2.º ANO - N.º 5

GAZETA DE MATEMÁTICA

JANEIRO DE 1941

Redacção e Administração: Faculdade de Ciências — Rua da Escola Politécnica — Lisboa

EDITOR: JOSÉ DUARTE DA SILVA PAULO

Composto e impresso na Soc. Industrial de Tipografia, Limitada R. Almirante Pessanha, 3 e 5 - Lisboa

AO LEITOR

Tôdas as publicações que desempenham uma função útil estão sujeitas a evoluir — a própria natureza da sua função o impõe.

Uma publicação é lançada com um determinado objectivo que procura realizar de certa maneira, dirigindo-se a um certo público. Ao fim de alguns números, as reacções do público, os seus desejos, o agrupamento dos seus leitores em sectores determinados, indicam claramente se a publicação tem condições de vida e, nesse caso, em que sentido deve orientar-se para bem servir o seu público.

A «Gazeta de Matemática» possui já a experiência necessária à sua orientação definitiva e vem portanto no seu 5.º número, dar conta dos resultados dessa experiência:

1.º A «Gazeta de Matemática» tem condições de vida, e verifica-se que ela correspondeu a uma necessidade da nossa população académica.

2.º A «Gazeta» deve fazer incidir a sua acção, em especial, sôbre a preparação para a aptidão às Escolas Superiores e sôbre os primeiros anos dessas Escolas. É aí que a experiência mostrou residir principalmente o público que dela necessita.

3.º Em conseqüência desta verificação, a «Gazeta» vai, não dizemos mudar a orientação, mas rectificá-la e afirmá-la melhor no seu sector principal de acção.

Como? Dedicando, ao ensino das cadeiras gerais das Escolas Superiores — Álgebra, Cálculo Infinitesimal, Mecânica Racional — uma actividade maior do que a simples publicação e resolução de pontos. Vai passar a dar indicações mais gerais, mais completas, porventura mais úteis. A partir do próximo número, vai publicar exposições sistemáticas da prática referente a capítulos das cadeiras referidas. Quantas vezes o estudante se sente embaraçado pela falta de um bom guia que o ajude na resolução de problemas — o estudo duma curva, a realização dum cálculo numérico, etc. A «Gazeta» vai procurar suprir essa deficiência; daqui por diante publicará, em cada número, um guia prático dum problema geral.

O mesmo vai procurar fazer-se no que diz respeito às preparações para admissão às Escolas. Cada número ficará constituído por uma parte, digamos, transitória — os pontos saídos nos períodos imediatamente anteriores — e uma parte permanente que, acumulada, número a número, formará ao fim de algum tempo um instrumento — guia de trabalho precioso.

A «Gazeta» julga, dêste modo, orientar o seu esfôrço naquêle sentido em que a prática indica que êle pode ser mais útil; os nossos leitores dirão se acertamos.

B. C.

A LÓGICA MATEMÁTICA E O ENSINO MÉDIO

As convenções e os métodos da Lógica matemática têm-se imposto gradualmente, como valiosos instrumentos de análise das idéias, a despeito das fortes reacções que de início se opuzeram à sua introdução no domínio da Ciência [1]. Pareceu-nos, em particular, que, para uma clara e perfeita compreensão da parte do programa de matemática do 3.º ciclo dos liceus, que se refere aos métodos da Geometria, muito haveria a lucrar com o emprêgo judicioso de alguns elementos de Lógica matemática, ministrados prèviamente ao aluno, numa extensão do programa que, sem o sobrecarregar em excesso, teria a compensadora vantagem de o favorecer em grande parte do seu trabalho, contribuindo apreciàvelmente para o desenvolvimento das suas faculdades de análise. No esbôço que, em seguida, apresentamos, fomos àlém do que seria necessário para uma simples aprendizagem dos métodos da Geometria: a idéia que nos orientou foi a de mostrar, ainda que modestamente, até que ponto chegam, tanto neste como em outros domínios de aplicação, as possibilidades didácticas da Lógica matemática. Assim, ver-se-á que também o estudo da Aritmética racional e o das inequações podem ser nitidamente beneficiados com esta orientação.

