PROBLEMAS DIVERSOS

PROBLEMAS RESOLVIDOS

Séries

545 — Achar o termo geral do desenvolvimento de $y=e^x \cos x$ em série inteira em x. R: y *é a parte real de* $z=e^x(\cos x+i \operatorname{sen} x)=e^{x(1+i)}$. *Ora,* $z=\sum \frac{x^n}{n!}(1+i)^n=\sum \frac{x^n}{n!}\left[1+ni+\frac{n(n-1)}{2}i^2+\cdots\right]$. *Será, pois,* $y=\sum\left[\frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{k=p}(-1)^k\binom{n}{2k}\right]$, *designando por* 2p *o maior número par contido em* m.

546 — Demonstrar a convergência das séries $(S)\ 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots$ e $(S')\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$, que são formadas pelos mesmos termos, e achar a relação que liga as respectivas somas. R: (S') *é evidentemente convergente. Como em* (S) *há dois termos positivos por cada têrmo negativo, se agruparmos os termos* 3 *a* 3, *o enésimo grupo será* $(n=1,2,\cdots)$ $\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}$, *visto os primeiros* n *números pares serem* $2,\cdots 2n$, *e os primeiros* 2n *números ímpares serem* $1,\cdots 2n-1, 2n+1,\cdots 4n-1$. *Associando todos os termos positivos consecutivos, obtem-se a nova série* $\frac{4}{3}-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{8n-4}{(4n-1)(4n-3)}-\frac{1}{2n}+\cdots$ *que é alternada, de termos decrescentes e de limite nulo. Esta série é, pois, convergente e, portanto, também o é a proposta. Por outro lado,* $S_{3n}=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4n-1}-\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$, $S'_{4n}=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4n-1}-\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)$, $S_{3n}-S'_{3n}=\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{5}+\cdots+\left(\frac{1}{4n}-\frac{1}{2n}\right)\right]=\frac{1}{2}S'_{2n}$; *logo,* $S=\frac{3}{2}S'$.

Funções contínuas e medida L

547 — Pode uma função contínua transformar um conjunto de medida nula num conjunto de medida positiva? Pode. R: *Sejam* $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ *as equações de uma curva que enche o quadrado de vértices opostos* $(0,0)$ *e* $(1,1)$. *É mensurável o conjunto* (τ) *dos valores de* t *que fazem* $\varphi(t)=\xi$. *Ora, se todos êsses conjuntos* (τ) *tivessem medida positiva, seria possível com as medidas de alguns dêles exceder a medida do intervalo* $(0,1)$ *da curva, — o que é manifestamente absurdo. Logo, há conjuntos* (τ) *de medida nula que uma função contínua —* $y=\psi(t)$ *— transforma em* $(0,1)$.

PROBLEMAS PROPOSTOS

548 — Mostrar que tôda a transformação L ortogonal, real, da 3.ª ordem e det. $=+1$, representa uma rotação.

O ângulo de rotação — θ — e os cosenos directores — c_1, c_2, c_3 — do respectivo eixo (de rotação) são dados pelas fórmulas $1+2\cos\theta=l_{11}+l_{22}+l_{33}$, $c_i^2=\frac{l_{ii}-\cos\theta}{1-\cos\theta}$. Exprimir l_{ij} — elemento geral de L — em função de θ e dos c_i. Deve dar: $l_{ij}=\cos\theta\,.\,\delta_{ij}+(1-\cos\theta)\,c_i\,c_j+\operatorname{sen}\theta\,.\,c_{ij}$.

c_{ij} — elemento geral da matriz hemi-simétrica

$$\left\|\begin{matrix} 0 & c_3 & -c_2 \\ -c_3 & 0 & c_1 \\ c_2 & -c_1 & 0 \end{matrix}\right\|.$$

(Ex. proposto em Madelung—Die Mathematischen Hiefsmittel des Physikers (1936) — pág. 102, 103).

Indicação: calcular as constantes e os vectores fundamentais de L. R. L. G.

549 — Sendo

$$B=\left\|\begin{matrix} 1 & c_3\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} & -c_2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \\ -c_3\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} & 1 & c_1\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \\ c_2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} & -c_1\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} & 1 \end{matrix}\right\|,\quad \sum_{i=1}^{3}c_i^2=1,$$

mostrar que $A=(B')^{-1}.B$ representa uma rotação em tôrno do eixo (c_1, c_2, c_3), de ângulo θ.

Indicação: escrever $B=1+C$, $C=-C'$, e calcular as constantes e vectores fundamentais de C. Deduzir depois as constantes e vectores fundamentais de A.

(Ex. proposto em Frazer, Duncan and Collar — Elementary Matrices — pág. 253.) R. L. G.

550 — Demonstrar que AB e BA têm as mesmas constantes fundamentais.

NOTA — *Turnbull and Aitken, em «An introduction to the theory of canonical matrices», pág. 181, (London, 1932) e Mac Duffee em «The theory of matrices», pág. 23, (Berlin, 1933) fazem a demonstração daquêle resultado, que Sylvester enunciou,* sem demonstração, *em 1883, no vol. 16 — Philos. Mag. Demonstra-se, porém, muito fàcilmente notando que* $(BA)\,Bx=\lambda Bx$ *quando* $ABx=\lambda x$, *e* $(AB)\,Ax=\mu Ax$ *quando* $BAx=\mu x$. *Isto para* λ *e* $\mu\neq 0$. *Para* λ *ou* $\mu=0$ *basta notar que, então,* $|AB|=|BA|=0$. R. L. G.

