ANO III - N.º 9 GAZETA DE MATEMÁTICA JANEIRO-1942

AOS INCAUTOS

O problema da quadratura do círculo

«Se um matemático recebesse, hòje, uma suposta quadratura do círculo, poderia, ou não, agradecer cortezmente ao autor mas, é quási certo, atiraria o manuscrito para o cesto dos papéis». [*E. T. Bell, Men of Mathematics, Londres, 1937. p. 354*].

«A partir de 1882 não deveríamos assistir ao florescimento de qualquer quadratura... *e às vêzes!»* [*F. Ghersi, Matematica dilettevole e curiosa, Milão 1929, p. 491*].

...Apesar de tudo, não deixa de ser oportuno recordar, ràpidamente, em que consiste o problema e as razões da impossibilidade da sua resolução.

1. *Em que consiste o problema.*

Como afirma Lucien Godeaux (Les Géométries, p. 21-23, A. Colin-Paris 1937), o problema da quadratura do círculo oferece dois aspectos equivalentes:

a) determinar, pelo cálculo, a medida da área dum círculo de raio dado, ou, o que é o mesmo, determinar a razão das medidas do perímetro da circunferência de igual raio e do seu diâmetro;

b) construir, com o emprêgo exclusivo da régua e do compasso, um quadrado equivalente a um círculo de raio dado.

O problema é velho. Já no século V A. C. os gregos se ocupavam dêle e dos problemas da trisecção do ângulo e da duplicação do cubo. Foi objecto de estudo durante vinte e quatro séculos. Se as tentativas de resolução do problema falharam tôdas, nem por isso êle deixa de possuir o mérito de ter provocado, subsidiàriamente, a descoberta ou o estudo doutras questões.

Arquimedes reduziu o problema da quadratura do círculo ao cálculo da razão das medidas do perímetro da circunferência e do seu diâmetro, isto é, ao cálculo do número que actualmente se representa por π. Pela consideração de dois polígonos de 96 lados, um inscrito, outro circunscrito à circunferência provou que $223/71 < \pi < 22/7$.

2. *Razões da impossibilidade da sua resolução.*

Descartes (1596-1650) prova (La Géométrie, Leyde-1638) que a construção, com o emprêgo exclusivo da régua e do compasso, dum segmento rectilíneo de comprimento x é possível sempre que e só quando $\pm x$ é raiz duma equação algébrica de coeficientes racionais inteiros e pode obter-se mediante a efectivação dum número finito de operações racionais e extracções de raízes quadradas, sôbre os coeficientes da equação ou sôbre números obtidos dêstes por aquelas operações (V., por exemplo, L. E. Dickson, Modern Algebraic Theories, p. 204-200, New-York, 1930).

Mais de dois séculos decorreram sem que pudesse afirmar-se a possibilidade ou a impossibilidade do problema da quadratura do círculo. A questão só foi, definitivamente, esclarecida no último quartel do século XIX.

Em 1826, Abel (1802-1829) prova que a equação geral de grau superior ao quarto não é resolúvel por meio de radicais, isto é, as suas raízes não podem, em geral, determinar-se efectuando um número finito de operações racionais e extracções de raízes, sôbre os coeficientes da equação, ou sôbre números obtidos dêstes pelas mesmas operações.

Pouco depois, Galois (1811-1832) estabelece o critério da resolubilidade duma equação algébrica por meio de radicais.

Nesta altura, para saber se o problema da quadratura do círculo é possível ou não, havia que dar resposta às seguintes preguntas: ¿o número π pode ser ou não raiz duma equação algébrica de coeficientes inteiros? se existir uma tal equação que admita π como raiz, ¿ela será ou não resolúvel por meio de radicais? no caso afirmativo, ¿os radicais são ou não todos de índice 2?

É F. Lindemann (1852-1919) que responde. Em 1882, seguindo o método que Hermite utilizou para demonstrar que e, base do sistema de logaritmos neperianos, é um número transcendente, Lindemann prova que π é também um número transcendente. Por conseqüência, π não pode ser raiz duma equação algébrica de coeficientes intei-