fracção seja positiva que os seus têrmos tenham o mesmo sinal. Por conseqüência a desigualdade proposta será satisfeita quando o fôr um dos sistemas

$$a)\ \begin{cases} 2x^2+3x+1>0 \\ x^2-5x+6>0 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x^2+3x+1<0 \\ x^2-5x+6<0 . \end{cases}$$

As raizes do trinómio $2x^2+3x+1$ *são* $x=-1, -1/2$ *e, como o coeficiente do têrmo do 2.º grau é positivo, o trinómio é negativo para os valores de* x *do intervalo* $(-1, -1/2)$ *e positivo para os restantes.*

Pelas mesmas razões, o trinómio x^2-5x+6, *cujas raizes são* $x=2, 3$, *negativo para os valores de* x *do intervalo* $(2, 3)$ *e positivo para os outros.*

Reconhece-se imediatamente que o sistema a) *e, portanto, a desigualdade proposta são satisfeitos para todos os valores de* x *satisfazendo a uma das três condições* $x<-1$, $-1/2<x<2$, $3<x$, *e que o sistema* b) *é incompatível.*

814 — Calcular $x=a.\sqrt{b}.\sqrt[3]{\dfrac{c^2}{a}}$ onde $a=\dfrac{1}{2^5}$, $b=1{,}0003$, $c=\cos 118^\circ 32'$. R: *Note-se que*

$x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}}}.\ \sqrt{b}\ \sqrt[3]{c^2}$, *ou substituindo valores*

$$x=\frac{\sqrt{1{,}0003}.\sqrt[3]{\cos^2 118^\circ 32'}}{2^{10/3}}=\frac{\sqrt{1{,}0003}.\sqrt[3]{\cos^2 61^\circ 28'}}{2^{10/3}}.$$

$$\log x=\begin{cases} 1/2\log 1{,}0003 & = 1/2 . 0{,}00013=0{,}00007 \\ +2/3\log\cos 61^\circ 28' & = 2/3 . \bar{1}{,}67913=\bar{1}{,}78609 \\ +10/3 \operatorname{colog} 2 & =10/3 . \bar{1}{,}69897=\bar{2}{,}99657 \end{cases}$$

$$\log x=\bar{2}{,}78273$$
$$x=0{,}060635 .$$

815 — De uma pirâmide quadrangular regular conhece-se a razão $\lambda=l/h$ do lado da base e da altura. Exprimir em função de λ o cociente da área de uma das faces pela área da secção plana que passa pelo vértice e por uma das diagonais da base. R: $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=l$, $\overline{VP}=h$, $\overline{PM}=l/2$, $\overline{VM}=\sqrt{h^2+l^2/4}$, $\overline{AC}=l.\sqrt{2}$, $[ABV]=$ $=1/2\,l\sqrt{h^2+l^2/4}$, $[ACV]=1/2\,l\sqrt{2}\,h$, $\dfrac{[ABV]}{[ACV]}=$ $=\sqrt{\dfrac{h^2+l^2/4}{2h^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\lambda^2}{8}}$.

816 — Resolver um triângulo isósceles conhecendo a base b e o perímetro p. Aplicação numérica: $b=12{,}4$ metros $p=51{,}9$ metros.

R: *Tem-se:* $\overline{AC}=b$, $\overline{BA}=\overline{BC}=\dfrac{p-b}{2}$, $\overline{AP}=\dfrac{b}{2}$,

$\cos\widehat{A}=\dfrac{b}{p-b}=\dfrac{12{,}3}{39{,}6}$, $\widehat{C}=\widehat{A}$, $\widehat{B}=180^\circ-2\widehat{A}$.

Aplicando logaritmos: $\log\cos\widehat{A}=\log 12{,}3+$ $+\operatorname{colog} 39{,}6=1{,}08991+\bar{2}{,}40230=\bar{1}{,}49221$ *donde* $\widehat{A}=71^\circ 54' 15''$. $l=19{,}8$, $\widehat{A}=\widehat{C}=71^\circ 54' 15'$, $\widehat{B}=36^\circ 11' 30''$.

817 — Achar os pares de números que têm por m. d. c. 100 e m. m. c. 3.000. R: *Sejam* x *e* y *os números pedidos, sabe-se que* $xy=100\times 3.000$. *Por outro lado, será* $x=p.100$, $y=q.100$ *com* p *e* q *primos entre si. Logo é* $pq=30$, *donde*

$$\begin{cases} p=1,\ 2,\ 3, 5 \\ q=30, 15, 10, 6 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x=100,\ 200,\ 300, 500 \\ y=3.000, 1.500, 1.000, 700 . \end{cases}$$

Soluções dos n.os 812 a 817 de A. Sá da Costa.

Contêm pontos da prova de matemática dos *exames de aptidão* de anos lectivos anteriores os seguintes números da «Gazeta de Matemática»: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8.

MATEMÁTICAS GERAIS — ÁLGEBRA SUPERIOR — COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

F. C. L. — Alguns pontos do 1.º exame de freqüência, Março de 1941

818 — Calcule a derivada da função y definida pela equação $\operatorname{cosec}\sqrt{xy+x^2+y^2}=L\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

R: *A derivada pedida é dada pela equação*

$$\frac{y+2x+(x+2y)y'}{2\sqrt{xy+x^2+y^2}}\operatorname{cosec}\sqrt{xy+x^2+y^2}.$$
$$.\operatorname{cotg}\sqrt{xy+x^2+y^2}+\frac{y-xy'}{(x^2+y^2)\operatorname{arctg} x/y}=0 .$$

819 — Determine m e n de modo que a equação $2x^9-13x^8+19x^7+31x^6-107x^5+98x^4+6x^3-$ $-36x^2+mx+n=0$ admita a raiz dupla zero e resolva-a. R: *A equação admitirá a raiz zero dupla se* $m=n=0$. *A decomposição do 1.º membro da equação em factores binomiais é a seguinte*

$$2x^2(x-1)(x-3)^2(x+2)(x+1/2)[(x+1)^2+1].$$

820 — Sabendo que c é raiz da equação $ax^5+(b-ac)x^4-bcx^3-bx^2-(a-bc)x+ac=0$ determine as outras raízes. R: *As raizes são* $c, \pm 1, (-b\pm\sqrt{b^2-4a^2})/2a$.