551 — Sejam $x(x_1, x_2, x_3)$ e $X(X_1, X_2, X_3)$ as coordenadas de um mesmo vector em dois ternos orto-normados (directos) τ e T. Supondo que as coordenadas e a posição relativa dos dois ternos são funções dum parâmetro t, exprimir $\frac{dX}{dt}\left(\frac{dX_1}{dt}, \frac{dX_2}{dt}, \frac{dX_3}{dt}\right)$ em função de x e $\frac{dx}{dt}$. Que aplicação pode fazer dêstes resultados à teoria do movimento relativo?

R. L. G.

552 — A soma da série constituída pelos inversos de tôdas as potências que têm por base e expoente um número inteiro superior à unidade é precisamente a unidade.

553 — Se cada uma das letras $p_1, p_2, p_3, \cdots p_n, \cdots$ for capaz de assumir, independentemente das outras, uma infinidade numerável de valores distintos, o conjunto das sucessões $p_1, p_2, \cdots p_n, \cdots$ tem a potência do contínuo.

554 — Se cada uma das letras p_i for capaz de assumir, independentemente das outras, uma infinidade contínua de valores, o conjunto das sucessões (S) $p_1, p_2, p_3, \cdots p_n, \cdots$ tem a potência do contínuo.

Os problemas números 545, 546 e 547 e respectivas soluções foram-nos cedidos pelo Prof. Doutor José Vicente Gonçalves bem como os problemas números 552, 553 e 554.

RESOLUÇÃO DUM PROBLEMA PROPOSTO NO N.º 4

432 — Seja a elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ e seja P um dos vértices de um dos rectângulos que podem inscrever-se nela (estes constituem uma simples infinidade e os seus lados são, necessàriamente, paralelos aos eixos da elipse). As coordenadas do ponto P são, por exemplo, $\left(x, +\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)$ e a área do rectângulo terá por medida $S=4\frac{b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}$.

Ora, S é máxima com $y=x^2(a^2-x^2)$ e tem-se, sucessivamente, $y'=2x(a^2-x^2)-2x^3=2a^2x-4x^3$, $y''=2a^2-12x^2$, $a^2x-2x^3=0 \rightarrow x(a^2-2x^2)=0 \rightarrow x=0$ e $x=\frac{\sqrt{2}a}{2}$; a primeira raiz corresponde a um mínimo de S e a segunda a um máximo, visto que $y''_{\frac{\sqrt{2}a}{2}}=-4a^2<0$.

Outra solução — A área do rectângulo de dimensões $2x$ e $2y$ tem por medida $S=4xy$. Mas (x, y) deverá ser um ponto da elipse de equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Logo, as condições de estacionaridade da área S do rectângulo inscrito na elipse serão

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} x=\frac{\sqrt{2}a}{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}b}{2}, \end{array}\right.$$

valores que correspondem, necessàriamente, ao máximo.

A. Sá da Costa

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Realizou-se a assembleia geral da Sociedade Portuguesa de Matemática, para aprovação dos estatutos e eleição dos corpos gerentes. A direcção ficou assim constituída: Presidente, prof. Pedro José da Cunha; vice-presidente, prof. Victor Hugo de Lemos; tesoureiro, dr. Manuel Zaluar Nunes; secretário geral, dr. António Monteiro; 1.º secretário, dr.ª Maria Pilar Ribeiro; 2.º secretário, dr. Augusto Sá da Costa. Também foi eleita a mesa da assembléia geral.

Para delegados à Associação para o Progresso das Ciências foram escolhidos o prof. Bento de Jesus Caraça e o prof. Francisco Leite Pinto.

A Sociedade Portuguesa de Matemática (S. P. M.) tem por objectivo cultivar e promover o estudo das Ciências Matemáticas, puras e aplicadas. Pode ser admitido como sócio ordinário qualquer indivíduo de nacionalidade portuguesa ou estrangeira. Os sócios residentes em Coimbra e no Pôrto poderão constituir núcleos de trabalho cientìficamente autónomos. Os socios residentes em qualquer cidade do território nacional poderão solicitar da direcção autorização para constituirem um núcleo da Sociedade nessa cidade.

Estão já inscritos mais de cem sócios, o que revela um acolhimento muito favorável da parte do público, para os objectivos que a Sociedade se propôs atingir.

RECTIFICAÇÕES

Por lapso no n.º 4 da «Gazeta de Matemática» atribui-se ao professor da Universidade do Pôrto, dr. A. Madureira e Sousa a resolução de «Um problema de Geometria Analítica», devida ao professor da mesma Universidade Dr. Ruy Luís Gomes. A presente rectificação foi-nos solicitada por carta que nos escreveu o professor Madureira e Sousa onde nos indicou também que encontrou o problema em: «Lezioni di Geometria Analitica» (5.ª ed., pág. 43) de Guido Castelnuovo, onde figura sem demonstração.

— A resposta correcta do n.º 379 é: m *deve satisfazer simultâneamente às desigualdades* $4^2-(m-1)^2<0$ e $m+1>0$ *donde se deduz* $m>3$.

M. Z.

— Pediamos aos nossos leitores o favor de assinalarem à redacção da «Gazeta de Matemática» todas as incorrecções que notem, ou dúvidas encontradas que tentaremos esclarecer.

ASSINATURAS

A partir dêste número, e devido às circunstâncias do momento, somos forçados, bem contra a nossa vontade, a aumentar o preço da «Gazeta» para 1\$00 por número: conseqüentemente o preço das assinaturas aumenta e passa a ser de 15\$00 por cada 4 números (1 ano). Os números especiais terão preço variável, função do número de páginas.