A QUADRATURA DO CÍRCULO

(De Marcel Boll — Les étapes des Mathématiques — Paris, 1942 — p. 79-80)

Os geómetras da antigüidade foram todos atingidos pela fúria da quadratura; e *Aristófanes* [1], no século V a. C., já os metia a ridículo!

Uma história dos *quadradores* foi publicada em 1754: «homens, na maioria apenas iniciados na geometria, que tentam quadrar o círculo e teimam em manter paralogismos absurdos para uma solução do problema».

A situação não mudara em 1831: «Sem cessar, novos *quadradores* assaltam as agremiações científicas e sustentam os seus erros com uma teimosia e uma jactância invencíveis».

Segundo uma maliciosa observação de *Francisco Arago* [2], a quadratura do círculo é uma doença que grassa sobretudo na primavera [3].

Todos os anos, *de pauvres esprits*, que não possuem decerto as primeiras noções das coisas de que falam [4], anunciam às academias e ao público que encontraram (!) a *razão exacta* da circunferência para o seu diâmetro! Bem entendido, esta *razão exacta* difere dum inventor para outro e está errada geralmente a partir do segundo decimal [5].

A *Academia das Ciências* [6] tomou, de há muito, a decisão de não se ocupar mais das memórias que tratam dêste problema, como das que prosseguem na investigação do moto contínuo.

Haverá mal nisso?

Não, evidentemente. Ela bem sabe que assumindo esta atitude não se arrisca a perder nenhuma descoberta séria.

A opinião dos seus membros resume-se mais ou menos no seguinte: «comparámos a probabilidade de que um sábio ignorado descubra um resultado contrário àquilo que é sabido de há muito, com a probabilidade de que exista mais um louco na Terra; a segunda probabilidade pareceu-nos maior» [7].

(tradução de A. S. C.)

---

[1] *Aristófanes* (450-386? a. C.) o mais célebre poeta satírico grego. (N. T.).

[2] *Francisco Arago* (1786-1853) um dos mais ilustres sábios franceses do século XIX, deixou uma obra notável na física e na astronomia. Foi o primeiro aluno da École Polytechnique que votou contra o consulado vitalício de Napoleão Bonaparte. (N. T.).

[3] O tradutor deveria ter posto outono em vez de primavera, se tomasse em consideração a mudança de coordenadas geográficas. (N. T.).

[4] O caso é igual ao dos que inventam sistemas de jôgo para *vencer* na roleta e no *trente-et-quarante*.

[5] *Pierre Boutroux*, L'idéal scientifique des mathématiciens, 1920.

[6] Deve esclarecer-se que o autor do texto se refere à Academia das Ciências de Paris. (N. T.).

[7] *Henri Poincaré*, La science et l'hypothèse, 1902.

APLICAÇÃO DO CÁLCULO DAS PROBABILIDADES À RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE BIOLOGIA

por A. QUINTANILHA (I), H. B. RIBEIRO [Centro de Estudos Matemáticos] (II), L. W. STEVENS (III)

I

Nos Basidiomicetos, fungos superiores de cuja genética nos vimos ocupando, desapareceram todos os vestígios de órgãos sexuais. A conjugação é *somàtogâmica*, quere dizer, realiza-se por fusão de filamentos somáticos que misturam os seus protoplasmas e formam a primeira parelha de núcleos. Êste primeiro *dicárion* multiplica-se agora por divisões conjugadas, dando origem a um *micélio secundário*, que vai produzir mais tarde, nas formas superiores, as frutificações ou chapéus. Aqui os *basídios*, células que vão dar os esporos, possuem dois núcleos de sexo diferente provenientes, por divisões sucessivas e conjugadas daquele primeiro dicárion que jà vimos como se formava. Num dado momento estes dois núcleos conjugam-se e dão origem a um núcleo único diploïde, isto é, com um número duplo de cromosomas. A isto se reduz, nos Basidiomicetos, o acto sexual — uma *plàsmogamia* (fusão de plasmas) seguida mais tarde de uma *càriogamia* (fusão nuclear). Agora cada um dêstes núcleos diploides divide-se duas vezes seguidas e produz os quatro núcleos haploides (com o número simples de cromosomas) dos quatro esporos que se vão formar.

Estes esporos são os órgãos de multiplicação dos Basidiomicetos; levados pelo vento ou pelas águas vão germinar, como as sementes das plantas superiores, e produzir uma nova geração de indivíduos.

Se semearmos agora os esporos isoladamente verificamos que em certas espécies estas culturas *monospóricas* produzem *micélios secundários*, com basídios binucleados e um ciclo sexual completo.

Chamamos a estas espécies *homotálicas* e verificamos que elas se conduzem, sob êste ponto de vista, como as plantas superiores com flores hermafroditas, ou com flores masculinas e femininas no mesmo pé. Em ambos os casos um indivíduo proveniente da germinação de um esporo, ou de uma semente, pode produzir sòzinho uma nova geração, após a realização de um acto sexual.

