PROBLEMAS PROPOSTOS

881 — Calcular o integral

$$I_n(x)=\int_0^x \frac{x^n\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}\,; \quad B^2-AC\neq 0$$ (n inteiro positivo).

882 — Estudar a curva $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, em que P e Q são polinómios em x de grau p e q, sob o ponto de vista das assímptotas rectilíneas.

883 — Determinar o raio dum sector circular de perímetro constante, de forma que a área seja máxima.

884 — Estudar a convergência da série cujo têrmo geral é $u_n=\left[\operatorname{sen}\left(a+\dfrac{\alpha}{n}\right)\right]^n \quad 0<a<\dfrac{\pi}{2}$.

885 — Integra-se a função $e^z z^{n-1}$ $(n>0)$ ao longo dum contôrno formado por um raio OA segundo ox, um arco de circunferência AB de centro O e raio OA, e um raio BO, sendo B tal que $\alpha=A\hat{O}B$ esteja entre 0 e $\pi/2$.

Fazendo crescer OA indefinidamente deduzir do resultado os integrais definidos:

$$\int_0^\infty u^{n-1}\,e^{-au}\cos bu\,du \qquad \int_0^\infty u^{n-1}\,e^{-au}\operatorname{sen} bu\,du.$$

886 — Dada a curva plana de equação $y^q-Ax^p=0$ (A constante, p e q inteiros), pretende-se saber em que casos o arco pode ser expresso na abscissa por meio das transcendentes elementares.

887 — Sendo α,β,γ os ângulos que formam duas a duas três semi-rectas OA, OB, OC $(\alpha=(\widehat{OB,OC}),\cdots)$ prove que

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}=\operatorname{sen}^2\gamma\operatorname{sen}^2\varphi$$

em que φ é o ângulo que OC faz com o plano OAB.

888 — Se uma dupla família de curvas é definida sôbre a superfície $x^i=x^i(u^\alpha)$ $(i=1,2,3,\ \alpha=1,2)$ pela equação $b_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta=0$ mostre que o ângulo θ dessas curvas é em cada ponto dado por $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{-2\sqrt{|b|}}{\sqrt{a}\,a^{\alpha\beta}\,b_{\alpha\beta}}$ em que $a_{\alpha\beta}$ é o tensor métrico, $a=|a_{\alpha\beta}|$, $b=|b_{\alpha\beta}|$.

889 — Achar a equação da envolvente das circunferências passando por O e de centro sôbre uma circunferência fixa também passando por O (cardióide).

890 — Calcular o número m tal que $x^3+y^3+z^3+$ $+mxyz$ seja divisível por $x+y+z$.

891 — Escreva como polinómio a raiz quadrada de $9/4+6x-17x^2-28x^3+49x^4$.

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS EM NÚMEROS ANTERIORES

735 — A solução do problema 735, na sua segunda forma, que vem publicada na pág. 10 do n.º 7 da «G. M.» está errada, mas a solução não é a que o sr. J. S. Faria Abreu indica, mas sim $x=\dfrac{4n\pm1}{6}\pi$ $x=\dfrac{6n\pm1}{18}\pi$.

M. A.

736 — $\dbinom{n+t}{r}=\dbinom{n+t-1}{r}+\dbinom{n+t-1}{r-1}$, $\dbinom{n+t-1}{r-1}=\dbinom{n+t-2}{r-1}+\dbinom{n+t-1}{r-2}$, $\cdots$ $\dbinom{n+1}{r-t+1}=\dbinom{n}{r-t+1}+\dbinom{n}{r-t}$. Somando ordenadamente e fazendo as reduções vem: $\dbinom{n+t}{r}=$

$$=\binom{n+t-1}{r}+\binom{n+t-2}{r-1}+\cdots+\binom{n}{r-t+1}+\binom{n}{r-t}$$

ou $\dbinom{n+t}{r}-\dbinom{n}{r-t}=\displaystyle\sum_{k=0}^{t-1}\binom{n+t-(k+1)}{r-k}$ mas podem-se separar os $(n+t)$ elementos em 2 grupos de n e t, e agrupá-los de diversos modos, contanto que sempre somem r. O seu número total será pois a soma de tôdas as combinações, como se deduz da igualdade anterior:

$$\binom{n+t}{r}=\binom{n}{r}\binom{t}{o}+\binom{n}{r-1}\binom{t}{1}+\cdots+$$
$$+\binom{n}{r-t}\binom{t}{t}=\sum_{k=0}^{t}\binom{t}{k}\binom{n}{r-k}\quad(t\leq r).$$

Solução enviada pelo Sr. J. S. Faria Abreu, de Penafiel.

792 — Recebemos do Sr. J. S. Faria Abreu uma solução que não publicamos por ser excessivamente longa.

Sol.: — Subtraindo a última coluna das duas primeiras (há pelo menos 3 colunas visto que por hipótese $n>2$) os elementos da 1.ª coluna ficam iguais a b_n-b_1 e os da 2.ª coluna a b_n-b_2. Tendo duas colunas proporcionais, $\Delta_n=0$.

M. A.

794 — Recebemos a solução do Sr. J. S. Faria Abreu, que verifica o teorema proposto calculando ambos os termos da igualdade que acompanha o enunciado e verificando que são iguais.

M. A.