821 — Resolva geomètricamente o problema: «São dados o número $z_1=r(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)$ e um número positivo ρ. Determinar um número z de módulo ρ tal que $\dfrac{z-z_1}{z}$ seja imaginário puro».

Discutir (possibilidade e número de soluções).

Posições relativas das imagens dos cocientes $\frac{z-z_1}{z}$ quando há soluções.

822 — Calcule os máximos e mínimos da função $y=e^{\cos(L\sqrt{x+1})}$. R: *Máximos* $(e^{4K\pi}, e)$, *mínimos* $(e^{(4K+2)\pi}, 1/e)$, K *inteiro.*

823 — Dada a equação $x^4-4x^3-20x^2+1=0$ verifique se ela admite raízes racionais e separe as raízes reais servindo-se do teorema de Rolle. Calcule para a maior raiz negativa os dois valores inteiros n e $n+1$ mais aproximados (por defeito e por excesso) e, a partir dêstes valores, calcule uma 2.ª aproximação dessa raiz pelo método das partes proporcionais.

824 — A que condições devem satisfazer os números reais p, q, r e s para que as raízes da equação $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ sejam três números com o mesmo módulo cujas imagens constituam os vértices dum triângulo eqüilátero?
Obs.: *O enunciado pretende que as raízes da equação sejam* três *números com o mesmo módulo, cujas imagens constituam os vértices dum* triângulo *eqüilátero, mas a equação é do* quarto *grau. O enunciado pode não ser bem interpretado, por ser lacónico em demasia.* R: *Em virtude do enunciado, das* quatro *raízes da equação uma será dupla e esta tem de ser real porque, se o não fôsse, a equação só teria duas raízes distintas. Então a equação admitirá as raízes* ρ *(dupla),* $\rho\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ *ou* $-\rho$ *(dupla),* $\rho\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$, *com* $\rho>0$. *As fórmulas de Viète dão* $p=\pm\rho$, $q=0$, $r=\pm\rho^3$, $s=\rho^4$, *respectivamente.*

825 — Calcule a soma das raízes primitivas de índice 12 da unidade positiva. R: *A soma cujo cálculo se pede é nula, porque é nula a soma das raízes de índice* n *da unidade* $S=\sum_{j=0}^{n-1} z_j=\sum_{j=0}^{n-1} z^j=\frac{1-z^n}{1-z}=0$ *onde* $z_j^n=1$ $(j=0,1,\cdots n-1)$ *e por ser* z *uma raiz primitiva de índice* n *da unidade.*

826 — Calcule as duas primeiras derivadas da função y definida pela equação $f(x,y)=0$ onde $f(x,y)$ é uma função homogénea. Deduza do resultado a forma da função y. R: *A equação* $f(x,y)=0$, *nestas condições, definirá uma ou mais funções tôdas da forma* $y=kx$. *Em geometria plana* $f(x,y)=0$ *representa um conjunto de rectas passando pela origem. Em geometria no espaço, um conjunto de planos contendo* Oz.

827 — Calcule $\lim_{m=\infty}\left[\cos\frac{a}{m}+p\operatorname{sen}\frac{a}{m}\right]^m$.
R: *Fazendo* $p=\operatorname{tg}\varphi$ *vem* $\lim_{m\to\infty}[\operatorname{sen}(\varphi+\alpha/m)]^m=L$ *e tem-se* $L=0$ *se* $\varphi\neq 2k\pi\pm\pi/2$, $L=1$ *se* $\varphi=2k\pi\pm\pi/2$.

828 — Estude a variação do número das raízes reais da equação $3x^4-4x^3-12x^2+\lambda=0$ quando λ varia de $-\infty$ a $+\infty$.

829 — Calcule os máximos e mínimos da função $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{a+x}{a-x^2}$ onde $a>1$.

830 — Determine para p e q valores racionais de modo que a equação $4x^6+px^5+9x^4+22x^3+qx^2+42x-9=0$ admita a raiz $\sqrt{3}$ e resolva a equação. R: $p=-12$, $q=-60$.

831 — Determine m e n de modo que a equação $x^4+4x^3-2x^2+mx+n=0$ tenha apenas duas raízes distintas. R: *Sendo* a e b *as duas raízes da equação, será* $m=2(a^2b+ab^2)$, $n=a^2b^2$, ou $m^2=a^2b^2.4(a+b)^2=16n$. *Todos os valores de* m *e* n *atisfazendo a* $m^2=16n$ *fazem corresponder à equação apenas duas raízes distintas.*

832 — Calcule $\lim_{x=\infty}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x$. R: *Sendo* L *o limite, tem-se sucessivamente*

$$\log L=\lim_{x\to\infty} x\cdot\log\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log 1/2\,(a^{1/x}+b^{1/x})}{1/x}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1/2(-1/x^2)(a^{1/x}\cdot\log a+b^{1/x}\cdot\log b)}{1/2\,(a^{1/x}+b^{1/x})\,(-1/x^2)}=$$
$$=1/2(\log a+\log b)=\log\sqrt{ab}\to L=\sqrt{ab}.$$

833 — Sabendo que $-i$ é raiz primitiva de índice n da unidade positiva, determine n.
R: $n=4$, *porque o argumento de* $-i$ *pode escrever-se* $\frac{3\pi}{2}=\frac{2.3p\pi}{4p}$ *com* p *inteiro e* 3p *e* $4p=n$ *serão primos, sempre que e só quando* $p=1$, *portanto,* $n=4$.