1 — Considerando as três proposições seguintes:

α — X é um triângulo;
β — O Sol é uma estrêla;
γ — Todos os múltiplos de 3 são pares;

vê-se imediatamente que, enquanto a primeira é falsa ou verdadeira conforme a figura geométrica a que X, na realidade, se refere, a segunda é *incondicionalmente* verdadeira e a última, *incondicionalmente* falsa. A veracidade da proposição α é, pois, *condicionada* pela natureza de X, por isso que será verdadeira para umas *determinações,* e falsa para outras *determinações,* daquela variável [2]: diremos então que α é uma proposição *condicional* em X (ou, simplesmente, uma

[1] Estas reacções foram devidas, em grande parte, a alguns exagêros reprováveis dos logísticos. É inteiramente justa a ironia de H. Poincaré, ao comentar as célebres definições do número 1, dadas em símbolos do sistema de Peano.

[2] Pressupõe-se, é claro, que X satisfaz a uma condição prévia, neste caso expressa pela proposição «X é uma figura geométrica». Frases, como «A alma é um triângulo», em que não se atende a êste preceito, são — não pròpriamente falsas, porque não se chega a pôr aqui o problema do «verdadeiro ou falso» — mas antes vazias de sentido.

condição), e para o pôr em evidência podemos escrever $\alpha(X)$, em vez de α. Por outro lado, as proposições tais como β e γ dir-se-ão *categóricas*, por isso que a sua veracidade não depende de circunstância alguma: ou bem são verdadeiras, e são-no então em qualquer caso, ou bem são falsas, e não há possibilidade de as tornar verdadeiras. Se lembrarmos que tôda a igualdade entre expressões algébricas encerra, na verdade, uma proposição, apenas formulada em linguagem diferente da usual, encontraremos, logo, exemplos de proposições categóricas verdadeiras, nas identidades; de proposições categóricas falsas, nas igualdades impossíveis, e de proposições condicionais, nas equações. Exemplos análogos nos fornecem as inidentidades, as desigualdades impossíveis e as inequações.

Podem ainda, naturalmente, apresentar-se proposições condicionais em mais de uma variável, como por exemplo a seguinte «X, Y e Z são três rectas que se intersectam no ponto U», que é, como se vê, condicional em X, Y, Z e U; mas tudo o que dissermos para as proposições condicionais em uma só variável fàcilmente se generaliza a todas as outras proposições; além de que, como é evidente, um sistema qualquer de variáveis, $X, Y, Z, \cdots$, pode sempre, mediante um acto mental simples, considerar-se como uma variável única, de categoria diferente, $W=(X, Y, Z, \cdots)$.

2 — Dadas as duas proposições:

α — X é um múltiplo de 6;
β — X é um múltiplo de 3;

nota-se que, sempre que a primeira é verdadeira, a segunda também o é, ou o que vem a dar o mesmo, que, sempre que esta é falsa, aquela é falsa também; de modo que podíamos escrever: «Se X é um múltiplo de 6, X será também um múltiplo de 3» ou «X é divisível por 6, logo é divisível por 3». Diremos então que α ***implica*** β, ou que β é ***conseqüência*** de α, ou que β ***resulta*** de α (tôdas estas expressões são equivalentes), e escreveremos, simbòlicamente, $\alpha \rightarrow \beta$.

É fácil ver que, dadas três proposições α_1, α_2 e α_3, se $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ e $\alpha_2 \rightarrow \alpha_3$, então $\alpha_1 \rightarrow \alpha_3$; o que se exprime dizendo que a ***implicação lógica*** goza da propriedade transitiva. Por exemplo: a proposição «X é um quadrado» implica a proposição «X é um rectângulo», a qual por sua vez implica a proposição «X é um paralelogramo», donde resulta que a primeira implica a terceira.

Convém notar que as proposições categóricas se comportam como proposições condicionais, quando ainda se ignora, ou se supõe ignorar, se elas são afinal verdadeiras ou falsas. Assim, antes de averiguar se qualquer das proposições «153 é múltiplo de 6» e «153 é múltiplo de 3» é ou não verdadeira, já se pode assegurar que a segunda é verdadeira, se a primeira o fôr, e que esta será falsa, se a segunda fôr por sua vez falsa; isto é, podemos dizer, como para as proposições condicionais, que a primeira implica a segunda. Observações análogas se devem aplicar a tudo o que dissermos em seguida.

