ros e o problema da quadratura do círculo não pode resolver-se com o emprêgo exclusivo da régua e do compasso.

Hermite demonstrou que o número e é transcendente em 1873 (Sur la fonction exponentielle, Paris 1874). Na Enciclopedia delle Matematiche Elementari encontrará o leitor a demonstração no Volume I, Parte I, p. 207-210.

Lindemann provou que π é um número transcendente nos Matematische Annalen (1882) p. 213. Na Enciclopedia citada encontra-se a demonstração da transcendência de π no Volume I, Parte I, p. 210-212.

...E, quem se atribua, a si mesmo, o mérito duma *genial resolução* do problema da quadratura do círculo com o emprêgo exclusivo da régua e do compasso, embora se escude com atributos de que a ciência não cuida e se confesse *vítima* de súbita inspiração que a verdade do resultado não prova, dá mostras de invulgar, inexcedível, cretinismo.

A. SÁ DA COSTA

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exame de aptidão às Escolas Superiores (1941)

Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e de engenheiro geógrafo.

Ponto n.º 1

795 — Determine m de modo que a equação $(m-5)x^4-4mx^2+m-2=0$ tenha tôdas as raízes reais. R: *Para que as raízes da equação proposta sejam tôdas reais é necessário que as da sua resolvente sejam ambas positivas, para o que é necessário que* $\Delta=4m^2-(m-5)(m-2)\geq 0$, *que o produto das raízes* $P=(m-2):(m-5)\geq 0$, *e que a soma* $S=4m:(m-5)\geq 0$. *Os valores de* m *que satisfazem à 1.ª desigualdade são:* $1\leq m$ *e* $m\leq -10/3$, *os que satisfazem à 2.ª* $m\leq 2$ *e* $m>5$; *e a 3.ª é satisfeita para* $m\leq 0$ *e* $m>5$; *quere dizer os valores de* m *que satisfazem simultâneamente às três desigualdades, e resolvem por isso o problema, são:* $m\leq -10/3$ *e* $m>5$.

796 — Indique as relações que há entre os coeficientes de uma equação do 2.º grau e as suas raízes. Forme uma equação do 2.º grau que admita as raízes $m+\sqrt{n}$ e $m-\sqrt{n}$. R: *Se fôr* $ax^2+bx+c=0$ *a equação do 2.º grau e* x' *e* x'' *as suas raízes é* $P=x'x''=c/a$ *e* $S=x'+x''=-b/a$. *A equação pedida é* $x^2-2mx+m^2-n=0$.

797 — Verifique que ${}^{n}C_{p+1}={}^{n}C_{p}\dfrac{n-p}{p+1}$; ${}^{n+1}A_{p+1}=(n+1)\,{}^{n}A_{p}$ e $P_n=n\,.\,P_{n-1}$ sendo: ${}^{n}C_{p}$ o número de combinações de n objectos tomados p a p, ${}^{n}A_{p}$ o número de arranjos de n objectos tomados p a p e P_n o número de permutações n objectos.

$$\mathrm{R:}\ {}^{n}C_{p+1}=\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)(n-p)}{(p+1)!}=$$
$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}\times\frac{n-p}{p+1}={}^{n}C_{p}\frac{n-p}{p+1}$$

${}^{n+1}A_{p+1}=(n+1)\,n\,(n-1)\cdots(n-p+1)=(n+1)\,{}^{n}A_{p}$ *e* $P_n=n(n-1)(n-2)\cdots 2\,.\,1=nP_{n-1}$.

798 — Calcule, por logaritmos, a área de um triângulo rectângulo em que um dos catetos tem de comprimento 43,962 m e o ângulo oposto a êsse cateto mede 21° 46′ 32″. R: *A área é dada pela expressão* $A=1/2\,.\,43{,}962^2\,.\,\mathrm{cotg}\,21^\circ\,46'\,32''$ *logo* $\log A=\mathrm{colg}\,2+2\log 43{,}962+\mathrm{logcotg}\,21^\circ\,46'\,32''=\bar{1}{,}69897+3{,}28616+0{,}39887=3{,}38400$ *e* $A=2421{,}0\,\mathrm{m}^2$.

799 — Calcule, sem recorrer às tábuas de logaritmos, os valores de $\sec(-300^\circ)$ e de $\mathrm{tg}\,17\pi/4$. R: $\sec(-300^\circ)=\sec 300^\circ=\sec 60^\circ=1/\cos 60^\circ=2$ $\mathrm{tg}\,17\pi/4=\mathrm{tg}\,(4\pi+\pi/4)=\mathrm{tg}\,\pi/4=1$.