834 — Determine o polinómio mais geral $f(x)$ de grau m, divisível pela sua derivada e tal que $f(0)=1$ e $f(1)=0$. Justifique.

I. S. C. E. F. — I.º exame de freqüência, 3-2-41

835 — Verificar a identidade $(1+i)^n=\left(\cos\frac{n\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right)(1-i)^n$. R: *Note-se que* $i^n=\cos\frac{n\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$. *Então,* $(1+i)^n=$ $=i^n\cdot(1-i)^n=[i(1-i)]^n=(1+i)^n$.

836 — Determinar todos os números x que verificam a igualdade $x^n=(1+i)^n$. Alguns dêles serão imaginários puros? Condições. R: *Por ser* $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$, *vem*. $x=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right](k=0,1,2,\cdots n-1)$. *Serão imaginários puros aquêles valores de k para os quais é* $\frac{2k\pi}{n}=\frac{\pi}{4}$ *ou* $\frac{2k\pi}{n}=\frac{5\pi}{4}$, *isto é*, $k=n/8$ *ou* $k=5n/8$. *Portanto, dos* n *valores de* x, *dois serão imaginários puros se e só se* n *for múltiplo de* 8.

837 — Dada a circunferência $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ determinar as coordenadas do seu ponto mais próximo e do seu ponto mais afastado da origem. Determinar as equações das circunferências com centro em cada um dêsses pontos e tangentes aos eixos. Verificar que essas circunferências são tangentes uma à outra e à recta $x+y-1=0$. R: *As coordenadas dos pontos pedidos são as soluções do sistema* $\begin{cases} y=x \\ (x-1)^2+(y-1)^2=1 \end{cases}$ $(1-\sqrt{2}/2,1-\sqrt{2}/2)$ *para o mais próximo da origem*, $(1+\sqrt{2}/2,1+\sqrt{2}/2)$ *para o mais afastado. Equações das circunferências indicadas* $(x-1+\sqrt{2}/2)^2+(y-1+\sqrt{2}/2)^2=(1-\sqrt{2}/2)^2$, $(x-1-\sqrt{2}/2)^2+(y-1-\sqrt{2}/2)^2=(1+\sqrt{2}/2)^2$. *São tangentes porque a distância dos centros é igual à soma dos raios. São tangentes à recta* $x+y-1=0$ *porque esta é perpendicular à recta* $y=x$, *que contém os seus centros, no ponto* $(1/2,1/2)$ *de tangência das duas circunferências.*

I. S. T. — Alguns pontos do 1.º exame de freqüência, 1941

838 — Sendo A e B os afixos dos complexos α e β (no plano de Cauchy), mostrar que o ponto M, que divide $\overline{AB}$ segundo a razão $\overline{AM}/\overline{MB}=\lambda$, é o afixo do complexo $\frac{\alpha+\lambda\beta}{1+\lambda}$. R: $\overline{AM}=|\alpha-z|$, $\overline{MB}=|z-\beta|$ e $\alpha-z=\lambda(z-\beta)$ *donde* $z=\frac{\alpha+\lambda\beta}{1+\lambda}$

839 — Traçar a curva $y=e^{-ax}$. sen bx $(a,b>0)$. Mostrar que tem uma infinidade de máximos, cujos valores formam uma progressão geométrica, e que estão sôbre a curva $y=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}e^{-ax}$.

840 — Calcular: $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-1}{x^n+1}$, quando é 1.º) $0<x<1$, 2.º) $x=1$, 3.º) $x>1$. R: 1.º) -1, 2.º) 0, 3.º) 1.

841 — Dada a equação $z^2+2(a+bi)z+(c+di)=0$ determinar a condição para que: 1) as duas raízes sejam iguais, 2) uma raiz seja real, 3) uma raiz seja um imaginário puro, 4) as raízes sejam imaginários conjugados. R: 1) *Seja* z *a raiz dupla da equação; será* $a+bi=-z$, $c+di=z^2$ *ou* $a^2-b^2=c$, $ab=d$. 2) *Sejam* r *e* $\alpha+\beta i$ *as raízes da equação; será* $2(a+bi)=-r-\alpha-\beta i$, $c+di=r\alpha+r\beta i$, *donde* $cb^2=2abd-d^2$. 3) *Sejam* $\alpha+\beta i$ *e* γi *as raízes da equação; então* $2(a+bi)=-\alpha-(\beta+\gamma)i$, $c+di=-\beta\gamma+\alpha\gamma i$ *e* $4a^2c+3abd=d^2$. 4) *Sejam* $A\pm Bi$ *as raízes da equação: será* $2(a+bi)=-2A$, $c+di=A^2+B^2$ *donde* $b=d=0$, $c>a^2$.

842 — Num triângulo rectângulo a soma dos comprimentos da hipotenusa e dum catecto é constante. Quando é que a área é máxima? R: $2S=bc$, *com* $a+b=s$ *e* $a^2=b^2+c^2$, *então* $S=1/2\,(s-a)\sqrt{2as-s^2}$, $\frac{dS}{da}=-1/2\sqrt{2as-s^2}+\frac{(s-a)s}{\sqrt{2as-s^2}}$ *que se anula para* $a=\frac{2s}{3}$, *valor que corresponde, necessàriamente, ao máximo.*

843 — Sendo $y=u^3+u^{-3}$ e $x=u+u^{-1}$, *calcular* $\frac{dy}{dx}$ expressa em x R: *Sabe-se que* $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{du}}$. *Então, porque* $\frac{dy}{du}=3(u^2-u^{-4})$ *e* $\frac{dx}{du}=1-u^{-2}$, *vem* $\frac{dy}{dx}=3\frac{u^3-u^{-3}}{u-u^{-1}}=3(u^2+1+u^{-2})=3(u-u^{-1})^2+6=3x^2+6$.