Em outras espécies porém estas culturas monospóricas nunca frutificam. Para se obterem micélios secundários e frutificações, para que o acto sexual se realize, é indispensável conjugar dois indivíduos provenientes cada um de seu esporo. A estas espécies chamamos *heterotálicas*. Elas comportam-se como as plantas superiores *dióicas*, isto é, com flores masculinas e femininas em pés diferentes, e necessitando por isso da cooperação de dois indivíduos para a realização do acto sexual.

Já vimos que nos Basidiomicetos não existem órgãos sexuais; os indivíduos que nas espécies heterotálicas se vão conjugar somos incapazes de os distinguir morfològicamente um do outro; e todavia não é possível obter frutificações pela conjugação de dois quaisquer indivíduos escolhidos ao acaso. Tudo se passa como se, apesar da ausência de órgãos sexuais, continuassem a existir sexos diferentes, não morfològicamente, mas fisiològicamente, e fôsse necessário, para obter cruzamentos férteis, escolher dois indivíduos não pertencendo ao mesmo sexo.

Assim, nas espécies heterotálicas de Basidiomicetos, não basta observar uma colecção de culturas monospóricas para dizer se são ou não do mesmo *sexo;* é necessário cruzar cada indivíduo com todos os outros. Aquêles que derem cruzamentos férteis, ou *reacção positiva*, como se diz vulgarmente, pertencem a sexos diferentes; os do mesmo sexo só dão cruzamentos estéreis, isto é, *reacção negativa*.

Feitos todos os cruzamentos possíveis entre os n indivíduos de uma colecção de culturas monospóricas verifica-se que, para certas espécies heterotálicas, existem dois grupos e só dois, digamos a e b, de tal modo que qualquer cruzamento entre um indivíduo do grupo a com um outro do grupo b é sempre fecundo; mas são estéreis todos os cruzamentos entre indivíduos do mesmo grupo.

É isso que está representado no quadro I, onde os sinais (+) representam cruzamentos ferteis e os sinais (−) cruzamentos estéreis.

	a	b
a	−	+
b	+	−

Quadro I

Tudo se passa aqui como se um grupo representasse o sexo masculino e o outro o sexo feminino, mas ambos desprovidos dos órgãos que poderiam permitir o reconhecimento morfológico do sexo.

Nem sempre porém as coisas se passam com esta simplicidade. Há outras espécies, igualmente heterotálicas, onde, feitos todos os cruzamentos possíveis de uma colecção de n indivíduos dois a dois, se verifica que, em vez de dois grupos a e b, como no exemplo anterior, existem quatro grupos, a, b, c e d, de modo que a é complementar de b, e c complementar de d (cf. quadro II).

	a	b	c	d
a	−	+	−	−
b	+	−	−	−
c	−	−	−	+
d	−	−	+	−

Quadro II

Agora tudo se passa como se existissem *quatro sexos diferentes e complementares dois a dois.* Os micélios secundários e as frutificações que se obtêm pelos cruzamentos de a com b, ou de c com d, têm exactamente o mesmo aspecto; e na geração imediata voltam a aparecer os mesmos quatro grupos, qualquer que seja o cruzamento de onde se partiu.

As espécies com dois grupos sexuais chamam-se heterotálicas bipolares; as que possuem quatro grupos são heterotálicas tetrapolares. Tanto numas como noutras há factores mendelianos responsáveis por êste fenómeno de compatibilidade e incompatibilidade, um par (Aa) nas espécies bipolares, dois pares (Aa, Bb) nas espécies tetrapolares. A disjunção faz-se, naturalmente, no momento da divisão de redução, quando os basídios vão produzir os esporos; de modo que os dois *sexos* das formas bipolares são respectivamente A e a, e os quatro *sexos* das formas tetrapolares são representados pelas fórmulas AB, ab, Ab, aB. Só são possíveis as combinações entre *sexos complementares*, isto é, que não possuam qualquer factor comum: $A \times a$ nas formas bipolares; $AB \times ab$ e $Ab \times aB$ nas formas tetrapolares.

Esta interpretação genética, introduzida por Kniep, explica perfeitamente todos os resultados experimentais, bem como o facto de, em cada geração, os esporos de cada *sexo* estarem representados por números rigorosamente iguais.

Para os que se ocupam da genética, e até da sistemática, dos Basidiomicetos tem grande importância o conhecimento da conduta sexual das diferentes espécies, se são homotálicas ou heterotálicas, bipolares ou tetrapolares. Para isso fazem-se culturas monospóricas e no caso destas não passarem expontâneamente ao estado de micélios secundários, sabemos que se trata de uma espécie heterotálica. Neste caso procedemos a todos os cruzamentos possíveis de cada uma das n culturas primárias com tôdas as outras o que nos dá $\frac{n^2-n}{2}$ cruzamentos. Observados agora os resultados, separados e agrupados por afinidades os cruzamentos positivos e negativos, se obtivermos um quadro do tipo I (cf. pág. 3) estamos em presença de uma espécie bipolar; se, pelo contrário, chegarmos a um quadro do tipo II (cf. pág. 3) trata-se de uma espécie tetrapolar.

