AOS INCAUTOS

O problema da quadratura do círculo

«Se um matemático recebesse, hoje, uma suposta quadratura do círculo, poderia, ou não, agradecer cortezmente ao autor mas, é quási certo, atiraria o manuscrito para o cesto dos papéis». [E. T. Bell, Men of Mathematics, Londres, 1937. p. 354].

«A partir de 1882 não deveriamos assistir ao florescimento de qualquer quadratura... *e às vêzes!» [F. Ghersi, Matematica dilettevole e curiosa, Milão 1929, p. 491].*

...Apesar de tudo, não deixa de ser oportuno recordar, ràpidamente, em que consiste o problema e as razões da impossibilidade da sua resolução.

1. *Em que consiste o problema.*

Como afirma Lucien Godeaux (Les Géométries, p. 21-23, A. Colin-Paris 1937), o problema da quadratura do círculo oferece dois aspectos equivalentes:

a) determinar, pelo cálculo, a medida da área dum círculo de raio dado, ou, o que é o mesmo, determinar a razão das medidas do perímetro da circunferência de igual raio e do seu diâmetro;

b) construir, com o emprêgo exclusivo da régua e do compasso, um quadrado equivalente a um círculo de raio dado.

O problema é velho. Já no século V A. C. os gregos se ocupavam dêle e dos problemas da trisecção do ângulo e da duplicação do cubo. Foi objecto de estudo durante vinte e quatro séculos. Se as tentativas de resolução do problema falharam tôdas, nem por isso êle deixa de possuir o mérito de ter provocado, subsidiàriamente, a descoberta ou o estudo doutras questões.

Arquimedes reduziu o problema da quadratura do círculo ao cálculo da razão das medidas do perímetro da circunferência e do seu diâmetro, isto é, ao cálculo do número que actualmente se representa por π. Pela consideração de dois polígonos de 96 lados, um inscrito, outro circunscrito à circunferência provou que $223/71 < \pi < 22/7$.

2. *Razões da impossibilidade da sua resolução.*

Descartes (1596-1650) prova (La Géométrie, Leyde-1638) que a construção, com o emprêgo exclusivo da régua e do compasso, dum segmento rectilíneo de comprimento x é possível sempre que e só quando $\pm x$ é raiz duma equação algébrica de coeficientes racionais inteiros e pode obter-se mediante a efectivação dum número finito de operações racionais e extracções de raízes quadradas, sôbre os coeficientes da equação ou sôbre números obtidos dêstes por aquelas operações (V., por exemplo, L. E. Dickson, Modern Algebraic Theories, p. 204-200, New-York, 1930).

Mais de dois séculos decorreram sem que pudesse afirmar-se a possibilidade ou a impossibilidade do problema da quadratura do círculo. A questão só foi, definitivamente, esclarecida no último quartel do século XIX.

Em 1826, Abel (1802-1829) prova que a equação geral de grau superior ao quarto não é resolúvel por meio de radicais, isto é, as suas raízes não podem, em geral, determinar-se efectuando um número finito de operações racionais e extracções de raízes, sôbre os coeficientes da equação, ou sôbre números obtidos dêstes pelas mesmas operações.

Pouco depois, Galois (1811-1832) estabelece o critério da resolubilidade duma equação algébrica por meio de radicais.

Nesta altura, para saber se o problema da quadratura do círculo é possível ou não, havia que dar resposta às seguintes preguntas: ¿o número π pode ser ou não raiz duma equação algébrica de coeficientes inteiros? se existir uma tal equação que admita π como raiz, ¿ela será ou não resolúvel por meio de radicais? no caso afirmativo, ¿os radicais são ou não todos de índice 2?

É F. Lindemann (1852-1919) que responde. Em 1882, seguindo o método que Hermite utilizou para demonstrar que e, base do sistema de logaritmos neperianos, é um número transcendente, Lindemann prova que π é também um número transcendente. Por conseqüência, π não pode ser raiz duma equação algébrica de coeficientes inteiros e o problema da quadratura do círculo não pode resolver-se com o emprêgo exclusivo da régua e do compasso.

Hermite demonstrou que o número e é transcendente em 1873 (Sur la fonction exponentielle, Paris 1874). Na Enciclopedia delle Matematiche Elementari encontrará o leitor a demonstração no Volume I, Parte I, p. 207-210.

Lindemann provou que π é um número transcendente nos Matematische Annalen (1882) p. 213. Na Enciclopedia citada encontra-se a demonstração da transcendência de π no Volume I, Parte I, p. 210-212.

...E, quem se atribua, a si mesmo, o mérito duma *genial resolução* do problema da quadratura do círculo com o emprêgo exclusivo da régua e do compasso, embora se escude com atributos de que a ciência não cuida e se confesse *vítima* de súbita inspiração que a verdade do resultado não prova, dá mostras de invulgar, inexcedível, cretinismo.

A. SÁ DA COSTA

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exame de aptidão às Escolas Superiores (1941)

Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e de engenheiro geógrafo.