844 — Estudar a função $y=10(1+ex^{-1})^{-1}$. Representação gráfica (calcular em particular, $\lim_{x\to\pm 0}y$ *e* $\lim_{x\to\pm\infty}y$, e indicar os pontos de descontinuïdade, se os houver).

R: $\lim_{x\to+0}y=\lim_{x\to+0}\frac{10}{1+e^{1/x}}=0$; $\lim_{x\to-0}y=\lim_{x\to-0}\frac{10}{1+e^{1/x}}=\lim_{x\to+0}\frac{10}{1+1/e^{1/x}}=10$; $\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{10}{1+e^{1/x}}=5$; $\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{10}{1+e^{1/x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10}{1+1/e^{1/x}}=5$.

A função é descontinua para $x=0$ *porque* $y(+0)=0$ *e* $y(-0)=10$ — *descontinuïdade finita de 1.ª espécie.*

845 — Sendo $(1+x)^n=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_nx^n$ (n inteiro e positivo), mostrar que:

$$p_0-p_2+p_4-p_6+\cdots=2^{n/2}\cdot\cos\frac{n\pi}{4}$$

$$p_1-p_3+p_5-p_7+\cdots=2^{n/2}\cdot\text{sen}\,\frac{n\pi}{4}.$$

R: *Fazendo* $x=i$ *vem*

$$(1+i)^n=p_0+p_1 i-p_2-p_3 i+\cdots$$

$$(1+i)^n=2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)$$

donde, por identificação dos 2.os membros, se deduzem as expressões pedidas.

846 — Calcular $\lim_{n\to\infty}\left[n^{-n-1}.(n+1)^n\right]$.

R: $\lim_{n\to\infty} n^{-n-1}.(n+1)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n}=e\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

847 — Mostrar que $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ não tem máximos, nem mínimos, quaisquer que sejam os valores de a, b, c, d. Que se passa quando $ad-bc=0$? Traçar o gráfico da função. R: *A derivada* $f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ *não se anula para nenhum valor finito de* x, *se* $ad\neq bc$. *Se* $ad=bc$, *a função* $f(x)=\text{const.}$ *por ser* $f'(x)\equiv 0$.

Soluções dos n.os 818 a 847 de A. Sá da Costa.

Contêm pontos de primeiros exames de freqüência de *Matemáticas Gerais* e *Álgebra Superior* os seguintes números da «Gazeta de Matemática»: 1, 5 e 8.

CALCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR

F. C. L. — 1.º exame de freqüência, 1940-41

Ponto n.º 3

848 — Determine o caracter do produto infinito cujos primeiros termos são: $u_1=1+\dfrac{1^3}{2^3}$, $u_2=1+\dfrac{1^3.3^3}{2^3.4^3}$ e $u_3=1+\dfrac{1^3.3^3.5^3}{2^2.4^3.6^3}$. R: *O termo geral do produto infinito é* $u_n=1+\dfrac{1^3.3^3.\cdots(2n-1)^3}{2^3.4^3.\cdots(2n)^3}$; *o produto infinito é convergente se o for a série* $\sum\dfrac{1^3.3^3.\cdots(2n-1)^3}{2^3.4^3.\cdots(2n)^3}$; *a aplicação do critério de Raabe-Duhamel a esta série conduz a*

$$\lim_{n=\infty}\frac{12n^3+18n^2+7n}{8n^3+12n^2+6n+1}=\frac{3}{2}>1;$$

portanto a série é convergente.

849 — Transforme a equação $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ noutra em que as variáveis independentes x e y sejam substituídas pela variável t, sabendo que $l\,xy=\operatorname{tg} t$ (por l representa-se o logaritmo neperiano). R: $\dfrac{du}{dt}+\sec^2 t=0$.

Ponto n.º 4

850 — Determine o número a que corresponde a fracção contínua $[3\,(2,3,1)]$. R: $\dfrac{18+\sqrt{37}}{7}$.

851 — Transforme a equação $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ noutra em que as variáveis independentes x e y sejam substituídas pelas novas variáveis u e v relacionadas com as primeiras por $x=l\,uv$ $y=l\dfrac{u}{v}$ (por l representa-se o logaritmo neperiano).

R: $u^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+v^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}+2uv\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+u\dfrac{\partial z}{\partial u}-3v\dfrac{\partial z}{\partial v}=0.$

Soluções dos n.os 848 a 851 de Queiroz de Barros.

F. C. P. — Exame final, Outubro de 1941

852 — Calcular $I=\int \operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}\,dx$.

R: $I=x\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x(1-x)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C.$

853 — Integrar o sistema $y''+z'-4y=\cos^2 x$ $3y'-z=x$.

R: *Empregando o símbolo* D *vem:*

$$\begin{cases} y''+z'-4y=\cos^2 x\\ 3y'-z=x\end{cases}\qquad\begin{cases}(D^2-4)\,y+Dz=\cos^2 x\\ 3Dy-z=x\end{cases}$$

donde

$$y=\frac{1+\cos^2 x}{4D^3-4},\quad 4y''-4y=\cos^2 x+1=\frac{3+\cos 2x}{2}$$

O sistema integral geral é:

$$\begin{cases} y=C_1e^x+C_2e^{-x}-3/8-1/40\,.\cos 2x\\ z=3C_1e^x-3C_2e^{-x}-x+3/20\,.\operatorname{sen} 2x\,.\end{cases}$$

854 — Cortar o elipsoide $3x^2+4y^2+3z^2+2xz=1$ por um plano que passe pelo eixo dos yy e determinar analìticamente êste plano de modo que a elipse secção tenha área máxima ou mínima. Calcular esta área. R: *As equações da secção são:* $z=mx$, $3x^2+4y^2+3z^2+2xz=1$; *ou* $z=mx$, $(3m^2+2m+3)\,x^2+4y^2=1$.

