Exercicio: Mostrar que o produto lógico das implicações $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{c}$, $\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{d}$, é equivalente à implicação única $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{a}'\mathfrak{d} + \mathfrak{b}'\mathfrak{c} + \mathfrak{c}\mathfrak{d}$.

8 — Nas suas modalidades mais freqüentes, o silogismo não é mais do que uma aplicação da propriedade transitiva da implicação lógica. Seja, por exemplo, o raciocínio «Todos os múltiplos do 6 são pares; 12 é múltiplo de 6, logo 12 é par», cujas premissas, postas sob a forma de implicação lógica, são as seguintes:

$$\alpha: \quad X \text{ é } \dot{6} \rightarrow X \text{ é par};$$
$$\beta: \quad Y \text{ é igual a } 12 \rightarrow Y \text{ é } \dot{6};$$

e representemos por $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, respectivamente, a hipótese de α, a hipótese de β, a tese de α e a tese de β. Atendendo à observação 1 do parágrafo anterior, podemos substituir Y por X, em β, o que permite identificar $\mathfrak{a}$ com $\mathfrak{d}$, isto é, pôr $\mathfrak{a}(X) \equiv \mathfrak{d}(X)$, e, portanto, escrever $\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{d} \rightarrow \mathfrak{c}$, donde $\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{c}$. A proposição $\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{c}$, que podemos representar por γ, é, evidentemente, a conclusão do raciocínio, e resulta, como se acaba de ver, da aplicação sucessiva de β e de α sôbre $\mathfrak{b}$: $\beta \mid \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{d}$, $\alpha \mid \mathfrak{d} \equiv \mathfrak{c}$, donde $\alpha \mid \beta \mid \mathfrak{b} \equiv \gamma \mid \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{c}$. Podemos então escrever $\alpha \mid \beta \equiv \gamma$ e dizer, por analogia com o que fizemos para as proposições condicionais, que α *transforma* β em γ; para justificar esta convenção, basta notar que, escrita sob a forma «12 é $\dot{6}$», a proposição β coincide afinal com a hipótese de α, desde que se ponha 12 no lugar de X, e assim «12 é $\dot{6}$» $\rightarrow$ «12 é par», isto é, $\beta \rightarrow \gamma$ (segundo α).

Consideremos agora um raciocínio cujas premissas sejam do tipo: $(\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b})'$ (proposição α_1), $\mathfrak{c} \rightarrow \mathfrak{b}$ (proposição α_2). Nêste caso a conclusão será $(\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{c})'$, pois que, se a implicação $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{c}$ fôsse verdadeira, como se tem $\mathfrak{c} \rightarrow \mathfrak{b}$ (segundo α_2) ter-se-ia $\alpha \rightarrow \mathfrak{b}$, o que, segundo α_1, é falso.

(Continua) JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA

EXAME DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Cursos da Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto

433 — Encontrar os três lados dum triângulo rectângulo, sabendo que o lado médio é igual à semi-soma dos outros dois e que o número que exprime a sua superfície é o mesmo que exprime o seu perímetro. R: *Se forem* b *o cateto médio,* c *o outro e* a *a hipotenusa será:* $2b = a + c$; $\frac{bc}{2} = a + b + c$ *e* $a^2 = b^2 + c^2$ *donde, resolvendo o sistema,* $a = 10$, $b = 8$, *e* $c = 6$.

J. C.

434 — Qual a razão entre os quintos termos dos desenvolvimentos dos binómios $(1-a)^n$ e $(1+a)^n$? Se a ordem dos termos correspondentes fôr par, qual será a sua razão? R: $T_5 = \binom{m}{4}(-a)^4$; $T_5' = \binom{m}{4} a^4$ *donde* $\frac{T_5}{T_5'} = 1$. *Se a ordem correspondente fôsse par, então a razão seria* -1, *como é óbvio.*

J. C.

435 — Na equação $9x^2 + 12x + 4 = 0$ indicar, sem resolver, qual a natureza das raízes; dizer os sinais, a sua soma e o seu produto. R: *Como* $\Delta = b^2 - 4ac = 144 - 144 = 0$ *as raízes são reais e iguais. Por ser a soma* $S = -4/3$, *as raízes são negativas e o seu produto é* $P = 4/9$.

J. C.

436 — Calcule por logaritmos o volume dum paralelipípedo de que se conhece a diagonal da base 20,35 m e um ângulo adjacente 28° 30′ 4″ e a altura 7,50 m. R: *Se o paralelipipedo fôr rectângulo a base é um rectângulo de área* $A = 20{,}35^2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \, \mathrm{m}^2 = \frac{20{,}35^2}{2} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha \, \mathrm{m}^2$ *designando por* α *o ângulo de* 28° 30′ 4″, *e o volume é* $V = \frac{7{,}50 \times 20{,}35^2}{2} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha \, \mathrm{m}^3$ *logo* $\log . V = \log 7{,}50 + 2 \log 20{,}35 + \log \operatorname{sen} 57^\circ 0' 8'' + \operatorname{colog} 2 = 3{,}11475$ *e por isso* $V = 1302{,}5 \, \mathrm{m}^3$.

J. C.

437 — Simplificar a expressão $\dfrac{\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen} \frac{3\pi - 4x}{2} + \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$.

$$\text{R:} \quad \frac{\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen} \frac{3\pi - 4x}{2} + \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi - 2x\right) + \cos^2 x} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos 2x + \cos^2 x} = -\operatorname{cosec} x.$$

J. C.

438 — Pelo método geométrico do problema inverso, dadas duas rectas paralelas AX e BY e um ponto fixo O complano à distância d da mais próxima, determinar a posição duma perpendicular comum $\overline{CD}$ às duas paralelas dadas tal que do ponto se veja $\overline{CD}$ sob um ângulo dado α. Discutir as soluções possíveis. ¿Qual o valor máximo que pode ter α?

(Vêr solução no próximo número).

439 — *a)* ¿Com os algarismos $0, 1, 2, \cdots, 8$ e 9 poder-se-á escrever um número na base 13? *b)* ¿Qual o número no sistema decimal que corresponde a 371 na base 7? R: a) *Nem todos os números do sistema da base* 13 *podem escrever-se com os algarismos dados, pois devem adoptar-se símbolos novos para representar no sistema da base* 13 *os números* 10, 11 e 12 *do sistema decimal.* b) *Na base* 7 *os únicos algarismos adoptados na escrita dos números são* 0, 1, 2, 3, 4, 5 *e* 6. *O símbolo* 371 *não representa pois um número da base* 7.