800 — Verifique a identidade $\mathrm{tg}\,2a+\sec 2a=(\cos a+\mathrm{sen}\,a):(\cos a-\mathrm{sen}\,a)$. R: $\mathrm{tg}\,2a+\sec 2a=2\,\mathrm{tg}\,a:(1-\mathrm{tg}^2 a)+1:(\cos^2-\mathrm{sen}^2 a)=2\,\mathrm{tg}\,a\times\cos^2 a:(\cos^2 a-\mathrm{sen}^2 a)+1:(\cos^2 a-\mathrm{sen}^2 a)=(2\,\mathrm{sen}\,a\cos a+1):(\cos^2 a-\mathrm{sen}^2 a)=(\mathrm{sen}\,a+\cos a)^2:(\cos a^2-\mathrm{sen}^2 a)=(\mathrm{sen}\,a+\cos a):(\cos a-\mathrm{sen}\,a)$.

801 — Num paralelogramo $ABCD$ una o vértice B com o meio E do lado CD e o vértice D com o meio F do lado AB. Demonstre que a diagonal AC é dividida em 3 partes iguais pelas rectas BE e DF. R: *Tem-se como se vê fàcilmente* DF//BE. *E aplicando o teorema de Thales tem-se* $AO:OP=AF:FB$ *e portanto* $AO=OP$ *por ser* $AF=FB$ *e* $OP:PC=DE:EC$ *donde* $OP=PC$, *e será então* $AO=OP=PC$, *c. q. p.*

802 — Decomponha 216 em factores primos. ¿Conclui-se dessa decomposição que 216 é um cubo perfeito? Porquê? Qual é a raiz cúbica do número 216? R: $216=2^3\times 3^3=(2\times 3)^3=6^3$ *e* $\sqrt[3]{126}=6$.

Curso de habilitação para professores de desenho nos liceus

Ponto n.º 3

803 — Indique as condições a que deve satisfazer k para que a inequação $x^2-(3k+1)x+(2k^2+k+9/4)>0$ seja verificada para qualquer valor real atribuído a x. R: *O trinómio terá que* *ter o descriminante negativo porque então tomará o sinal do coeficiente de* x^2 *(positivo) para qualquer valor real de* x. *Será então* $(3k+1)^2-8k^2-4k-9<0$ *ou* $k^2+2k-8<0$; *as raizes dêste trinómio são* $k_1=-4, k_2=2$; *logo os valores reais de* x *que tornam negativo o descriminante do trinómio primitivo são:* $-4<k<2$.

804 — Forme a equação biquadrada que admite como raízes os números $2/3$ e $-\sqrt{3}/2$. Justifique a resposta. R: *O trinómio biquadrado pode escrever-se* $a(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)$ *se* x_1 *e* x_2 *forem as raizes da sua resolvente. Podemos considerar os números dados como tais raizes pois que não têm o mesmo módulo apesar de terem sinais contrários. Assim a equação pedida é*

$$(x^2-4/9)\,(x^2-3/4)=0 \quad ou \quad 36x^4-43x^2+12=0.$$

805 — Determine a base do sistema de logaritmos em que seja $\log 8=3/2$. R: *Pela definição de logaritmo tem-se* $8=x^{3/2}$ *donde* $8^2=x^3$ e $x=8^{2/3}=4$ *único valor real que satisfaz à questão.*

806 — Calcule por logaritmos, a altura relativa à hipotenusa de um triângulo rectângulo cuja hipotenusa mede 46,52 m e em que um dos catetos mede 32,26 m. R: *A área do triângulo pode calcular-se de dois modos. Se fôr* h *a altura relativa à hipotenusa será* $A=a\,h/2$; *e se considerarmos os dois catetos teremos* $A=b/2\,.\,(a^2-b^2)^{1/2}=b/2.[(a+b)\,(a-b)]^{1/2}$. *Tem-se* $ah=b\sqrt{(a+b)(a-b)}$ *e* $h=\dfrac{b\sqrt{(a+b)\,(a-b)}}{a}$ *em que* a *e* b *são a hipotenusa e o cateto dados. Será então* $\log h=\log 32{,}26+\operatorname{colg} 46{,}52+1/2\,.\,[\log 78{,}78+\log 14{,}26]=1{,}50866+\bar{2}{,}33236+0{,}94821+0{,}57706=1{,}36629$ *e por isso* $h=23{,}24$ m.

807 — Deduza as relações que existem entre as funções goniométricas de ângulos que diferem de π radianos. R: $\operatorname{sen} x=-\operatorname{sen}(x+\pi)$; $\cos x=-\cos(x+\pi)$: $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}(x+\pi)$; $\operatorname{cotg} x=\operatorname{cotg}(x+\pi)$; $\sec x=-\sec(x+\pi)$ e $\operatorname{cosec} x=-\operatorname{cosec}(x+\pi)$.