3 — Os exemplos anteriores bastam para mostrar que, dadas duas proposições α_1 e α_2, se $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$, não se deve daí concluir, sem mais, que também $\alpha_2 \rightarrow \alpha_1$; isto é, a implicação lógica não goza da propriedade simétrica, embora goze da propriedade reflexiva (qualquer proposição se implica a si mesmo). Pode no entanto acontecer que se tenha, ao mesmo tempo, $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ e $\alpha_2 \rightarrow \alpha_1$: dir-se-á então que as proposições α_1 e α_2 são equivalentes, e escrever-se-á $\alpha_1 \equiv \alpha_2$.

Exemplos: as proposições «X é um triângulo equilátero» e «X é um triângulo equiângulo» são equivalentes; do mesmo modo são equivalentes as proposições «x é um número compreendido entre 3 e 4» e «x verifica a desigualdade $x^2-7x+12<0$». Outros exemplos:

I — (n é divisível por 3, por 4 e por 5)$\equiv$(n é divisível por 60)

II — $(-6<2x<3) \equiv \left(-3<x<\dfrac{3}{2}\right)$

III — (X é um ser vivo)$\equiv$(X é um animal ou uma planta).

Quando uma prop. α implica uma prop. β, também se diz que α é ***condição suficiente*** para que se verifique β, ou que β é ***condição necessária*** para que se verifique α; e ainda se costuma dizer que β é uma condição ***mais restritiva ou mais forte*** do que α, ou que α é uma condição ***menos restritiva ou mais fraca*** do que β. Se $\alpha \equiv \beta$, é também usual dizer que α (ou β) é condição ***necessária*** e ***suficiente*** para que se verifique β (ou α). Esta terminologia é muito conhecida.

A ***equivalência lógica*** goza evidentemente das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

É também manifesto que tôdas as proposições categóricas, *reconhecidas* como verdadeiras, são entre si equivalentes, o que levou a representá-las, indistintamente, pelo símbolo 1. Anàlogamente, as proposições absolutamente falsas são equivalentes entre si, e recebem, por isso, a representação comum 0. Pôsto isto, eu direi que toda a prop. α implica a prop. 1, baseando-me na seguinte consideração: sempre que α é verdadeira, a prop. 1 também o é, por isso que é ***sempre*** verdadeira. Do mesmo modo direi que 0 implica qualquer prop. α: com efeito, sempre que α é falsa, a prop. 0 também o é, por isso que é ***sempre*** falsa. Assim, qualquer que seja a prop. α, ter-se-á: $0 \rightarrow \alpha \rightarrow 1$.

4 — Sejam agora as proposições:

α — X é divisível por 5;
β — X é divisível por 3;
γ — X é divisível por 15.

É fácil reconhecer que, sempre que as proposições α e β se verificam simultâneamente, e só então, a última é verdadeira. Portanto, afirmar ***simultâneamente*** α e β equivale à simples afirmação de γ. Diremos, nêste caso, que a proposição γ equivale ao ***produto lógico*** das proposições α e β, e escreveremos $\gamma \equiv \alpha . \beta$. Dêste modo, o sinal . substitui a conjunção copulativa ***e***. Outros exemplos:

I — (X é um losango).(X é um rectângulo)$\equiv$(X é um quadrado);

II — $(-3<x<4).(1<x<7) \equiv (1<x<4)$;

III — $(12 = \dot{n}).(18 = \dot{n}) \equiv (6 = \dot{n})$.

Como fàcilmente se pode verificar, a ***multiplicação lógica*** goza das propriedades comutativa e associativa. Além disso, tem-se, qualquer que seja α: $\alpha.1 \equiv \alpha$, $\alpha.0 \equiv 0$. Por outro lado, se $\alpha \rightarrow \beta$, $\alpha\beta \equiv \alpha$, e, reciprocamente, se $\alpha\beta \equiv \alpha$, $\alpha \rightarrow \beta$; em particular $\alpha.\alpha \equiv \alpha$.

Consideremos ainda as proposições formuladas em seguida:

α — X divide 4;
β — X divide 6;
γ — X é um divisor de 12, menor que 10.