J. C.

I. S. C. E. F. — 23 de Julho de 1940

440 — *a)* Defina número primo e diga em que consiste a decomposição de um número em factores primos, que propriedades e aplicações conhece. *b)* Sejam os dois números $A = p^2 . q^n$ $B = q^2 . p^n$, onde p e q são números primos e n inteiro e positivo. Quantos divisores comuns têm A e B e quais? R: *Se* $n \geq 2$ *o número de divisores é* 9: $1, p, p^2, q, q^2, p.q, p^2.q, p.q^2$ *e* $p^2.q^2$; *se* $n = 1$ *o número de divisores é* 4: $1, p, q$ *e* $p.q$.

441 — Diga o que é um sistema de equações; defina solução. Resolva o seguinte problema: determinar p, q, r de modo que a função $y = x^3 + px^2 + qx + r$ tome para $x = 0, 1, 2$ os valores $3, 7, 19$, respectivamente.

$$\text{R:} \quad \begin{cases} r = 3 \\ p + q + r = 6 \\ 4p + 2q + r = 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} p = 1 \\ q = 2 \\ r = 3. \end{cases}$$

442 — Determinar todos os sistemas de três números tais que: o produto dos dois primeiros seja igual ao terceiro, o produto do primeiro pelo terceiro seja quatro vezes o segundo e o produto do segundo pelo terceiro seja nove vezes o primeiro. R: $\begin{cases} xy = z \\ xz = 4y \\ yz = 9x \end{cases}$ *ou* $\begin{cases} xy = z \\ y(x^2-4) = 0 \\ x(y^2-9) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=-6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \\ z=-6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \\ z=6 \end{cases}$.

443 — Dado um triângulo equilátero de lado l determinar a que distância a contar de um vértice se deve tirar uma paralela à base oposta de modo que as duas figuras obtidas tenham a mesma área. R: $x = \frac{\sqrt{6}}{4} l$.

444 - De um trapézio rectângulo conhecem-se as bases b e B e sabe-se que dos dois ângulos internos não rectos um é duplo do outro. Calcular o volume do sólido gerado pela revolução do trapézio em tôrno da sua base maior. R: $V = \pi (B-b)^2 (B+2b)$.

445 — Sabendo que x é um ângulo do 3.º quadrante tal que $\cos x = -\frac{2}{3}$ calcular o valor numérico de $A = \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{cotg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}$. R: $\cos x = -\frac{2}{3}$, $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sec x = -\frac{3}{2}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $A = -\frac{5+3\sqrt{5}}{30} = -\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{5}}{10}$.

I. S. C. E. F. — Exercícios de revisão

446 — Torne calculável por logaritmos a expressão $1 + \operatorname{sen} a + \cos a$. R: $1 + \operatorname{sen} a + \cos a = 1 + \operatorname{sen} a + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = 1 + 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)\right] = 2\sqrt{2} \cos\frac{a}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)$.

447 — Determine o lugar geométrico dos pontos médios das cordas duma circunferência Γ que passam por um ponto P interior a Γ. R: *O lugar geométrico é a circunferência de diâmetro* PC *(*C *centro de* Γ*) a qual se reduz ao centro* C *se* P *coïncidir com êste.*

448 — Três esferas Γ, Γ' e Γ'' de centros O, O' e O'' são tangentes exteriormente 2 a 2. Seja π um plano tangente às três esferas e sejam A, A' e A'' os pontos de tangência. ¿A que condição devem satisfazer os raios das 3 esferas para que o diedro $A'AOA''$ seja recto? R: *Por* Γ, Γ' *e* Γ'' *serem tangentes ao plano* π, *o rectilíneo do diedro* $A'AOA''$ *é o ângulo* $A'AA''$. *Êste será recto se* $\overline{A'A''}^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{AA''}^2$. *Tem-se* $\overline{AA'}^2 = (r+r')^2 - (r-r')^2 = 4rr'$, $\overline{AA''}^2 = (r+r'')^2 - (r-r'')^2 = 4rr''$ *e* $\overline{A'A''}^2 = (r'+r'')^2 - (r'-r'')^2 = 4r'r''$. *Logo, o diedro será recto se* $r'r'' = rr' + rr''$.

As soluções dos exercícios 440 a 448 foram-nos cedidas pelo assistente Dr. Augusto Sá da Costa.

I.S.T. — Ponto modêlo (Diário do Govêrno — 2.ª sér. — 14-6-1940)

449 — Duas cidades, A e B, estão ligadas por uma estrada com 50 quilómetros de comprimento. No mesmo instante partem de A para B dois automóveis cujas velocidades estão entre si como 1 : 2 e de B para A outro automóvel com a velocidade de 60 quilómetros à hora. Êste último cruza com os outros dois e entre os dois cruzamentos há um intervalo de oito minutos e meio. Admitindo que os movimentos são uniformes, ¿quais são as velocidades dos dois primeiros automóveis? R: *Sejam* x *e* y *os números que exprimem as velocidades dos dois primeiros automóveis em quilómetros por minuto. Represente-se por* t *o intervalo de tempo, em minutos, decorrido desde o instante da partida até ao instante do primeiro encontro e note-se que* t *representa ainda o número de quilómetros que até êste último instante o terceiro automóvel percorre. Tem-se.* $y = 2x$, $t = 50 - 2xt$ *e* $t + 8{,}5 = 50 - x(t + 8{,}5)$, *donde, eliminando* t *entre as duas últimas equações:* $17x^2 - 24{,}5x + 8{,}5 = 0$. *Há duas soluções para o problema, a saber:*

$$x_1 = \frac{73}{85},\ y_1 = \frac{146}{85} \quad e \quad x_2 = \frac{99}{170},\ y_2 = \frac{99}{85}.$$

H. R.

450 — Resolver gràficamente a equação $\sqrt{2}\, x^2 + x - 2 = 0$.

451 — Dadas as equações

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha \sqrt{1-a^2}}{2\sqrt{2}},\quad \cos\beta = \frac{b}{\operatorname{tg}\beta},\quad \alpha = 2\beta$$

deduzir a relação entre a e b. R: *Eliminando* α *e* β *obtém-se fàcilmente a relação pedida:* $128b^8 - 256b^6 + 160b^4 - 32b^2 - a^2 + 1 = 0$.

