dez.

R: *Seja* abcde *o conjunto pedido. Em qualquer base* (abcde) = (a0000) + (bcde) *e* (a0000) > (bcde); *portanto, se for* (a0000) = N, *será* (bcde) = θN *e* $0 \le \theta < 1$ *em que* θ *é função não crescente da base considerada, para cada sistema* abcde. *Seja* k *a razão dos valores do número* (a0000) *na base* x *considerada e na base* 10. *Se for* $M = a \cdot 10^4$ *teremos*

$$\begin{aligned}(abcde)_{10} &= M\,(1+\theta)\\ (abcde)_x &= kM\,(1+\theta')\end{aligned} \qquad 0 \le \theta' \le \theta < 1.$$

A equação $(abcde)_x = 2\,(abcde)_{10}$ *escreve-se* $kM\,(1+\theta') = 2M\,(1+\theta)$ *ou* $k = \dfrac{2\,(1+\theta)}{1+\theta'}$. *Vê-se imediatamente que terá de ser* $2 < k < 4$. Ora $k = (x/10)^4 = x^4/1000$.

Temos $11^4 = 14641 < 20000$, $12^4 = 20736$, $13^4 = 28561$, $14^4 = 38416$, $15^4 = 50625 > 40000$.

As únicas bases possíveis são pois $x = 12, 13, 14$.

O problema consiste em resolver em números inteiros positivos e menores que 10 *as equações* $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dc + c = 2\,(a10^4 + b10^3 + c10^4 + d10 + e)$ *em que* x *tome os valores* 12, 13, 14 *e* a, b, c, d, e *são as incógnitas.*

Para $x = 12$ *a equação toma a forma* $736a - 272b - 56c - 8d - e = 0$.

Parametrando, a solução geral pode escrever-se:

$a = u + v + 7w - t$, $b = t$, $c = 13u + 13v + 92w - 18t$, $d = v$, $e = 8u$.

A discusão das soluções desta equação forneceria todas as soluções do problema dado, para x=12. *Anàlogamente se obteriam as soluções para* x=13, x=14.

Por exemplo, para u=0, v=2, t=1, w=0 *temos a solução* $(11820)_{12}=2\,.\,(11820)_{10}$.

Solução do Mário de Alenquer.

427 — Sendo z o número complexo $z=x+iy$ representado pelo ponto $M(x,y)$, referido a eixos rectangulares, achar o lugar geométrico de M quando o argumento de z^2-1 é constante, e o lugar geométrico de M quando o módulo de z^2-1 é constante.

428 — Por dois pontos A, B duma hipérbole, traçam-se paralelas às assíntotas. Provar:

1.º) Que uma das diagonais do paralelogramo assim formado passa pelo centro da curva; 2.º) Que metade dessa diagonal é meia proporcional entre as distâncias do centro do paralelogramo ao centro da curva e ao ponto em que ela encontra a tangente em A; 3.º) Que esta mesma diagonal é meia proporcional entre as distâncias do centro do paralelogramo aos pontos em que a segunda diagonal corta a curva.

429 — Demonstrar a identidade:

$$^{n}C_{r}+2\,^{n}C_{r-1}+{}^{n}C_{r-2}={}^{n+2}C_{r}\,.$$

Solução deste problema publicada em *Gazeta de Matemática* n.º 8 (Outubro de 1941).

430 — Se num triângulo $B=10^{\circ}$ e $C=36^{\circ}$ então é $a-b=R$ sendo R o raio do círculo circunscrito ao triângulo.

Solução deste problema publicada em *Gazeta de Matemática* n.º 8 (Outubro de 1941).

431 — *a*) Determinar o coeficiente-função (escalar) $\mu(x)$ do vector x de um espaço E_n por maneira que a transformação $x'=Tx=x+\mu(x)\cdot a$ seja (separadamente) ortogonal, hermítica, unitária, de projecção. *b*) Estudar igualmente o caso em que T se reduz a uma simetria. Qual é o hiperplano da simetria? O vector a pode ser qualquer? *c*) Indicar em todos os casos as constantes e os vectores fundamentais de T.

Indicação: partir do produto interno (x,y) de dois vectores de E_n. *Nota:* O caso da simetria encontra-se em *Leçons sur la théorie des Spineurs*, E. Cartan, pág. 12, 13.

Problema proposto por Ruy Luís Gomes.

Soluções deste problema publicadas em *Gazeta de Matemática* n.º 6 (Abril de 1941).

432 — Mostre que, de todos os rectângulos que podem inscrever-se numa elipse, tem a área máxima o que tem por lados as diagonais dos quadrados construídos sobre os semi-eixos da elipse.

Solução deste problema publicada em *Gazeta de Matemática* n.º 5 (Janeiro de 1941).

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

CARAÇA, Bento — **Lições de Álgebra e Análise.** Vol. II, fasc. 1.º.

O professor Bento de Jesus Caraça, do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, acaba de publicar o volume II das suas «Lições de Álgebra e Análise», valioso instrumento de trabalho para os alunos das nossas Escolas Superiores e belo exemplo de dedicação e interêsse pelo ensino. É um exemplo tanto mais para salientar quanto é certo que, no nosso país, raros são os professores universitários que conseguem estender a sua actividade docente para além das suas obrigações imediatas, quero dizer, o serviço de aulas e exames.

Não podemos deixar de lamentar que assim tenha de ser, pois a publicação dos respectivos cursos e uma certa actividade no domínio da investigação científica, são elementos essenciais de *personalidade moral e científica de um professor.*

Relativamente ao primeiro aspecto, isto é, à personalidade moral do professor, a publicação das suas lições tem mesmo um significado de particular valor. Na verdade, o professor que se apresenta assim à crítica com os seus cursos, assume imediatamente a responsabilidade da forma por que orienta o ensino, nada portanto nos escondendo, desde as suas qualidades até aos seus defeitos o que tem um valor educativo de primeira importância.

Quanto ao segundo aspecto — a personalidade científica do professor — o vol. II de Bento Caraça contém apenas assuntos de Análise — é evidente que êle se define precisamente na medida em que o professor se *afirma* igualmente como investigador.

Ao encarar agora pròpriamente a orientação que deve presidir a um livro de curso, nomeadamente de Álgebra e Análise — estou a lembrar-me do que escreveu, já em 1893 a êste respeito, o grande matemático F. Klein.

«Le professeur est arrêté par la difficulté d'établir l'harmonie entre deux nécessités opposées et presque contradictoires. D'une part, il lui faut tenir compte