Vê-se fàcilmente que a última é verdadeira, quando, e só quando, uma, pelo menos, das primeiras se verifica. Dêste modo, afirmar γ equivale a dizer que *uma, pelo menos*, das proposições α e β é verdadeira. Diz-se então que a proposição γ é a *soma lógica* das proposições α e β, e escreve-se $\gamma \equiv \alpha+\beta$, onde o sinal $+$ substitue a conjunção disjuntiva *ou*. Outro exemplo: (X é um número inteiro)+(X é um número fraccionário) $\equiv$ (X é um número racional).

A *adição lógica* goza das propriedades comutativa e associativa, e ainda das seguintes: 1) $\alpha+0\equiv\alpha$; 2) $\alpha+1\equiv 1$, qualquer que seja a proposição α; 3) $\alpha+\beta\equiv\beta$ é equivalente a $\alpha\rightarrow\beta$, (donde, em particular, $\alpha+\alpha\equiv\alpha$).

Pode ainda verificar-se, *o que é muito importante*, que, não só a multiplicação lógica é distributiva em relação à adição lógica, como esta é distributiva em relação àquela; isto é, quaisquer que sejam as proposições α, β, γ, tem-se: $\alpha.(\beta+\gamma)\equiv$ $\equiv\alpha.\beta+\alpha.\gamma$ e $\alpha+\beta.\gamma\equiv(\alpha+\beta).(\alpha+\gamma)$.

Muito fàcilmente se definem somas e produtos lógicos, com mais de dois dados, o que deixamos ao cuidado do leitor.

5 — Considerando agora as proposições

α — O número inteiro X é par;

β — O número inteiro X é ímpar;

vê-se que não podem tais proposições ser simultâneamente verdadeiras, nem simultâneamente falsas; isto é, se uma é verdadeira, a outra é necessàriamente falsa, e se uma é falsa, a outra é necessàriamente verdadeira. Diremos então que estas proposições são *contraditórias*, ou que uma *nega* a outra, e escreveremos: $\beta\equiv\alpha'$ ou $\alpha\equiv\beta'$ [1]. Outros exemplos:

I — $(x>5)\equiv(x\leq 5)'$;

II — (Todos os múltiplos de 6 são múltiplos de 3) $\equiv$ (Alguns múltiplos de 6 não são múltiplos de 3)$'$.

Dada uma proposição α é fácil reconhecer $\alpha.\alpha'\equiv 0$ (princípio da não contradição) e $\alpha+\alpha'\equiv 1$ (princípio do terceiro excluído). As duas condições $\alpha.\beta\equiv 0$, $\alpha+\beta\equiv 1$ são além disso suficientes para que $\alpha\equiv\beta'$.

São muito importantes as seguintes propriedades:

1) $(\alpha')'\equiv\alpha$; 2) Se $\alpha\rightarrow\beta$, $\beta'\rightarrow\alpha'$; 3) $(\alpha+\beta)'\equiv\alpha'.\beta'$;
4) $(\alpha.\beta)'\equiv\alpha'+\beta'$; 5) $1'\equiv 0$.

A *negação lógica* põe assim em evidência a dualidade que se verifica, por exemplo, entre a *soma lógica* e o *produto lógico*.

É necessário não confundir proposições contraditórias com proposições *incompatíveis*, aplicando esta designação a duas ou mais proposições cujo produto lógico seja igual a 0. Exemplo: as proposições «X é um número primo» e «X é um múltiplo de 6» são incompatíveis, mas não contraditórias, porque podem ser simultâneamente falsas.

6 — As convenções anteriores constituem a base do chamado *cálculo proposicional*, em que o papel dos números aparece desempenhado pelas proposições, e em que os sinais de relação e de operação correspondem às palavras *se, não, ou, e*. É manifesta a analogia entre as relações $\alpha\rightarrow\beta$ (onde α e β designam proposições) e $a\geq b$ (onde a e b representam números); e ainda entre as relações $\alpha\equiv\beta$ e $a=b$. Uma diferença há, porém, que desde já convém assinalar: enquanto, para cada par de números a e b, se verifica necessàriamente uma das relações $a<b$, $a=b$, $a>b$ (ou, o que é o mesmo, uma das relações $a\leq b$, $b\geq a$), pode acontecer que, dadas duas proposições α e β, não se verifique nenhuma das relações $\alpha\rightarrow\beta$, $\beta\rightarrow\alpha$. Porém, conforme o que se viu, as regras formais do cálculo proposicional não diferem consideràvelmente das do cálculo numérico, como também se pode ajuïzar do exemplo: $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)\equiv\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta$. Outra analogia: das relações $\alpha\rightarrow\beta$, $\gamma\rightarrow\delta$, deduz-se $\alpha+\gamma\rightarrow\beta+\delta$, e ainda $\alpha\gamma\rightarrow\beta\delta$. Convém, contudo, nunca perder de vista as diferenças que existem entre um e o outro cálculo.