808 — Exprima em função do raio de uma esfera, a distância do centro dessa esfera a um plano que a corta segundo um círculo cuja área é igual a seis vèzes a área lateral do cone que tem por base a secção referida e por vértice o centro da esfera. R: *O problema é impossivel, visto que de tôdas as calotes de superfícies limitadas por uma circunferência dada, a de mínima área é o circulo.*

Portanto, a área lateral do cone não pode, ao contrário do que indica o enunciado do problema, ser menor que a do circulo determinado pela secção.

N. R.

809 — Indique a posição relativa das bissectrizes de dois ângulos adjacentes suplementares. Justifique a resposta. R: *Se forem* α *e* β *dois ângulos adjacentes suplementares será* $\alpha+\beta=180^\circ$ *e* $\alpha/2+\beta/2=90^\circ$, *e por isso as bissectrizes dos dois ângulos formando entre si um ângulo de* 90° *são perpendiculares.*

810 — Defina triedro; triedros simétricos e triedros suplementares; indique as relações que existem entre as medidas das faces e as dos diedros de dois triedros suplementares.

811 — Defina multiplicação de dois números fraccionários e, baseado na definição justifique a regra usada nessa operação. R: *Uma das definições usualmente adoptadas no ensino liceal é a de que o «produto se forma do multiplicando como o multiplicador se formou da unidade». Logo sendo o multiplicando* a/b *e o multiplicador* c/d *como êste se formou da unidade dividindo esta em* d *partes iguais e tomando* c *dessas partes o produto* $a/b\times c/d$ *obtém-se dividindo* a/b *em* d *partes iguais* $a/b.d$ *e tomando* c *destas partes ou seja* $\dfrac{a.c}{b.d}$ *de modo que a regra para a multiplicação de fracções pode enunciar-se: o produto de duas fracções é uma fracção cujo numerador é o produto dos numeradores e cujo denominador é o produto dos denominadores.*

Soluções dos n.os 795 a 811 de J. da Silva Paulo.

I. S. C. E. F. — Exame de aptidão, I-8-941

Ponto n.º 1

812 — *a)* Defina polígono regular convexo e defina os seus elementos mais importantes.

b) Resolva o seguinte problema: chamando α_k e α_{k+1} os ângulos internos dos polígonos regulares convexos de 3.2^k lados e 3.2^{k+1} lados, calcular o cociente $\lambda=\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}$. Determinar k de modo que $\lambda=\frac{11}{10}$. R: *Tem-se* $\alpha_k=\dfrac{3.2^k-2}{3.2^k}180^\circ$, $\alpha_{k+1}=\dfrac{3.2^{k+1}-2}{3.2^{k+1}}180^\circ$, $\lambda=\dfrac{3.2^k-1}{3.2^k-2}$. *Para que seja* $\lambda=\dfrac{3.2^k-1}{3.2^k-2}=\dfrac{11}{10}$ *terá de ser* $\begin{cases}3.2^k-1=11\,p\\3.2^k-2=10\,p\end{cases}$ *com* p *inteiro. Subtraindo ordenadamente obtêm-se* $p=1$ *valor que substituido em qualquer das igualdades dá* $k=2$.

813 — Resolver a desigualdade $\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2-5x+6}>0$. R: *É condição necessária e suficiente para que uma* *fracção seja positiva que os seus têrmos tenham o mesmo sinal. Por conseqüência a desigualdade proposta será satisfeita quando o fôr um dos sistemas*

$$a)\begin{cases} 2x^2+3x+1>0 \\ x^2-5x+6>0 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 2x^2+3x+1<0 \\ x^2-5x+6<0 \end{cases}.$$

As raízes do trinómio $2x^2+3x+1$ *são* $x=-1, -1/2$ *e, como o coeficiente do têrmo do 2.º grau é positivo, o trinómio é negativo para os valores de* x *do intervalo* $(-1, -1/2)$ *e positivo para os restantes.*

Pelas mesmas razões, o trinómio x^2-5x+6, *cujas raízes são* $x=2, 3$, *negativo para os valores de* x *do intervalo* $(2, 3)$ *e positivo para os outros.*

Reconhece-se imediatamente que o sistema a) *e, portanto, a desigualdade proposta são satisfeitos para todos os valores de* x *satisfazendo a uma das três condições* $x<-1$, $-1/2<x<2$, $3<x$, *e que o sistema* b) *é incompatível.*