H. R.

452 — Numa circunferência de raio R inscreve-se um triângulo isósceles cuja base é igual a metade da altura. Calcular a área do triângulo e o comprimento dos três arcos em que a circunferência fica dividida. R: *Se se representar por* x *a distância do centro da circunferência à base do triângulo deverá ser, como fàcilmente se verifica,* $17x^2 + 2Rx - 15R^2 = 0$ *donde* $x = \frac{15}{17} R$. *A área é pois* $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{15}{17}R + R\right)\frac{1}{2}\left(\frac{15}{17}R + R\right)\right] = \frac{1}{4}\left(\frac{32}{17}\right)^2 R^2 = \frac{256}{289} R^2$. *O comprimento do arco menor é* $R \operatorname{arc\,sen} \frac{15 \times 16}{17^2}$ *exprimindo-se êste arco (do 1.º quadrante), em radianos. Os comprimentos dos outros dois arcos são iguais a metade da diferença entre* $2\pi R$ *e o arco anteriormente determinado.*

H. R.

453 — São dados dois segmentos de recta de comprimentos a e $2a$, tendo uma extremidade comum onde formam um ângulo de 120º. Traçada a bissectriz dêste ângulo, determinar a distancia a que ela passa do ponto eqüidistante dos extremos dos segmentos. R: *O ponto eqüidistante dos extremos dos segmentos é o centro da circunferência de raio* R *circunscrita ao triângulo de que os segmentos são dois lados. O terceiro lado dêste triângulo é o lado do triângulo equilátero inscrito naquela circunferência e é, pois* $R\sqrt{3}$. *Daqui resulta que é* $R = \sqrt{\frac{5a^2 + 2a}{3}}$. *Ora a distância pedida,* x, *é um cateto do triângulo rectângulo cujo vértice opôsto é o terceiro vértice daquêle triângulo equilátero inscrito e de ângulo neste último vértice igual a* 10º. *Portanto,* $x = \sqrt{\frac{5a^2 + 2a}{3}} \operatorname{sen} 10º$.

H. R.

454 — Calcular o volume, a área e o diedro do octaedro regular de aresta a. R: *O volume do octaedro é* $\frac{\sqrt{2}}{3} a^3$, *a área é* $2a^2\sqrt{3}$ *e o diedro é* $2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{2}$ *com* $0 < \operatorname{arc\,tg}\sqrt{2} < \pi$.

H. R.

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. C. — Exame de freqüência, 1940

455 — Se $\lim\limits_{n=\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = A$ é $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{x_n} = A$, $x_n > 0$; calcular $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots 2n}$.

456 — Dados os números reais $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$ tais que sejam positivas as diferenças $a_1 - a_2$, $a_2 - a_3$, $\cdots$, $a_{2n-1} - a_{2n}$, mostrar que à equação $f(x) = (x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_{2n-1}) + b(x-a_2)\cdots(x-a_{2n}) = 0$, onde é $b > 0$, tem todas as raízes reais e desiguais.

457 — Calcular pelo binómio de Newton com 3 casas decimais exactas o valor de $\sqrt[5]{34}$.

458 — Se as raizes da equação $f(x) = 0$ são todas reais e diferentes de zero, mostrar que 3 coeficientes consecutivos quaisquer verificam sempre a condição $a_m^2 - a_{m-1} \cdot a_{m+1} > 0$.

F. C. L. — 1.º exame de freqüência, Fev. 1940

459 — Reduza à forma $a + bi$ $3(\cos 225^\circ - i \operatorname{sen} 225^\circ) \times \frac{2}{3}(-\cos 120^\circ - i \operatorname{sen} 120^\circ) \times \frac{1}{\sqrt{3}+i}$. R: $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

460 — Determine os máximos e mínimos da função $y = \frac{3x^2 - a^2}{(a^2+x^2)^3}$. R: máx. $(2a^2)^{-2}$ *para* $x = \pm a$, mín. $-a^{-4}$ *para* $x = 0$.

461 — Determine a derivada em ordem a x da função y definida pela equação $\operatorname{arc\,sen} \sqrt{x^2 - \sqrt{xy}} - \log \sec \sqrt[3]{x^2+y^2} = 0$.

462 — Reduza à forma $a + bi$ um dos valores de $(3-5i)^3 - (\sqrt{3}-i)^{3/2}$. R: $-196 - 12i$ *ou* $200 - 8i$.

463 — Determine $L = \lim\limits_{x=\infty} \left| 1 + \frac{1}{x} \right|^x$. R: $L = e$.

464 — Determine, aplicando a fórmula de Leibnitz, a derivada de 1.ª ordem da função $y = \operatorname{sen} x \cdot \log \sqrt{x^2-1}$.

465 — Resolva pelo método das raízes primitivas a equação $x^{12} - 1 = 0$. R: $\pm 1, \pm i, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2} i, \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

466 — Calcule os 3 primeiros termos não nulos do desenvolvimento da função $y = e^{\cos x}$ pela fórmula de Mac Laurin. R: $y = e - \frac{x^2}{2} e + \frac{x^4}{6} e + \cdots$.

467 — Determine a derivada em ordem a x da função y definida pela equação $a^{\cos xy} - \operatorname{sen}\left[\operatorname{arc\,tg} \log \sqrt[4]{(\cos x)^{\operatorname{sen} y}}\right] = 0$.

468 — Resolva, pelo método trigonométrico, a equação $x^6 + 4096 = 0$. R: $\pm 4i$, $\pm 2\sqrt{3} \pm 2i$.

469 — Determine $L = \lim\limits_{x=0} \left| \frac{\operatorname{tg} x + 1}{x+1} \right|^{\frac{1}{x}}$. R: $L = 1$.

470 — Determine, aplicando a fórmula de Leibnitz, a derivada de 3.ª ordem da função $y = e^{\cos x} \cdot \sqrt{x}$.

471 — Resolva a equação $x^8 - 6561 = 0$. R: ± 3, $\pm 3i$, $\pm \frac{3\sqrt{2}}{2} \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} i$.