Ponto n.º 1

795 — Determine m de modo que a equação $(m-5)x^4-4mx^2+m-2=0$ tenha tôdas as raízes reais. R: *Para que as raízes da equação proposta sejam tôdas reais é necessário que as da sua resolvente sejam ambas positivas, para o que é necessário que* $\Delta=4m^2-(m-5)(m-2)\geq 0$, *que o produto das raízes* $P=(m-2):(m-5)\geq 0$, *e que a soma* $S=4m:(m-5)\geq 0$. *Os valores de* m *que satisfazem à 1.ª desigualdade são:* $1\leq m$ *e* $m\leq -10/3$, *os que satisfazem à 2.ª* $m\leq 2$ *e* $m>5$; *e a 3.ª é satisfeita para* $m\leq 0$ *e* $m>5$; *quere dizer os valores de* m *que satisfazem simultâneamente às três desigualdades, e resolvem por isso o problema, são:* $m\leq -10/3$ *e* $m>5$.

796 — Indique as relações que há entre os coeficientes de uma equação do 2.º grau e as suas raízes. Forme uma equação do 2.º grau que admita as raízes $m+\sqrt{n}$ e $m-\sqrt{n}$. R: *Se fôr* $ax^2+bx+c=0$ *a equação do 2.º grau e* x' *e* x'' *as suas raízes é* $P=x'x''=c/a$ *e* $S=x'+x''=-b/a$. *A equação pedida é* $x^2-2mx+m^2-n=0$.

797 — Verifique que ${}^nC_{p+1}={}^nC_p\dfrac{n-p}{p+1}$; ${}^{n+1}A_{p+1}=(n+1)\,{}^nA_p$ e $P_n=n\,.\,P_{n-1}$ sendo: ${}^nC_p$ o número de combinações de n objectos tomados p a p, ${}^nA_p$ o número de arranjos de n objectos tomados p a p e P_n o número de permutações n objectos.

$$\text{R: } {}^nC_{p+1}=\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)(n-p)}{(p+1)!}=$$
$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}\times\frac{n-p}{p+1}={}^nC_p\frac{n-p}{p+1}$$

${}^{n+1}A_{p+1}=(n+1)\,n\,(n-1)\cdots(n-p+1)=(n+1)\,{}^nA_p$ *e* $P_n=n(n-1)(n-2)\cdots 2\,.\,1=nP_{n-1}$.

798 — Calcule, por logaritmos, a área de um triângulo rectângulo em que um dos catetos tem de comprimento 43,962 m e o ângulo oposto a êsse cateto mede $21^\circ\,46'\,32''$. R: *A área é dada pela expressão* $A=1/2\,.\,43{,}962^2\,.\,\mathrm{cotg}\,21^\circ\,46'\,32''$ *logo* $\log A=\mathrm{colg}\,2+2\log 43{,}962+\mathrm{logcotg}\,21^\circ\,46'\,32''=\bar{1}{,}69897+3{,}28616+0{,}39887=3{,}38400$ *e* $A=2421{,}0\,m^2$.

799 — Calcule, sem recorrer às tábuas de logaritmos, os valores de $\sec(-300^\circ)$ e de $\mathrm{tg}\,17\pi/4$. R: $\sec(-300^\circ)=\sec 300^\circ=\sec 60^\circ=1/\cos 60^\circ=2$ $\mathrm{tg}\,17\pi/4=\mathrm{tg}\,(4\pi+\pi/4)=\mathrm{tg}\,\pi/4=1$.

800 — Verifique a identidade $\mathrm{tg}\,2a+\sec 2a=(\cos a+\mathrm{sen}\,a):(\cos a-\mathrm{sen}\,a)$. R: $\mathrm{tg}\,2a+\sec 2a=2\,\mathrm{tg}\,a:(1-\mathrm{tg}^2a)+1:(\cos^2-\mathrm{sen}^2a)=2\,\mathrm{tg}\,a\times\cos^2a:(\cos^2a-\mathrm{sen}^2a)+1:(\cos^2a-\mathrm{sen}^2a)=(2\,\mathrm{sen}\,a\cos a+1):(\cos^2a-\mathrm{sen}^2a)=(\mathrm{sen}\,a+\cos a)^2:(\cos a^2-\mathrm{sen}^2a)=(\mathrm{sen}\,a+\cos a):(\cos a-\mathrm{sen}\,a)$.

801 — Num paralelogramo $ABCD$ una o vértice B com o meio E do lado CD e o vértice D com o meio F do lado AB. Demonstre que a diagonal AC é dividida em 3 partes iguais pelas rectas BE e DF. R: *Tem-se como se vê fàcilmente* DF//BE. *E aplicando o teorema de Thales tem-se* $AO:OP=AF:FB$ *e portanto* $AO=OP$ *por ser* $AF=FB$ *e* $OP:PC=DE:EC$ *donde* $OP=PC$, *e será então* $AO=OP=PC$, *c. q. p.*

802 — Decomponha 216 em factores primos. ¿Conclui-se dessa decomposição que 216 é um cubo perfeito? Porquê? Qual é a raiz cúbica do número 216? R: $216=2^3\times 3^3=(2\times 3)^3=6^3$ *e* $\sqrt[3]{126}=6$.

Curso de habilitação para professores de desenho nos liceus

Ponto n.º 3

803 — Indique as condições a que deve satisfazer k para que a inequação $x^2-(3k+1)x+(2k^2+k+9/4)>0$ seja verificada para qualquer valor real atribuído a x. R: *O trinómio terá que*