Designando por θ *o ângulo dos planos* $z-mx=0$ *e* $z=0$ *tem-se* $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}$.

Seja A *a área da secção e* a *a área da sua projecção sôbre* $z=0$. *Tem-se* $a=A\cos\theta$ *e* $a=\dfrac{\pi}{2\sqrt{3m^2+2m+3}}$, *donde* $A=\dfrac{\pi\sqrt{1+m^2}}{2\sqrt{3m^2+2m+3}}$ *e* $\dfrac{dA}{dm}=0\to m=\pm 1$. *Os planos procurados são* $z-x=0$ *e* $z+x=0$ *e as áreas das secções respectivas* $A=\pi/4$ *e* $A=\sqrt{2}\,\pi/4$.

Soluções dos n.os 852 a 854 de Jayme Rios de Sousa.

I. S. C. E. F. — I.º exame de freqüência, 1940-41

855 — Calcular o integral $\int_2^3 \frac{x\sqrt{3(x-1)^3}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx$.

R: *Tem-se:* $I=\sqrt{3}\int_2^3 x(x-1)^{5/6}dx$ *e, a função é integrável no intervalo* $(2,3)$. *Fazendo* $x-1=t^6$ *vem* $dx=6t^5dt$, *e* $I=6\sqrt{3}\int_1^{\sqrt[6]{2}}(t^6+1)t^{10}dt=$ $=6\sqrt{3}\,[t^{17}/17+t^{11}/11]_1^{\sqrt[6]{2}}$.

856 — Calcular o integral $\int x^3 \operatorname{arc\,sen} x/2\,dx$.

R: *Integrando por partes vem*

$$I=\frac{1}{4}x^4 \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Mas, $J=\int\frac{x^4dx}{\sqrt{4-x^2}}=-16\int\frac{dt}{(t^2+1)^3}$ *fazendo* $4-x^2=t^2x^2$, *donde* $tdt=-4x^{-3}dx$. *Portanto,*

$$J=-16\left[\frac{At^3+Bt^2+Ct+D}{(t^2+1)^2}+E\log(t^2+1)+F\operatorname{arctg}t\right]=$$
$$=-16\left[\frac{t^3+t}{2(t^2+1)^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}t\right]=\frac{-8t}{t^2+1}-8\operatorname{arc\,tg}t=$$
$$=-2x\sqrt{4-x^2}-8\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}+C.$$ *Finalmente,*

$$I=\frac{1}{4}x^4\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}+C.$$

857 — Verificar o teorema do valor médio no integral $\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^3 x\,dx$. R: $\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^3 x\,dx=2\pi\,.\operatorname{sen}^3\alpha$ $0<\alpha<2\pi$. *Por outro lado* $\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^3 x dx=[\operatorname{sen}^2 x\cos x+$ $+2\cos x]_0^{2\pi}=0$ *logo* $2\pi\,.\operatorname{sen}^3\alpha=0\rightarrow\alpha=0,\pi,2\pi$, *e* $\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^3 x\,dx=2\pi\operatorname{sen}^3\pi=0$.

858 — ¿As funções $\varphi_1=x^2-3$, $\varphi_2=x^2+1$, $\varphi_3=x^2+3$ e $\varphi_4=x+1$ serão linearmente independentes em qualquer intervalo? R: *Do exame do wronskiano das quatro funções conclue-se que não há intervalo algum em que as quatro funções sejam linearmente independentes. Note-se que existem sempre quatro números, não simultâneamente nulos,* $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ *tais que* $\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\lambda_3\varphi_3+\lambda_4\varphi=0$, *por exemplo* $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-3$, $\lambda_3=2$, $\lambda_4=0$.

Soluções dos n.os 855 a 858 de A. Sá da Costa.

I. S. T. — Março de 1941

859 — Calcular o integral

$I=\int\operatorname{arctg}(\cos x)\cdot\frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\operatorname{sen}x\,dx$. R: *Notando que é* $\frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}=1-\frac{1}{1+\cos^2 x}$ *tem-se*

$$I=\int\operatorname{arctg}(\cos x)\cdot\operatorname{sen}x dx-\int\operatorname{arctg}(\cos x)\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos^2 x}dx=$$
$$=-\cos x\operatorname{arc\,tg}(\cos x)-\int\frac{\cos x\operatorname{sen}x}{1+\cos^2 x}dx+$$
$$+1/2[\operatorname{arc\,tg}(\cos x)]^2=-\cos x\operatorname{arc\,tg}(\cos x)+$$
$$+1/2\log(1+\cos^2 x)+1/2[\operatorname{arc\,tg}(\cos x)]^2+C.$$

860 — Determinar os máximos e mínimos da soma das áreas de três quadrados, sabendo que é constante a soma dos volumes dos três cubos de que êsses quadrados são faces. R: *Trata-se de um problema de máximos e mínimos condicionados. A função de que se procuram os pontos de estacionaridade é* $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ *(designando por* x, y *e* z *os lados dos 3 quadrados) e a equação de ligação é* $\varphi(x,y,z)\equiv x^3+y^3+z^3-a^3=0$.

Os pontos de estacionaridade são as soluções do sistema $f=0$, $\frac{\partial(\varphi,f)}{\partial(x,y)}=0$, $\frac{\partial(\varphi,f)}{\partial(x,z)}=0$ *ou* $x^3+y^3+z^3-a^3=0$, $xy(x-y)=0$ *e* $xz(x-z)=0$.

861 — Estudar o integral $\int_0^{+\infty}\frac{x\log x}{(1+x^2)^3}dx$.