472 — Determine os máximos e mínimos da função $y = \operatorname{sen} x (1 + \cos x)$. R: máx. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ *para* $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, mín. $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ *para* $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$.

473 — Determine a derivada parcial em ordem a y da função $z = \frac{y^5 \cdot \operatorname{arc\,sen} \log (x^y - y^{\sqrt{x}})}{\operatorname{cosec} \sqrt{y-x}}$.

474 — Reduza $\frac{\cos 45^\circ - i \operatorname{sen} 45^\circ}{3(-\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)} - (2-i)^3$ à forma $a + bi$. R: $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} - 24}{2} - i \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} - 132}{2}$.

475 — Calcule os 3 primeiros termos não nulos do desenvolvimento da função $y = e^x \cdot \sec x$ pela fórmula de Mac Laurin R: $y = 1 + x + x^2 + \cdots$.

476 — Determine a derivada de 1.ª ordem da função $y = (x+1)^x \cdot \log \operatorname{arc\,cos} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{a^x}}{\sqrt{x^5 - \sqrt{x}}}$.

Os exercícios 459 a 476 e soluções respectivas foram-nos cedidos pelo assistente Dr. J. Pais Morais.

F. C. L. — Alguns exercícios do curso

477 — Derive a função $y = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ e explique o resultado. R: *Supõe-se que* $\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ *representa o valor aritmético do radical. A derivação conduz à expressão*

$$y' = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} x}{|\operatorname{sen} x|} = \varepsilon \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \varepsilon = +1 \text{ para } & 2k\pi < x < (2k+1)\pi \quad (1) \\ \varepsilon = -1 \text{ para } & (2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi. \quad (2) \end{cases}$$

Justificação do resultado simples obtido: *Sabe-se que* $\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \varepsilon \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. *Temos pois* $y = \operatorname{arc\,tg}\left(\varepsilon \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$.

No caso (1), $y = \operatorname{arc\,tg} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{x}{2} + n\pi \quad y' = \frac{1}{2}$

No caso (2), $y = \operatorname{arc\,tg}\left(-\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) = (k+1)\pi - \frac{x}{2} + n\pi \quad y' = -\frac{1}{2}$.

478 — Sabe-se que a função $f(x)$ da variável real x, definida, contínua e admitindo derivada no intervalo, $(0, \infty)$ satisfaz neste intervalo à condição (1) $f(xy) = f(x) f(y)$. Prove que (2) $y f'(y) f(x) = x f'(x) f(y)$. Deduza de (2) a expressão mais geral das funções satisfazendo a (1). R: *Como* x *e* y *são dois valores quaisquer do intervalo, podemos considerar em* (1) x *e* y *como variáveis independentes uma da outra. Derivando ambos os membros de* (1) *em ordem a* x *e em ordem a* y *obtemos respectivamente* $y \frac{df(xy)}{d(xy)} = f'(x) f(y)$, $x \frac{df(xy)}{d(xy)} = f'(y) f(x)$ *donde* $x f'(x) f(y) = y f'(y) f(x)$. *Por conseguinte, no intervalo citado,* $x \frac{f'(x)}{f(x)} = y \frac{f'(y)}{f(y)} = \text{const.} = k$. *Podemos escrever* $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{k}{x} = \frac{k x^{k-1}}{x^k} = \frac{(x^k)'}{x^k}$. *Esta igualdade mostra-nos que as funções* $f(x)$ *e* x^k *têm derivadas logarítmicas iguais* *no intervalo considerado. O seu cociente é pois constante:* $\frac{f(x)}{x^k}=C$ $f(x)=Cx^k$. *Mas, atendendo a* (1), *deve ter-se* $C(xy)^k=Cx^kCy^k$ *ou* $C(xy)^k=C^2(xy)^k$ *donde* $C=1$. *A função* $f(x)$ *é pois da forma* $f(x)=x^k$.

479 — Sabe-se que a função $f(x)$, definida, contínua e admitindo derivada no intervalo $(-\infty,+\infty)$, satisfaz neste intervalo à condição (1) $f(x+y)=f(x)f(y)$. Prove que (2) $f(y)f'(x)=f(x)f'(y)$ Deduza de (2) a expressão mais geral das funções satisfazendo a (1). R: *Derivando ambos os membros de* (1) *em ordem a* x *è a* y *obtemos respectivamente* $\frac{df(x+y)}{d(x+y)}=f'(x)f(y)$, $\frac{df(x+y)}{d(x+y)}=f(x)f'(y)$ *donde* (2) $f'(x)f(y)=f'(y)f(x)$. *Por conseguinte* (3) $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{f'(y)}{f(y)}=k$. *Notemos que a função* $f(x)$ *é positiva, pois que, fazendo em* (1) $x=y=\frac{z}{2}$ *obtemos* $f(z)=\left[f\left(\frac{z}{2}\right)\right]^2$. *A função* $\log f(x)$ *é pois definida no intervalo* $(-\infty,+\infty)$. *Como* (3) *pode escrever-se* $\frac{d}{dx}\log f(x)=k$ *concluimos que* $\log f(x)=kx+\log C$ *onde* $\log C$ *representa uma constante arbitrária* $(C>0)$. *Portanto* $f(x)=Ce^{kx}$. *A condição* (1) *mostra-nos que* $C=1$. *Logo* $f(x)=e^{kx}$.

480 — Sabe-se que a função $f(x)$, definida, contínua e admitindo derivada no intervalo $(0,+\infty)$, satisfaz neste intervalo à condição (1) $f(xy)=f(x)+f(y)$. *Prove que* (2) $xf'(x)=yf'(y)$. Deduza de (2) a expressão mais geral das funções satisfazendo a (1). R: $f(x)=k\log x$. *Processo de resolução análogo.*

Os exercícios 477 a 480 e respectivas soluções foram-nos cedidos pelo assistente Dr. Vergílio S. Barroso.

I. S. C. E. F. — I.º exame de freqüência, 19 de Fev. de 1940

481 — Resolver a equação $\left(z^2+\frac{i\sqrt{2}}{z^2}\right)\left(z^2-\frac{i\sqrt{2}}{z^2}\right)=2i$.