7 — Devemos agora notar que toda a proposição categórica pode apresentar-se sob a forma duma implicação lógica (afirmada ou negada) entre duas proposições condicionais, como fàcilmente se infere dos seguintes exemplos:

I — (5 é um número dígito) $\equiv$ (X é igual a $5\rightarrow X$ é um dígito);

II — (Todos os múltiplos de 6 são pares) $\equiv$ (n é $\dot{6}\rightarrow n$ é par);

III — (Alguns múltiplos de 3 não são pares) $\equiv$ (Y é $\dot{3}\rightarrow Y$ é par)$'$;

IV — (Nenhum múltiplo de 6 é primo) $\equiv$ (W é $\dot{6}\rightarrow W$ *não* é primo);

V — (Alguns losangos são rectângulos) $\equiv$ (X é um losango $\rightarrow$ $\rightarrow X$ *não* é um rectângulo)$'$.

Assim, em geral, a tôda a proposição categórica α pode dar-se uma das formas seguintes: $\mathfrak{h}\rightarrow\mathfrak{t}$ ou $(\mathfrak{h}\rightarrow\mathfrak{t})'$, onde $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{t}$ designam proposições condicionais; isto é, ou $\alpha\equiv(\mathfrak{h}\rightarrow\mathfrak{t})$, ou $\alpha\equiv(\mathfrak{h}\rightarrow\mathfrak{t})'$. *No primeiro caso*, dá-se a $\mathfrak{h}$ o nome de *hipótese* e a $\mathfrak{t}$ o nome de *tese* da proposição α; podemos dizer então que α *transforma* $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{t}$, e escreveremos $\alpha\,|\,\mathfrak{h}\equiv\mathfrak{t}$. Duas proposições α e β, tais que $\alpha\equiv(\mathfrak{a}_1\rightarrow\mathfrak{a}_2)$, $\beta\equiv(\mathfrak{b}_1\rightarrow\mathfrak{b}_2)$, sendo $\mathfrak{a}_1\equiv\mathfrak{b}_2$ e $\mathfrak{a}_2\equiv\mathfrak{b}_1$ (a tese de cada uma coincide com a hipótese da outra), dizem-se *recíprocas*, e, quando enunciadas conjuntamente (isto é, quando se efectua o seu produto lógico), obtém-se a proposição *mais forte* $\mathfrak{a}_1\equiv\mathfrak{a}_2$; por exemplo, as proposições «todo o divisor do m. d. c. de dois números divide também êsses números» e «todo o divisor comum de dois números divide o seu m. d. c.» são entre si recíprocas, e fundem-se na proposição «para que um dado número n divida dois números a e b quaisquer, é necessário e suficiente que divida o seu m. d. c.».

Há ainda outros modos de enunciar proposições categóricas, empregando proposições condicionais: assim, a proposição do exemplo V pode formular-se do seguinte modo: «(X é um losango).(X é um rectângulo)$\neq 0$» [2]; a do exemplo II é equivalente a «(X *não* é $\dot{6}$) + (X é par) $\equiv 1$» [3], etc.

Observações: 1) Uma proposição categórica α escrita sob a forma $(\mathfrak{h}\rightarrow\mathfrak{t})$ ou $(\mathfrak{h}\rightarrow\mathfrak{t})'$ não depende, evidentemente, do símbolo escolhido para representar a variável que figura nas proposições $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{t}$, contanto que êsse símbolo seja o mesmo em ambas; assim, em II podíamos pôr Z, X ou qualquer outra letra, em vez de n [4]. A proposição α traduz, por assim dizer, o que existe de *constante* entre $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{t}$, através de todas as mudanças possíveis do símbolo representativo da variável.