862 — Sendo $\begin{cases} x^2+2\log z+x^y+4y=6t-z \\ z^x\log(xyz)^y=y^t\operatorname{arcsen}x+4\operatorname{sen}t\end{cases}$ calcular $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ e $\frac{\partial t}{\partial x}$. R: *Derivando o sistema dado* (S) *em ordem a* x, *considerando* z *e* t *como funções das variáveis independentes* x *e* y, *obtém-se um sistema* (S′), *linear em* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial t}{\partial x}$, *donde se deduz portanto* $\frac{\partial t}{\partial x}$. *Derivando* (S′) *em ordem a* y, *obtém-se um novo sistema* (S″) *linear em* $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ *e* $\frac{\partial^2 t}{\partial x\partial y}$ *que permite calcular a derivada* $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ *pedida.*

Soluções dos n.os 859 a 862 de Manuel Zaluar.

Contêm pontos de primeiros exames de freqüência de *Cálculo Infinitesimal* os seguintes números da «Gazeta de Matemática»: 1 e 5.

MECÂNICA RACIONAL — FÍSICA MATEMÁTICA

F. C. P. — Exame final, Julho de 1939

863 — Uma barra rectilínea, homogénea OA de pêso p e comprimento $2a$ é móvel num plano vertical π em volta do seu extremo O. Em A está preso um fio inextensível e perfeitamente flexível (cujo pêso se despreza) de comprimento $2l$, que passa numa roldana desprovida de atrito no eixo e situada sôbre a horizontal de π que passa por O, a uma distância dêste ponto igual a $2a$ (desprezam-se massa e dimensões da roldana). O fio, depois de passar na roldana, estende-se ao longo duma recta RH de π, perfeitamente polida, inclinada de i^o sôbre a horizontal, e suporta na sua extremidade uma massa pontual P de pêso p_1.

a) Parametrar o sistema e indicar as fôrças que intervêm no estudo do seu equilíbrio.

b) Pela aplicação do teorema do trabalho virtual, depois de ter mostrado que as ligações são perfeitas, calcular o valor que deve ter o pêso p_1 para que a barra OA, na posição de equilíbrio, faça com a horizontal um ângulo de 60^o.

c) Ainda pela aplicação do mesmo teorema calcular o valor da reacção de RH sôbre a massa pontual P na posição considerada.

d) Utilizando as condições gerais de equilíbrio dos sólidos calcular a reacção no extremo O da barra na configuração considerada. Dados numéricos: $i^o=45^o$ $p=2\text{kg}$.

864 — Um trenó de pêso p é lançado segundo a linha de maior declive duma rampa de inclinação i à velocidade de V km/h. Sabe-se que o seu movimento é uma translacção rectilínea e que o meio ambiente opõe ao movimento uma resistência equivalente a uma fôrça única, aplicada no centro de inércia do trenó, de sentido oposto ao da sua velocidade v e numèricamente igual a kv^2 (k é um factor de proporcionalidade igual a 5 quando se adoptam como símbolos o metro, o segundo e o kilograma-pêso). Entre o trenó e o solo existe um atrito de escorregamento de coeficiente $f=\operatorname{tg} i$. Pregunta-se:

a) Ao fim de quanto tempo pára o trenó?

b) Que distância percorre?

c) Que valor deve atribuir-se a k quando se escolhem para unidades fundamentais o metro, a tonelada-massa e o segundo?

Dados numéricos: $\operatorname{sen} i=0{,}05$, $p=200\text{kg}$. Velocidade inicial $V=50\text{km/h}$.

865 — Uma circunferência C de raio a está animada duma rotação uniforme de velocidade angular W conhecida em volta do seu diâmetro vertical relativamente a um referencial S. Um disco circular material D, homogéneo, de raio b e pêso p, rola sem resvalar sôbre o interior de C e a ligação é realizada de tal modo que o disco D não pode abandonar o plano de C. Não há atrito de rolamento.

a) Parametrar o sistema.

b) Exprimir a fôrça viva do disco em função dos parâmetros e das suas primeiras derivadas.

c) Supondo que no centro do disco actua uma fôrça F de grandeza invariável e constantemente normal ao plano comum de C e D, calcular os segundos membros das equações de Lagrange que correspondem aos parâmetros escolhidos e escrever estas equações.

d) Cinemática: Supondo agora que no movimento de D relativamente a C o centro de D possue uma velocidade de grandeza constante V, calcular os elementos definidores do estado cinético do disco D no seu movimento em relação ao referencial S.

I. S. T. — I.º exame de freqüência, 1940-41

866 — Dados o vector $\alpha=xI+yJ+zK$ e o escalar $u=x^2+y^2+z^2$, ¿o campo de componentes: $X=\operatorname{div}\alpha$, $Y=\operatorname{mod}\operatorname{grad} u$, $Z=u\operatorname{mod}\alpha$ será um campo de momentos?

867 — Desenvolver $x(\pi-x)$ em série de Fourier no intervalo $0\leq x\leq\pi$.

868 — Achar as componentes mixtas, $\varepsilon_i^{\cdot jk}$ e $\varepsilon_{ij}^{\cdot\cdot k}$ do tensor hemisimétrico ε, em coordenadas gerais.

869 — ¿Quando é que o maior dos três momentos principais de inércia, em relação a um dado ponto O, é igual à soma dos outros dois?

I. S. T. — I.º exame de freqüência, 1940-41

870 — Entre os dois pontos $A(0,0,0)$ e $B(1,1,1)$, determinar a curva de estacionaridade do integral

$$I=\int_{\overset{\frown}{AB}} x^2 ds\,.$$

R: *Tem-se*

$$I=\int_{\overset{\frown}{AB}} x^2\, ds=\int_0^1 x^2\sqrt{1+y'^2+z'^2}\, dx \quad \textit{com} \quad y_1=0\,,\; z_1=0\,,$$

$y_2=1$, $z_2=1$. *Há a determinar o sistema integral* $y=y(x_1\, c_1\, c_2,\, c_3\, c_4)$ *e* $z=z(x_1\, c_1\, c_2,\, c_3\, c_4)$ *do sistema de equações de 2.ª ordem:*

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0 \quad \frac{\partial f}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)=0\,,$$

calculando-se as constantes c_i *a partir dos valores dados* y_1, z_1, y_2 *e* z_2.