R: *A equação pode escrever-se:* $z^4-\frac{2i^2}{z^4}=2i$ *ou* $z^8-2iz^4+2=0$ *donde* $z^4=i\pm\sqrt{3}\,i=(1\pm\sqrt{3})\,i$. *As 8 raizes da equação são, pois, os 4 valores de* $\sqrt[4]{(1+\sqrt{3})i}$ *e os 4 valores de* $\sqrt[4]{(1-\sqrt{3})i}$, *que fàcilmente se determinam.* M. Z.

482 — Estudar e discutir o sistema $\begin{cases} x+a(y+z)=0\\ y+a(x+z)=0\\ z+a(x+y)=0.\end{cases}$

R: *O determinante dos coeficientes é*

$$\Delta(a)=\begin{vmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{vmatrix}=2a^3-3a^2+1=(a-1)^2(2a+1)$$

e tem-se $\Delta(a)\neq0$ *para* $a\neq1,\ -\frac{1}{2}$. *O sistema é então determinado (e admite só a solução* $x=y=z=0$) *para qualquer valor de* a *diferente de* 1 *ou* $-\frac{1}{2}$, *e representa 3 planos distintos passando pela origem.*

O caso $a=1$ *conduz a uma indeterminação de grau* 2. *Com efeito, neste caso as 3 equações não são distintas, e, conseqüentemente os 3 planos são coïncidentes.*

O caso $a=-\frac{1}{2}$ *conduz a uma indeterminação de grau* 1. *Com efeito, pode tomar-se para determinante principal*

$$\begin{vmatrix}1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1\end{vmatrix}=\frac{3}{4}$$

e para sistema de equações principais

$$\begin{cases}x-\frac{1}{2}(y+z)=0\\ y-\frac{1}{2}(x+z)=0\end{cases}\quad ou\quad \begin{cases}2x-y-z=0\\ -x+2y-z=0\end{cases}\quad donde\quad \frac{x}{\begin{vmatrix}-1&-1\\2&-1\end{vmatrix}}=\frac{y}{\begin{vmatrix}-1&2\\-1&-1\end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix}2&-1\\-1&2\end{vmatrix}}=\rho\quad ou\quad \begin{cases}x=3\rho\\ y=3\rho,\\ z=3\rho\end{cases}$$

equações paramétricas da recta, eixo do feixe a que pertencem os 3 planos. M. Z.

483 — Determine um polinómio de grau não superior a 4 que represente apròximadamente a função $y=\operatorname{sen}x$ no intervalo $(-\pi,+\pi)$.

I. S. C. E. F. — I.º exame de freqüência, 21 de Fev. de 1940

484 — Estudar o sistema $\begin{cases}\alpha x+\beta y+\gamma z=0\\ \beta x+\gamma y+\alpha z=0\\ \gamma x+\alpha y+\beta z=0\end{cases}$ onde α,β,γ são as raízes cúbicas da unidade. R: *Designando por* α, β *e* γ *as raizes cúbicas da unidade, tem-se:* $\alpha^3=\beta^3=\gamma^3=1$, $\alpha\beta\gamma=1$, $\alpha^2=\beta\gamma$, $\beta^2=\gamma\alpha$ *e* $\gamma^2=\alpha\beta$ *(basta notar que as 3 raizes têm módulo* 1 *e argumentos* 0º, 120º, *e* 240º). *Em vista disto são nulos o determinante de 3.ª ordem e todos os de 2.ª ordem que podem formar-se a partir da matriz dos coeficientes. O sistema é pois indeterminado e admite* ∞^2 *soluções:*

$$x=-\frac{\beta}{\alpha}y-\frac{\gamma}{\alpha}z=-\frac{\gamma}{\beta}y-\frac{\alpha}{\beta}z=-\frac{\alpha}{\gamma}y-\frac{\beta}{\gamma}z.$$

M. Z.

485 — Uma função de expressão analítica desconhecida toma para $x=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$, respectivamente os valores $13,\ -2,\ -3,\ -2,\ 13$. Calcular os valores aproximados de x para os quais a função toma o valor 4.

I. S. T. — Alguns exercícios do I.º exame de freqüência, 1940

486 — Calcular a e b de modo que $1-i$ seja raiz da equação $x^9+ax^7+b=0$. R: *Deverá ser* $(1-i)^9+a(1-i)^7+b\equiv0$. *Atendendo a que* $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$, *tem-se* $(1-i)^7=2^{7/2}\left(\cos\frac{49\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{49\pi}{4}\right)=8+8i$ *e* $(1-i)^9=2^{9/2}\left(\cos\frac{63\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{63\pi}{4}\right)=-16+16i$ *e portanto* $-16+8a+b+(16+8a)\,i=0$ *donde* $\begin{cases}-16+8a+b=0\\ 16+8a=0\end{cases}$ *e* $a=-2$, $b=32$. M. Z.

487 — Calcular n de modo que $(\sqrt{3}-i)^n$ seja real e positivo. R: *Como* $\sqrt{3}-i=2(\cos330^\circ+i\operatorname{sen}330^\circ)$ *tem-se* $(\sqrt{3}-i)^n=2^n(\cos n\,330^\circ+i\operatorname{sen}n\,330^\circ)$ *e os valores de* n *que correspondem a valores reais e positivos são tais que* $n\,330^\circ=k\,360^\circ$ *ou* $n=\frac{k\,360^\circ}{330^\circ}=\frac{k\,12}{11}$, *e portanto terá de ser* $n=\hat{1}2$. M. Z.

488 — Mostrar que, sendo z um complexo qualquer, toda a fracção $\frac{a+bi}{c+di}$ se pode escrever sob a forma $A+Bz$ por uma única maneira.

489 — Mostrar que $y=(c_1+c_2 x)\cos nx+(c_3+c_4 x)\,\mathrm{sen}\,nx$ é solução da equação $y^{IV}+2n^2 y''+n^4 y=0$.

490 — Calcular o verdadeiro valor de $\dfrac{\mathrm{tg}\,(a+x)-\mathrm{tg}\,(a-x)}{\mathrm{arc\,tg}\,(a+x)-\mathrm{arc\,tg}\,(a-x)}$ para $x=0$.

491 — Calcular o verdadeiro valor de $\dfrac{\pi}{4x}-\dfrac{\pi}{2x\,(e^{\pi x}+1)}$ para $x=0$.