814 — Calcular $x=a.\sqrt{b}.\sqrt[3]{\dfrac{c^2}{a}}$ onde $a=\dfrac{1}{2^5}$, $b=1{,}0003$, $c=\cos 118^\circ 32'$. R: *Note-se que* $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}}}\cdot\sqrt{b}\,\sqrt[3]{c^2}$, *ou substituindo valores*

$$x=\frac{\sqrt{1{,}0003}.\sqrt[3]{\cos^2 118^\circ 32'}}{2^{10/3}}=\frac{\sqrt{1{,}0003}.\sqrt[3]{\cos^2 61^\circ 28'}}{2^{10/3}}.$$

$$\log x=\begin{cases} 1/2\log 1{,}0003 &= 1/2.0{,}00013=0{,}00007 \\ +2/3\log\cos 61^\circ 28' &= 2/3.\bar{1},67913=\bar{1},78609 \\ +10/3\operatorname{colog} 2 &= 10/3.\bar{1},69897=\bar{2},99657 \end{cases}$$

$$\log x=\bar{2},78273$$
$$x=0{,}060635.$$

815 — De uma pirâmide quadrangular regular conhece-se a razão $\lambda=l/h$ do lado da base e da altura. Exprimir em função de λ o cociente da área de uma das faces pela área da secção plana que passa pelo vértice e por uma das diagonais da base. R: $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=l$, $\overline{VP}=h$, $\overline{PM}=l/2$, $\overline{VM}=\sqrt{h^2+l^2/4}$, $\overline{AC}=l.\sqrt{2}$, $[ABV]=1/2\,l\sqrt{h^2+l^2/4}$, $[ACV]=1/2\,l\sqrt{2}h$, $\dfrac{[ABV]}{[ACV]}=\sqrt{\dfrac{h^2+l^2/4}{2h^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\lambda^2}{8}}$.

816 — Resolver um triângulo isósceles conhecendo a base b e o perímetro p. Aplicação numérica: $b=12{,}4$ metros $p=51{,}9$ metros.

R: *Tem-se:* $\overline{AC}=b$, $\overline{BA}=\overline{BC}=\dfrac{p-b}{2}$, $\overline{AP}=\dfrac{b}{2}$, $\cos\widehat{A}=\dfrac{b}{p-b}=\dfrac{12{,}3}{39{,}6}$, $\widehat{C}=\widehat{A}$, $\widehat{B}=180^\circ-2\widehat{A}$. *Aplicando logaritmos:* $\log\cos\widehat{A}=\log 12{,}3+\operatorname{colog} 39{,}6=1{,}08991+\bar{2},40230=\bar{1},49221$ *donde* $\widehat{A}=71^\circ 54' 15''$. $l=19{,}8$, $\widehat{A}=\widehat{C}=71^\circ 54' 15'$, $\widehat{B}=36^\circ 11' 30''$.

817 — Achar os pares de números que têm por m. d. c. 100 e m. m. c. 3.000. R: *Sejam* x *e* y *os números pedidos, sabe-se que* $xy=100\times 3.000$. *Por outro lado, será* $x=p.100$, $y=q.100$ *com* p *e* q *primos entre si. Logo é* $pq=30$, *donde*

$$\begin{cases} p=1,\ 2,\ 3,5 \\ q=30,15,10,6 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x=100,\ 200,\ 300,500 \\ y=3.000,1.500,1.000,700. \end{cases}$$

Soluções dos n.os 812 a 817 de A. Sá da Costa.

Contêm pontos da prova de matemática dos *exames de aptidão* de anos lectivos anteriores os seguintes números da «Gazeta de Matemática»: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8.

MATEMÁTICAS GERAIS—ÁLGEBRA SUPERIOR—COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

F. C. L. — Alguns pontos do 1.º exame de freqüência, Março de 1941

818 — Calcule a derivada da função y definida pela equação $\operatorname{cosec}\sqrt{xy+x^2+y^2}=L\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

R: *A derivada pedida é dada pela equação*

$$\frac{y+2x+(x+2y)y'}{2\sqrt{xy+x^2+y^2}}\operatorname{cosec}\sqrt{xy+x^2+y^2}\,.$$
$$.\operatorname{cotg}\sqrt{xy+x^2+y^2}+\frac{y-xy'}{(x^2+y^2)\operatorname{arctg} x/y}=0.$$

819 — Determine m e n de modo que a equação $2x^9-13x^8+19x^7+31x^6-107x^5+98x^4+6x^3-36x^2+mx+n=0$ admita a raiz dupla zero e resolva-a. R: *A equação admitirá a raiz zero dupla se* $m=n=0$. *A decomposição do 1.º membro da equação em factores binomiais é a seguinte*

$$2x^2(x-1)(x-3)^2(x+2)(x+1/2)[(x+1)^2+1].$$

820 — Sabendo que c é raiz da equação $ax^5+(b-ac)x^4-bcx^3-bx^2-(a-bc)x+ac=0$ determine as outras raízes. R: *As raízes são* $c, \pm 1, (-b\pm\sqrt{b^2-4a^2})/2a$.

821 — Resolva geomètricamente o problema: «São dados o número $z_1=r(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)$ e um número positivo ρ. Determinar um número z de módulo ρ tal que $\dfrac{z-z_1}{z}$ seja imaginário puro».

Discutir (possibilidade e número de soluções).