871 — Converter o sistema de funções $\varphi_1 = x+2$, $\varphi_2 = x-1$, $\varphi_3 = x^2$ noutro equivalente, ortogonal e normado no intervalo $(0,1)$.

R: *As funções dadas* φ_1, φ_2 *e* φ_3 *são linearmente independentes, como é fácil verificar. Procure-se primeiro um sistema de funções* $\psi_1 = \varphi_1$, $\psi_2 = a_{21}\psi_1 + \varphi_2$, $\psi_3 = a_{31}\psi_1 + a_{32}\psi_2 + \varphi_3$, *isto é, de coeficientes tais que* $(\psi_i, \psi_j) = \int_0^1 \psi_i \psi_j \, dx = 0 \; (i \neq j)$. *Tem-se* $a_{21} = -\dfrac{(\varphi_1 \varphi_2)}{\|\varphi_1\|^2}$, $a_{31} = -\dfrac{(\varphi_1, \varphi_3)}{\|\varphi_1\|^2}$ *e* $a_{32} = -\dfrac{(\psi_2, \varphi_3)}{\|\psi_2\|^2}$. *No caso presente vem* $\|\varphi_1\|^2 = (\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 (x+2)^2 dx = 19/3$, $(\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^1 (x+2)(x-1) dx = -7/6$, *donde* $a_{21} = 7/38$, $(\psi_1, \varphi_3) = \int_0^1 (x+2) x^2 dx = 11/12$, *donde* $a_{31} = -11/70$, *etc.* ψ_i *normalizam-se fazendo* $\Phi_i = \dfrac{\psi_i}{\|\psi_i\|}$.

872 — Decompor a homografia

$$\alpha = \begin{pmatrix} 3J-K & 2I-J & I+2J \\ I & J & K \end{pmatrix}$$

e determinar os seus invariantes. R: *Como se conhecem* αI, αJ *e* αK *é rápida a determinação do vector* $V\alpha$ *de homografia* α *e a da sua dilatação. Assim, tem-se* $\alpha I = 3J-K$, $\alpha J = 2I-J$, $\alpha K = I+2J$ *e* $V\alpha = 1/2\,[I \wedge \alpha I + J \wedge \alpha J + K \wedge \alpha K] = -I + J + 1/2.K$. *Para a dilatação:* $\beta = D\alpha = \alpha - V\alpha \wedge$ *e portanto* $\beta I = \alpha I - V\alpha \wedge I = 3J - K - (-I+J+1/2.K) \wedge I = 5/2.J$, $\beta J = \alpha J - V\alpha \wedge J = 5/2.I - J + K$, $\beta K = \alpha K - V\alpha \wedge K = J$ *e finalmente* $\beta = \begin{pmatrix} 5/2J & 5/2I-J+K & J \\ I & J & K \end{pmatrix}$.

Para os invariantes tem-se:

$I_1\alpha = I \mid \alpha I + J \mid \alpha J + K \mid \alpha K = -1$,

$I_2\alpha = I \wedge \alpha J \mid \alpha K + J \wedge \alpha K \mid \alpha I + K \wedge \alpha I \mid \alpha J = -5$

e $I_3\alpha = \alpha I \wedge \alpha J \mid \alpha K = -5$.

873 — Sendo y_1, y_2, y_3 coordenadas cartesianas ortogonais, calcular, em coordenadas gerais x_1, x_2, x_3, definidas pelo sistema: $y_1 = x_1 \operatorname{sen} x_2$, $y_2 = x_2 \cos x_1$, $y_3 = x_3$, as componentes do tensor fundamental; e as do tensor derivado do vector $(Y_i) = (y_i)$, definido pelo ponto $P(y_1, y_2, y_3)$ e pela origem do sistema cartesiano.

Soluções dos n.os 870 a 872 de M. Zaluar.

F. C. P. — Física Mat., 1.º ex. de freq., 11-2-1941

874 — Seja $\alpha v_1 = v_1$, $\alpha v_2 = 0$, $\alpha v_3 = i v_3$. Calcular a matriz de representação de α, na base em que v_1, v_2 e v_3 têm as coordenadas $(1,0,1)$, $(1+i, i, 1)$, $(-i, 1-2i, i)$.

875 — Seja x o símbolo de um vector de coordenadas — complexas $x_1, x_2, \cdots x_n$. Classificar as duas matrizes

$$A = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} . \| \bar{x}_1 \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_n \| \quad \text{e} \quad B = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} . \| x_1 x_2 \cdots x_n \|.$$

Calcular os traços, os determinantes, as constantes e vectores fundamentais, os polinómios mínimos e os polinómios característicos.

São redutíveis à forma diagonal? Em que grupo?

876 — Seja $(x-x_0)^n$ o polinómio mínimo de um operador α de E_n.

Mostrar que é sempre possível determinar um vector v tal que $(\alpha - x_0)^{n-1} v \neq 0$.

Verificar que os vectores $v, (\alpha - x_0) v, \cdots (\alpha - x_0)^{n-1} v$ formam uma *base* e calcular a representação correspondente de α (Schreier und Sperner).

877 — Enunciar a condição para que a matriz

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \cdots \\ a_n & \cdots & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

seja redutível à forma diagonal (Schreier und Sperner).

Qual é a condição homóloga *no grupo unitário?*

Contêm pontos do 1.º exame de freqüência de *Mecânica Racional* e de *Física Matemática* os seguintes números da «Gazeta de Matemática»: 1, 5 e 6.