492 — Achar os máximos e mínimos da função

$$f(x)=\frac{(4-x)\sqrt{1-x^2}}{(2-x)^2}.$$

493 — Achar os máximos e mínimos da função

$$f(x)=\mathrm{tg}\,x\,.\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

494 — AB é um segmento rectilínio vertical; AC outro segmento rectilíneo horizontal (dirigido para leste); BD um terceiro segmento rectilíneo horizontal (dirigido para o norte). Marquem-se distâncias iguais $\overline{CP}$ e $\overline{BQ}$ ao longo de CA e BD respectivamente. Determinar o mínimo comprimento de PQ.

495 — Desenhe-se uma semi-circunferência de centro O e diâmetro base AB. Por A e O tirem-se duas paralelas AP e OQ encontrando a circunferência respectivamente em P e Q. Determinar a direcção dessas paralelas de modo que a área $APQOA$ seja máxima.

496 — Considere-se num plano vertical uma semi-circunferência tendo por base o diâmetro horizontal $\overline{AB}$. Seja $\overline{PQ}$ uma corda paralela a $\overline{AB}$. Sôbre $\overline{PQ}$ como diâmetro base, considere-se outra semi-circunferência. Determinar a posição de $\overline{PQ}$, para a qual o ponto mais alto da segunda circunferência está a uma distância máxima de $\overline{AB}$. R: *Seja* M *o ponto mais alto,* $\overline{\mathrm{AB}}=2\mathrm{R}$, O *e* O' *os pontos médios de* $\overline{\mathrm{AB}}$ *e* $\overline{\mathrm{PQ}}$, *centros das duas circunferências, e* α *o ângulo* $\widehat{\mathrm{BOQ}}$. *A distância que se pretende máxima é* $\overline{\mathrm{OM}}$ *e tem-se* $\overline{\mathrm{OM}}=\overline{\mathrm{OO'}}+\overline{\mathrm{O'M}}=\overline{\mathrm{OO'}}+\overline{\mathrm{O'Q}}=\mathrm{R}\,(\mathrm{sen}\,\alpha+\cos\alpha)$. *Basta pois procurar* α *de modo que seja máxima a função* $\mathrm{sen}\,\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$ *ou seja* $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

M. Z.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. L. — 1.º exame de freqüência, 1940

497 — Determine o intervalo de convergência da série $\dfrac{2x^2}{2^2-1}+\dfrac{2^2x^3}{3^2-1}+\dfrac{2^3x^4}{4^2-1}+\dfrac{2^4x^5}{5^2-1}+\cdots$ e o caracter da série nos extremos dêsse intervalo.

498 — Definidas as funções u e v de x pelo sistema $uv-e^x=0$, $u^v-\log x=0$ calcule $\dfrac{d^2u}{dx^2}$.

499 — Dada a equação $x\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=0$ substitua a função y de x pela função u de t sabendo que $x=\log u$ e $y=\log t$.

500 — Determine o caracter do produto infinito cujos termos são $u_1=\dfrac{1^2+2}{1^2+1}$, $u_2=\dfrac{2^2+2}{2^2+1}$, $u_3=\dfrac{3^2+2}{3^2+1}$, $\cdots$.

501 — Dada a função u de x e y definida por $u=v^2+w^2-vw$ em que $v=e^x$ e $w=e^{xy}$, calcule $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$.

502 — Dada a equação $y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ substitua as variáveis independentes x e y pela variável, t relacionadas com estas pela expressão $x^2-y^2=e^{2t}$.

503 — Desenvolva em fracção contínua a raiz positiva da equação $2x^2-4x-1=0$ e calcule, com um êrro inferior a uma décima milésima, o valor dessa raiz.

504 — Definidas as funções u e v de x e y pelo sistema $u^v+x^2=0$, $\log uv-2y=0$ calcule $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$.

505 — Dada a equação $(1-x^2)^2\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2-2x\,(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+1=0$ substitua a variável independente x pela variável t relacionada com ela pela expressão $x=\mathrm{sen}\,t$.

I. S. C. E. F. — 1.º exame de freqüência, 16 de Fev. de 1940

506 — Determinar a relação que liga A, B e C de modo que a primitiva de $\dfrac{Ax^2+Bx+C}{(x-2)^2(x-3)^2}$ seja algébrica. R: *Supondo* A, B *e* C *satisfazendo à relação procurada ter-se-á* $\displaystyle\int\frac{\mathrm{Ax^2+Bx+C}}{(\mathrm{x}-2)^2(\mathrm{x}-3)^2}\,\mathrm{dx}=\frac{\mathrm{ax+b}}{(\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}-3)}+\mathrm{const.}$, *e derivando*. $\dfrac{\mathrm{Ax^2+Bx+C}}{(\mathrm{x}-2)^2(\mathrm{x}-3)^2}=\dfrac{\mathrm{a\,(x^2-5x+6)-(ax+b)\,(2x-5)}}{(\mathrm{x}-2)^2(\mathrm{x}-3)^2}$ *donde* $\mathrm{Ax^2+Bx+C=-ax^2-2bx+6a+5b}$. *Identificando tem-se:* $\mathrm{A=-a}$, $\mathrm{B=-2b}$, $\mathrm{C=6a+5b}$, *donde por eliminação de* a *e* b: $\mathrm{C}=-6\mathrm{A}-\dfrac{5}{2}\mathrm{B}$ *ou* $12\mathrm{A}+5\mathrm{B}+2\mathrm{C}=0$.

M. Z.

507 — O integral impróprio $\displaystyle\int_0^\infty x^{-1}\,\mathrm{sen}\,(x^3-\alpha x)\,dx$ será convergente?