2) Para especificar que uma proposição $\alpha(X)$ não é verificada por mais de uma determinação de X, pode fazer-se uso da seguinte implicação: $\alpha(Y).\alpha(Z)\rightarrow(Y=Z)$. Assim, por exemplo, a expressão «(X é um múltiplo comum de 4 e 6, menor que 20).(Y é um múltiplo comum de 4 e 6, menor que 20) $\rightarrow$ ($X=Y$)» significa «não existe mais de um múltiplo comum de 4 e 6, inferior a 20».

---

[1] O sinal $'$ substitui, portanto, o advérbio *não*.

[2] «Existem losangos que também são rectângulos».

[3] «Dado um número inteiro, de duas uma: ou êsse número é par ou não é múltiplo de 6».

[4] Deve, é claro, respeitar-se qualquer convenção prévia, relativa à escolha do símbolo.

Exercicio: Mostrar que o produto lógico das implicacões $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{c}$, $\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{d}$, é equivalente à implicação única $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{a}'\mathfrak{d} + \mathfrak{b}'\mathfrak{c} + \mathfrak{c}\mathfrak{d}$.

8 — Nas suas modalidades mais freqüentes, o silogismo não é mais do que uma aplicação da propriedade transitiva da implicação lógica. Seja, por exemplo, o raciocínio «Todos os múltiplos do 6 são pares; 12 é múltiplo de 6, logo 12 é par», cujas premissas, postas sob a forma de implicação lógica, são as seguintes:

$$\alpha: \quad X \text{ é } \dot{6} \rightarrow X \text{ é par};$$
$$\beta: \quad Y \text{ é igual a } 12 \rightarrow Y \text{ é } \dot{6};$$

e representemos por $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, respectivamente, a hipótese de α, a hipótese de β, a tese de α e a tese de β. Atendendo à observação 1 do parágrafo anterior, podemos substituir Y por X, em β, o que permite identificar $\mathfrak{a}$ com $\mathfrak{d}$, isto é, pôr $\mathfrak{a}(X) \equiv \mathfrak{d}(X)$, e, portanto, escrever $\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{d} \rightarrow \mathfrak{c}$, donde $\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{c}$. A proposição $\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{c}$, que podemos representar por γ, é, evidentemente, a conclusão do raciocínio, e resulta, como se acaba de ver, da aplicação sucessiva de β e de α sôbre $\mathfrak{b}$: $\beta \mid \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{d}$, $\alpha \mid \mathfrak{d} \equiv \mathfrak{c}$, donde $\alpha \mid \beta \mid \mathfrak{b} \equiv \gamma \mid \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{c}$. Podemos então escrever $\alpha \mid \beta \equiv \gamma$ e dizer, por analogia com o que fizemos para as proposições condicionais, que α *transforma* β em γ; para justificar esta convenção, basta notar que, escrita sob a forma «12 é $\dot{6}$», a proposição β coincide afinal com a hipótese de α, desde que se ponha 12 no lugar de X, e assim «12 é $\dot{6}$» $\rightarrow$ «12 é par», isto é, $\beta \rightarrow \gamma$ (segundo α).

Consideremos agora um raciocínio cujas premissas sejam do tipo: $(\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b})'$ (proposição α_1), $\mathfrak{c} \rightarrow \mathfrak{b}$ (proposição α_2). Nêste caso a conclusão será $(\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{c})'$, pois que, se a implicação $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{c}$ fôsse verdadeira, como se tem $\mathfrak{c} \rightarrow \mathfrak{b}$ (segundo α_2) ter-se-ia $\alpha \rightarrow \mathfrak{b}$, o que, segundo α_1, é falso.

(Continua) JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA

EXAME DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Cursos da Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto

433 — Encontrar os três lados dum triângulo rectângulo, sabendo que o lado médio é igual à semi-soma dos outros dois e que o número que exprime a sua superfície é o mesmo que exprime o seu perímetro. R: *Se forem* b *o cateto médio,* c *o outro e* a *a hipotenusa será:* $2b = a + c$; $\frac{bc}{2} = a + b + c$ *e* $a^2 = b^2 + c^2$ *donde, resolvendo o sistema,* $a = 10$, $b = 8$, *e* $c = 6$.