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C. L. — 1.º exame de freqüência, 12-2-1941

878 — Três urnas idênticas têm as seguintes composições: U_1(37 esferas, 3 das quais brancas), U_2(12 % de esf. brancas) e U_3(5 esf. brancas, 15 pretas e 5 vermelhas). *a)* Escolhe-se ao acaso uma urna e extrai-se uma esfera. Probabilidade de saída de uma esfera branca. *b)* Tira-se uma esfera de cada uma das urnas. Probabilidade de que saia pelo menos uma esfera branca.

R: $p_a = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{37} + \dfrac{3}{25} + \dfrac{1}{5}\right) = 0{,}134$ *e* $p_b = 1 - \dfrac{34}{37} \cdot \dfrac{22}{25} \cdot \dfrac{4}{5}$.

879 — Fazem-se 10 lançamentos de uma moeda. Calcular os valores exacto e aproximado da probabilidade de um desvio 2 e o êrro relativo cometido, tomando o valor aproximado. R: *Valor exacto:* $P_2 = \dfrac{10!}{7!\,3!} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = 0.1172$. *Valor* *aproximado*:

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{5\pi}} e^{-\frac{2^2}{5}} = 0{,}1134; \ \textit{êrro relativo} \ \frac{P_2 - P_2}{P_2} = 0{,}032 .$$

(Vidé: G. Castelnuovo, *Calcolo delle Probabilità* — Vol. I, 2.ª ed., pg. 88).

M. Zaluar.

F. C. P.—1.º exame de freqüência, 7-2-1941

880 — Numa urna há duas bolas brancas e três pretas.

a) Tiram-se ao acaso sucessivamente duas bolas. Calcular a probabilidade de ser branca uma terceira bola tirada ao acaso da urna. R: *a) Seja* B_i *a saída de uma bola branca na tiragem de ordem* i. *Há três maneiras contraditórias de realização do acontecimento* B_3: $B_1 B'_2 B_3$, $B'_1 B_2 B_3$, $B'_1 B'_2 B_3$. *O cálculo das correspondentes probabilidades não oferece dificuldade. Resultado:* $2/5$.

b) Observou-se que esta terceira bola era branca. Calcular a probabilidade de as duas primeiras terem sido da mesma côr. R: *b) Teremos de calcular* $p_{B'_1 B'_1 : B_3} = \frac{p_{B'_1 B'_2 B_3}}{p_{B_3}} = 1/2$.

M. Gonçalves Miranda.

Contêm pontos de primeiros exames de freqüência de *Cálculo das Probabilidades* os seguintes números da «Gazeta de Matemática»: 1 e 5.

PEDAGOGIA

Na reünião da Sociedade Portuguesa de Matemática de 10 de Dezembro de 1941 foi aprovada por unânimidade e sem discussão a proposta que abaixo se transcreve e que a Secção Pedagógica da Sociedade Portuguesa de Matemática apresentou em seguimento do estudo dos pontos de exame de matemática dos liceus relativos ao ano lectivo de 1940-41 que levou a efeito em cumprimento do plano de trabalhos aprovado pela S. P. M. Eis o texto da proposta:

A Sociedade Portuguesa de Matemática, tendo procedido ao exame dos pontos de matemática saídos nos exames dos liceus no ano lectivo de 1940-41, verificou o seguinte:

1.º Que êsses pontos são, duma forma geral, demasiado extensos, com um número de questões sempre superior a vinte, o que provoca dispersão em pequenas questões e não permite, por isso mesmo, avaliar da capacidade de raciocínio dos examinandos e da sua aptidão para pôr, resolver e discutir problemas.

2.º Que os pontos não foram organizados com o necessário cuidado e equilíbrio, verificando-se, num mesmo ciclo, por vêzes fortes disparidades no grau de dificuldade ou trabalho de execução.

3.º Que, dentro de cada ponto, se encontra freqüentemente um grande desequilíbrio

a) já na classificação das questões, em problemas e perguntas; há *perguntas* que são *problemas*, por vêzes mesmo mais difíceis;

b) já na valorização respectiva; vêem-se, com freqüência, *perguntas* mais difíceis ou trabalhosas que *problemas* e com valorização muito inferior; vêem-se ainda, perguntas com a mesma valorização e dificuldades muito diferentes. Reconhece a Sociedade Portuguesa de Matemática que daí resulta, por vêzes, um benefício para o examinando, mas considera o princípio condenável pelas condições psicológicas em que o examinando fica colocado em face da prova.

4.º Que, em grande número de enunciados, há imprecisão de linguagem, imprópria da disciplina de Matemática, bem como redacção confusa.

5.º Que, à mencionada imprecisão e confusão, se alia, agravando os seus efeitoss, imprecisão dos dados; existem pontos com figuras mal feitas, com figuras de que se não dão os dados necessários e com figuras erradas.

6.º Que grande número de questões se refere a coisas inúteis, no nível que o ensino da Matemática deve ter nos liceus, como seja a exigência de operações sôbre números estritos em sistemas de numeração em base diferente de 10, o que redunda em prejuízo de questões com real utilidade.

7.º Que as chaves em face das quais os professores devem classificar os pontos enfermam de vários males, como

a) rigidez de resultados, dando, por vêzes, apenas um resultado onde o enunciado da questão comporta mais de um, ou exigindo uma resposta nem sempre a mais natural ou certa;

b) exigência de resultados com aproximações què os dados do enunciado não permitem;

c) êrros nas respostas.

Verifica ainda que o folheto intitulado «Instruções aos reitores dos liceus sôbre os exames liceais e de admissão aos liceus» contém, na parte referente a normas de classificação, a disposição anti-pedagógica de mandar reduzir a zero a cotação duma resposta dificiente ou incompleta, sem contemplação pelo trabalho realizado pelo examinando na questão respectiva, mesmo que êle mostre estar de posse de todos os elementos para a resolução.