508 — A função $F(\alpha)=\displaystyle\int_0^\pi\log(3x+4\alpha)\,dx$ terá máximos e mínimos? R: *A função integranda* $\mathrm{f}(\mathrm{x},\alpha)=\log(3\mathrm{x}+4\alpha)$ *admite derivada em ordem a* α, $\dfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial\alpha}=\dfrac{4}{3\mathrm{x}+4\alpha}$, *contínua na região definida por* $0\leq\mathrm{x}\leq\pi$, $\alpha>0$. *Tem-se então* $\mathrm{F}'(\alpha)=\displaystyle\int_0^\pi\frac{4}{3\mathrm{x}+4\alpha}\,dx=\frac{4}{3}\log\frac{3\pi+4\alpha}{4\alpha}$. *A equação* $\mathrm{F}'(\alpha)=0$ *equivale a* $\dfrac{3\pi+4\alpha}{4\alpha}=1$ *que não tem solução finita. A função* $\mathrm{F}(\alpha)$ *não admite pois máximos nem mínimos.*

M. Z.

I. S. C. E. F. — 1.º exame de freqüência, 23 de Fev. de 1940

509 — Calcular $\displaystyle\int_0^\pi\cos x\,.\cos 2x\,.\cos 3x\,.dx$. R: *Notando que* $\cos\mathrm{x}\,.\cos2\mathrm{x}\,.\cos3\mathrm{x}=\dfrac{1}{2}(\cos3\mathrm{x}+\cos\mathrm{x})\cos3\mathrm{x}=\dfrac{1}{4}(1+\cos6\mathrm{x}+$

$+\cos 4x+\cos 2x)$, *tem-se* $\int_0^{\pi}\cos x \, . \cos 2x \, . \cos 3x \, . dx = \frac{1}{4}\Big[x + \frac{1}{6}\operatorname{sen} 6x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}$.

M. Z.

510 — Integrar por séries $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{(1-x^3)^{\frac{1}{2}}}$. R: *Tem-se* $(1-x^3)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1.3}{2^2 2!}x^6 + \cdots + \frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{2^n.n!}x^{3n} + \cdots$, *série uniformemente convergente para* $|x|<1$. *É legitimo usar o método de integração por séries visto tratar-se do intervalo* $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, *e vem:* $\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^3)^{-\frac{1}{2}}dx = \Big[x + \frac{1}{2.4}x^4 + \frac{1.3}{2^2.2!.7}x^7 + \cdots + \frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{2^n.n!.(3n+1)}x^{3n+1} + \cdots\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^5.4} + \frac{1.3}{2^9.2!.7} + \cdots + \frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{2^{4n+1}.n!.(3n+1)} + \cdots$.

M. Z.

511 — Estudar a função $F(\alpha) = \int_0^{\alpha}\alpha\log(\alpha x)\,dx$.

I. S. T. — I.º exame de freqüência, 1940

512 — Calcular o integral $\int\frac{x^3-6x^2+4x+1}{\sqrt{x^4-3x^3-3x^2+7x+6}}dx$.

513 — Averiguar a convergência ou divergência do integral $\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{2} + \frac{1}{1-e^x}\right)\frac{dx}{x}$.

514 — Sendo $u_n = \frac{2n^2x}{(1+n^2x^2)\log(n+1)}$ para qualquer valor inteiro de n, e $v_n = u_n - u_{n+1}$, averiguar se a série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ é integrável têrmo a têrmo no intervalo $(0, x)$.

515 — Calcular o integral $\int\frac{x^{-1/2}dx}{(1-x^p)(2x^p-1)^{1/2p}}$ (p inteiro).

516 — Calcular o integral $\int\frac{b^3dx}{x^6-a^6}$.

517 — Averiguar a convergência ou divergência do integral $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2(\operatorname{sen}x)^{3/2}}$.

518 — Sendo $u_n = nxe^{-nx^2}$, para qualquer valor inteiro de n, e $v_n = u_n - u_{n-1}$ verificar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ não é integrável têrmo a têrmo, no intervalo $(0, x)$.

519 — Calcular o integral $\int x^{\lambda}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{k}dx$, sendo λ e k constantes.

MECÂNICA RACIONAL

F. C. L. — Exame final, Junho de 1939

520 — Uma circunferência rola sem escorregar sôbre uma recta OX. Determinar as trajectórias fixa e móvel e a velocidade do centro instantâneo de rotação, sabendo-se que a velocidade de rotação de circunferência é w e o seu raio é r.
R: *Trajectória polar fixa*: *recta* OX; *trajectória polar móvel: circunferência dada; velocidade do centro instantâneo:* $v = wr$.

521 — Determinar o momento de inércia e o raio de giração de um triângulo isósceles rectângulo em relação à sua hipotenusa. Sabe-se que o comprimento desta é $2a$.

R: $I = \frac{Ma^2}{6}$; $K = \frac{a}{\sqrt{6}}$ ($M =$ *massa do triângulo*).

Os exercícios 520 e 521 e soluções respéctivas foram-nos cedidos pelo Dr. Jorge César Oom.

I. S. T. — I.º exame de freqüência, 1940

522 — Determinar as geodésicas da superfície $z = x^2 + y$.

523 — Escrever o desenvolvimento formal da segunda derivada covariante $X_{i/pq}^{k}$.

524 — Determinar o vector V_{α}, as direcções unidas e os invariantes da homografia $\alpha = \begin{pmatrix} 3J-2K & I+3K & J-2I \\ I & J & K \end{pmatrix}$.

525 — Transformar o sistema de funções $\begin{cases} \varphi_1(x) = x \\ \varphi_2(x) = x^2 \\ \varphi_3(x) = 3x+2 \end{cases}$ num sistema ortonormal equivalente.

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C. L. — I.º exame de freqüência, 2 de Fev. de 1940

526 — Uma urna tem a seguinte composição: 3 esferas brancas, 2 esferas pretas, 5 esferas vermelhas. Fazem-se 5 extracções, com reposição da esfera saída. Calcule as probabilidades de: *a)* saírem 2 esferas brancas e 2 esferas vermelhas; *b)* o número de esferas saídas ser quando muito 3.

R: *a)* $P = \frac{5!}{2!2!}\left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,135$. *b)* $P = 0,8125$.

M. Z.

527 — Determine k de modo que a variável $x_i = i$ a que se associa a probabilidade $p_i = \frac{ki}{1+k}$ possa ser considerada como variável casual de ordem 4 ($i = 1, 2, 3, 4$). Determinado k, calcule o valor médio, o valor quadrático médio e o desvio quadrático médio desta variável. R: $k = \frac{1}{9}$, $M(x) = 3$, $\sigma = \sqrt{M(x^2)} = \sqrt{10}$, $\mu = 1$.

M. Z.

F. C. L. — I.º exame de frequência, 9 de Fev. de 1940

528 — Tiram-se 6 cartas dum baralho de 52. Determine a probabilidade de saída de 2 damas e 1 ás (não interessa o naipe).