J. C.

434 — Qual a razão entre os quintos termos dos desenvolvimentos dos binómios $(1-a)^n$ e $(1+a)^n$? Se a ordem dos termos correspondentes fôr par, qual será a sua razão? R: $T_5 = \binom{m}{4}(-a)^4$; $T_5' = \binom{m}{4} a^4$ *donde* $\frac{T_5}{T_5'} = 1$. *Se a ordem correspondente fôsse par, então a razão seria* -1, *como é óbvio.*

J. C.

435 — Na equação $9x^2 + 12x + 4 = 0$ indicar, sem resolver, qual a natureza das raízes; dizer os sinais, a sua soma e o seu produto. R: *Como* $\Delta = b^2 - 4ac = 144 - 144 = 0$ *as raizes são reais e iguais. Por ser a soma* $S = -4/3$, *as raizes são negativas e o seu produto é* $P = 4/9$.

J. C.

436 — Calcule por logaritmos o volume dum paralelipípedo de que se conhece a diagonal da base 20,35 m e um ângulo adjacente 28° 30′ 4″ e a altura 7,50 m. R: *Se o paralelipipedo fôr rectângulo a base é um rectângulo de área* $A = 20{,}35^2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \text{ m}^2 = \frac{20{,}35^2}{2} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha \text{ m}^2$ *designando por* α *o ângulo de* 28° 30′ 4″, *e o volume é* $V = \frac{7{,}50 \times 20{,}35^2}{2} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha \text{ m}^3$ *logo* $\log . V = \log 7{,}50 + 2 \log 20{,}35 + \log \operatorname{sen} 57^\circ 0' 8'' + \operatorname{colog} 2 = 3{,}11475$ *e por isso* $V = 1302{,}5 \text{ m}^3$.

J. C.

437 — Simplificar a expressão

$$\frac{\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{3\pi - 4x}{2} + \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}}.$$

R:
$$\frac{\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{3\pi - 4x}{2} + \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi - 2x\right) + \cos^2 x} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos 2x + \cos^2 x} = -\operatorname{cosec} x.$$

J. C.

438 — Pelo método geométrico do problema inverso, dadas duas rectas paralelas AX e BY e um ponto fixo O complano à distância d da mais próxima, determinar a posição duma perpendicular comum $\overline{CD}$ às duas paralelas dadas tal que do ponto se veja $\overline{CD}$ sob um ângulo dado α. Discutir as soluções possíveis. ¿Qual o valor máximo que pode ter α?

(Vêr solução no próximo número).

439 — *a)* ¿Com os algarismos $0, 1, 2, \cdots, 8$ e 9 poder-se-á escrever um número na base 13? *b)* ¿Qual o número no sistema decimal que corresponde a 371 na base 7? R: a) *Nem todos os números do sistema da base* 13 *podem escrever-se com os algarismos dados, pois devem adoptar-se símbolos novos para representar no sistema da base* 13 *os números* 10, 11 e 12 *do sistema decimal.* b) *Na base* 7 *os únicos algarismos adoptados na escrita dos números são* 0, 1, 2, 3, 4, 5 *e* 6. *O símbolo* 371 *não representa pois um número da base* 7.

J. C.

I. S. C. E. F. — 23 de Julho de 1940

440 — *a)* Defina número primo e diga em que consiste a decomposição de um número em factores primos, que propriedades e aplicações conhece. *b)* Sejam os dois números $A = p^2 . q^n$ $B = q^2 . p^n$, onde p e q são números primos e n inteiro e positivo. Quantos divisores comuns têm A e B e quais? R: *Se* $n \geq 2$ *o número de divisores é 9:* $1, p, p^2, q, q^2, p.q, p^2.q, p.q^2$ *e* $p^2.q^2$; *se* $n = 1$ *o número de divisores é 4:* $1, p, q$ *e* $p.q$.

441 — Diga o que é um sistema de equações; defina solução. Resolva o seguinte problema: determinar p, q, r de modo que a função $y = x^3 + px^2 + qx + r$ tome para $x = 0, 1, 2$ os valores $3, 7, 19$, respectivamente.

R: $\left\{\begin{array}{r} r = 3 \\ p + q + r = 6 \\ 4p + 2q + r = 11 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} p = 1 \\ q = 2 \\ r = 3. \end{array}\right.$