PROBLEMAS DIVERSOS

PROBLEMAS RESOLVIDOS

Séries

545 — Achar o termo geral do desenvolvimento de $y=e^x \cos x$ em série inteira em x. R: y *é a parte real de* $z=e^x(\cos x+i \operatorname{sen} x)=e^{x(1+i)}$. *Ora,* $z=\sum \frac{x^n}{n!}(1+i)^n=\sum \frac{x^n}{n!}\left[1+ni+\frac{n(n-1)}{2}i^2+\cdots\right]$. *Será, pois,* $y=\sum\left[\frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{k=p}(-1)^k\binom{n}{2k}\right]$, *designando por* 2p *o maior número par contido em* m.

546 — Demonstrar a convergência das séries $(S)\ 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots$ e $(S')\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$, que são formadas pelos mesmos termos, e achar a relação que liga as respectivas somas. R: (S') *é evidentemente convergente. Como em* (S) *há dois termos positivos por cada têrmo negativo, se agruparmos os termos* 3 *a* 3, *o enésimo grupo será* $(n=1,2,\cdots)\ \frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}$, *visto os primeiros* n *números pares serem* $2,\cdots 2n$, *e os primeiros* 2n *números ímpares serem* $1,\cdots 2n-1, 2n+1, \cdots 4n-1$. *Associando todos os termos positivos consecutivos, obtem-se a nova série* $\frac{4}{3}-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{8n-4}{(4n-1)(4n-3)}-\frac{1}{2n}+\cdots$ *que é alternada, de termos decrescentes e de limite nulo. Esta série é, pois, convergente e, portanto, também o é a proposta. Por outro lado,* $S_{3n}=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4n-1}-\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$, $S'_{4n}=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4n-1}-\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)$, $S_{3n}-S'_{4n}=\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{5}+\cdots+\left(\frac{1}{4n}-\frac{1}{2n}\right)\right]=\frac{1}{2}S'_{2n}$; *logo,* $S=\frac{3}{2}S'$.

Funções contínuas e medida L

547 — Pode uma função contínua transformar um conjunto de medida nula num conjunto de medida positiva? Pode. R: *Sejam* $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ *as equações de uma curva que enche o quadrado de vértices opostos* $(0,0)$ *e* $(1,1)$. *É mensurável o conjunto* (τ) *dos valores de* t *que fazem* $\varphi(t)=\xi$. *Ora, se todos êsses conjuntos* (τ) *tivessem medida positiva, seria possível com as medidas de alguns dêles exceder a medida do intervalo* $(0,1)$ *da curva, — o que é manifestamente absurdo. Logo, há conjuntos* (τ) *de medida nula que uma função contínua —* $y=\psi(t)$ *— transforma em* $(0,1)$.

PROBLEMAS PROPOSTOS

548 — Mostrar que tôda a transformação L ortogonal, real, da 3.ª ordem e det. $=+1$, representa uma rotação.

O ângulo de rotação — θ — e os cosenos directores — c_1, c_2, c_3 — do respectivo eixo (de rotação) são dados pelas fórmulas $1+2\cos\theta=l_{11}+l_{22}+l_{33}$, $c_i^2=\frac{l_{ii}-\cos\theta}{1-\cos\theta}$. Exprimir l_{ij} — elemento geral de L — em função de θ e dos c_i. Deve dar: $l_{ij}=\cos\theta\,.\,\delta_{ij}+(1-\cos\theta)\,c_i\,c_j+\operatorname{sen}\theta\,.\,c_{ij}$.

c_{ij} — elemento geral da matriz hemi-simétrica

$$\begin{Vmatrix} 0 & c_3 & -c_2 \\ -c_3 & 0 & c_1 \\ c_2 & -c_1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

(Ex. proposto em Madelung—Die Mathematischen Hiefsmittel des Physikers (1936) — pág. 102, 103).

Indicação: calcular as constantes e os vectores fundamentais de L. R. L. G.

549 — Sendo

$$B=\begin{Vmatrix} 1 & c_3\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} & -c_2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \\ -c_3\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} & 1 & c_1\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \\ c_2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} & -c_1\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} & 1 \end{Vmatrix}, \quad \sum_{i=1}^{3}c_i^2=1,$$

mostrar que $A=(B')^{-1}.B$ representa uma rotação em tôrno do eixo (c_1, c_2, c_3), de ângulo θ.

Indicação: escrever $B=1+C$, $C=-C'$, e calcular as constantes e vectores fundamentais de C. Deduzir depois as constantes e vectores fundamentais de A.

(Ex. proposto em Frazer, Duncan and Collar — Elementary Matrices — pág. 253.) R. L. G.

550 — Demonstrar que AB e BA têm as mesmas constantes fundamentais.

NOTA — *Turnbull and Aitken, em «An introduction to the theory of canonical matrices», pág. 181, (London, 1932) e Mac Duffee em «The theory of matrices», pág. 23, (Berlin, 1933) fazem a demonstração daquêle resultado, que Sylvester enunciou,* sem demonstração, *em 1883, no vol. 16 — Philos. Mag. Demonstra-se, porém, muito fàcilmente notando que* $(BA)\,Bx=\lambda Bx$ *quando* $ABx=\lambda x$, *e* $(AB)\,Ax=\mu Ax$ *quando* $BAx=\mu x$. *Isto para* λ *e* $\mu\neq 0$. *Para* λ *ou* $\mu=0$ *basta notar que, então,* $|AB|=|BA|=0$. R. L. G.

551 — Sejam $x\,(x_1, x_2, x_3)$ e $X\,(X_1, X_2, X_3)$ as coordenadas de um mesmo vector em dois ternos orto-normados (directos) τ e T. Supondo que as coordenadas e a posição relativa dos dois ternos são funções dum parâmetro t, exprimir $\frac{dX}{dt}\left(\frac{dX_1}{dt}, \frac{dX_2}{dt}, \frac{dX_3}{dt}\right)$ em função de x e $\frac{dx}{dt}$. Que aplicação pode fazer dêstes resultados à teoria do movimento relativo?

R. L. G.