529 — 4 urnas têm as seguintes composições: U_1 (3 esf. br. e 2 esf. pr.), U_2 (1 esf. br. e 4 esf. pr.), U_3 (3 esf. br. e 3 esf. pr.) e U_4 (5 esf. br. e 3 esf. pr.). Tira-se uma esfera de cada urna. Calcule as probabilidades seguintes: *a)* saírem pelo menos 2 esferas brancas; *b)* o número de esferas saídas não exceder 3.

COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA E DE GEOMETRIA ANALÍTICA

F. C. C. — Exame final, 1939

530 — Achar a função pertencente a R que permuta circularmente as raízes de $f(z)=(z^2-2)(z^2-8)$.

531 — Estudar a equação recíproca irredutível de grau $2n$ com G_{2n} por grupo de Galois.

532 — Achar a função $Z=\chi(z)$ que permuta circularmente as raízes da equação $z^{100}+z^{75}+z^{50}+z^{25}+1=0$.

533 — Achar a estrutura do grupo de Galois de $z^5-\sqrt{5}=0$ no domínio de racionalidade desta equação.

F. C. C. — Exame de freqüência, Maio de 1940

534 — Verificar que

$1,\ u=(12)(34),\ v=(13)(24)$ e $w=(14)(23)$

constituem um grupo G_4, e que os 3 grupos G_2 são todos invariantes.

535 — Achar todos os divisores de um grupo circular de ordem 12 e indicar os respectivos períodos.

536 — Mostrar que todo o grupo constituído por potências de uma substituïção é necessàriamente circular.

537 — Verificar que

$$s_1=(123)(456),\ s_2=(132)(456),\ s_3=(14)(25)(36),$$
$$s_4=s_3\,s_1=(153426),\ s_5=s_3\,s_2=(162435)$$

formam com a identidade um grupo G_6. Indicar se é *transitivo* e *imprimitivo*.

F. C. L. — Pontos de exame de 1940

538 — Designando α um número inteiro e S uma substituïção de n elementos de período β mostre que S^α e S têm o mesmo período se α e β são primos entre si.

539 — É dado um triângulo rectângulo ABC ($\widehat{A}=90^o$). Os vértices B e C deslocam-se sôbre duas rectas perpendiculares. Determine o lugar geométrico de A.

540 — Mostre que o conjunto dos valores de $\sqrt[n]{1}$ forma um grupo tomando para lei de composição o produto de complexos.

MECÂNICA CELESTE

F. C. P. (1938)

541 — *Sôbre a cinemática relativista.*

Consideremos um sistema material cuja configuração no referencial $R(x, y, z, t)$ é um plano π_t animado de um movimento de translação de velocidade $\mathbf{u}$. E suponhamos que o referencial $\bar{R}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ está relacionado com o anterior R, mediante as fórmulas de Lorentz

$$I.\ \left(\bar{x}=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \bar{y}=y,\ \bar{z}=z,\ \bar{t}=\frac{t-\dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}\quad \beta=\frac{v}{c}\right).$$

Determinar a condição para que a configuração, do sistema material neste referencial $\bar{R}$ seja anàlogamente um plano $\pi_{\bar{t}}$, animado de uma translação $\bar{\mathbf{u}}$.

Nota. — Configuração de um sistema material S *na data* t *de um referencial* R *é o lugar geométrico das posições (simultâneas), na data* t, *dos diferentes pontos materiais de* S.

Ex. sugerido pelo *problema de E. Esclagon* in *La Notion de Temps, pág. 45 a 48.*

R. L. G.

FÍSICA MATEMÁTICA

F. C. P. — 1.º Exame de freqüência, 10 de Fev. de 1940

542 — Sejam $A(x)$, $A(y)$, $A(z)$ as *matrizes associadas* (1) (E. Cartan) aos vectores reais, x, y, z cujas coordenadas normais são (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3).

Calcular os dois sistemas de matrizes

$$\mathrm{I}\ \begin{cases} A(x)\,A(y)+A(y)\,A(x)\\ A(y)\,A(z)+A(z)\,A(y)\\ A(z)\,A(x)+A(x)\,A(z)\end{cases}$$

$$\mathrm{II}\ \begin{cases} A(x)\,A(y)-A(y)\,A(x)\\ A(y)\,A(z)-A(z)\,A(y)\\ A(z)\,A(x)-A(x)\,A(z)\end{cases}$$

Exprimir o sistema II em função das matrizes associadas a novos vectores.

A que condição geométrica devem satisfazer os vectores x, y, z para que as suas matrizes associadas sejam comutáveis entre si duas a duas? A condição será ainda a mesma no caso de as matrizes anticomutarem?

Que forma assumem os sistemas I e II na hipótese de x, y, z constituirem um terno orto-normado?

Essa forma será função do sentido do terno x, y, z?

Seja e_1 um vector fundamental de $A(x)$ e representemos por e_2 o vector $A(y)\,e_1$ ou $A(z)\,e_1$. Supondo ainda que x, y, z formam um terno orto-normado, e_1 e e_2 constituirão uma base?

Fazer a representação das três matrizes $A(x)$, $A(y)$, $A(z)$ na base e_1, e_2.

543 — Sejam $a_1, a_2 \cdots a_n$ n vectores reais e independentes de um espaço métrico E_n. E suponhamos que, aplicando-lhes o processo de ortogonalização de Schmidt, se obtêm os vectores $b_1, b_2, \cdots b_n$. Que relação de grandeza é que existe entre as normas dos dois vectores quaisquer de um mesmo índice?

Identificando $a_1, a_2, \cdots a_n$ com as linhas de uma matriz real A e recorrendo ao produto AA' demonstrar que $(\text{det.}\,A)^2 \leq \prod_{i=1}^{n}(a_i\,, a_i)$.

544 — Sejam $B_1, B_2, \cdots B_p$ p matrizes de 4.ª ordem que satisfazem às condições $B_i^2=-1$, $B_i\,B_k+B_k\,B_i=0$. Demonstrar que p não pode exceder o número 5: $p\leq 5$.

Indicação: Verificar que B_j transforma todo o vector fundamental de B_k $(k\neq j)$ em um vector que é também fundamental (de B_k). E aproveitar êste resultado para construir a base de representação das matrizes B_i $(j=1, 2, 3, \cdots p)$.

(1) $A(x)=\begin{Vmatrix} x_3 & x_1-ix_2\\ x_1+ix_2 & -x_3\end{Vmatrix}$