Tudo isto parece muito simples, assim, teòricamente explicado. Na prática, porém, as coisas são por vezes bastante mais complicadas. Há muitas espécies onde nunca ninguém conseguiu fazer germinar os esporos; e outras onde a percentagem de esporos germinados é tão insignificante que se torna dificílimo obter um número razoável de culturas *garantidas monospóricas*. Por outro lado os resultados observados dos cruzamentos nem sempre correspondem rigorosamente à expectativa teórica. Há casos, por exemplo, em que dois micélios de sexos complementares dão um cruzamento negativo, ou porque um dos inóculos morreu ao ser repicado, ou porque se desenvolvem mal nos meios de cultura empregados, etc., etc. Neste caso um quadro de bipolaridade em que certos cruzamentos positivos falharam pode levar à conclusão errada de que estamos em presença de uma espécie tetrapolar.

Mas pode ainda um cruzamento, entre micélios que possuem um factor comum ($AB \times aB$, p. ex.), e que devia por isso ser negativo, dar origem a um micélio muito difícil de distinguir dos micélios secundários normais. É o caso das *copulações ilegítimas*, que estudamos com particular atenção e cujo mistério conseguimos decifrar. Neste caso vamos marcar com um sinal positivo uma reacção que devia ter sido negativa e que na realidade é diferente dos micélios secundários normais, mas por vezes muito difícil de distinguir. Se numa espécie tetrapolar aparecerem várias destas copulações ilegítimas o quadro de tetrapolaridade pode tomar o aspecto de um quadro bipolar.

Finalmente pode ainda acontecer que entre as n culturas monospóricas que conseguimos isolar faltem completamente os representantes de um grupo sexual, ou mesmo de dois ou três, nas espécies tetrapolares. Se esta falta dos representantes de um ou mais grupos vem associada com falhas nas reacções positivas, ou com copulações ilegítimas, fàcilmente se compreende quanto todos estes factores podem dificultar a interpretação dos resultados.

Quanto mais pequeno fôr n maior é a probabilidade de que todo um grupo sexual não esteja representado. Mas à medida que n aumenta, cresce muito ràpidamente o número de cruzamentos a efectuar e a observar $\left(\frac{n^2-n}{2}\right)$, isto é, a soma de trabalho para o estudo de uma espécie.

Os únicos casos que até agora nos apareceram foram os de, em espécies tetrapolares, faltarem todos os representantes de um grupo, entre os primeiros n esporos isolados. Convinha pois conhecer rigorosamente qual a probabilidade de que tal facto se dê para cada valor de n, afim de reduzir ao mínimo esta probabilidade sem aumentar desnecessàriamente o trabalho a efectuar.

Foi êste o problema que pusemos ao sr. dr. Hugo Ribeiro e que êle quis ter a gentileza de resolver pelo que aqui lhe testemunhamos todo o nosso reconhecimento.

II

Utilisando um esquema usual em Cálculo das Probabilidades, o problema proposto toma a forma seguinte: determinar a probabilidade $P_{n,4}$ para que em n lançamentos de um dado tetraédrico regular cada uma das faces assente, pelo menos uma vez, no plano sôbre o qual se lança o dado. E êste é um problema elementar, «de provas repetidas», de solução bem conhecida.

Há porém, no nosso caso, uma outra exigência a que tal solução não satisfaz: a expressão analítica da relação que liga $P_{n,4}$ a n deverá ser tal que permita uma avaliação efectiva de n dado $P_{n,4}$. Somos assim conduzidos a procurar uma tal expressão abordando directamente o problema da seguinte maneira:

O problema equivale ao da determinação da probabilidade $P_{n,4}$ para que tomada ao acaso uma entre as 4^n aplicações (ou funções unívocas) dum conjunto de n elementos num (A, B, C, D) de quatro elementos A, B, C e D, nessa aplicação figure pelo menos uma vez cada um dos quatro elementos A, B, C, D (valores da função). Determinemos $1-P_{n,4}$, isto é a probabilidade para que pelo menos um dos elementos A, B, C, D não figure na aplicação tomada ao acaso. Um tal acontecimento é a soma dos seguintes quatro incompatíveis dois a dois: 1) A não figure; 2) B não figure mas A figure; 3) C não figure mas figurem A e B; 4) D não figure mas figurem A, B e C. As probabilidades em 1) e 2) são respectivamente, como é fácil de ver, $\frac{3^n}{4^n}$ e $\frac{3^n}{4^n}\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)$. A probabilidade em 3) é $\frac{3^n}{4^n}\cdot\left[1-\left\{2\cdot\frac{2^n}{3^n}\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{3^n}\right\}\right]$ porque um tal acontecimento é o produto lógico dos dois seguintes: C não figure na aplicação (de probabilidade $\left.\frac{3^n}{4^n}\right)$ e A e B figurem (de probabilidade a calcular, com a hipótese de que C não figura, por $1-p$ sendo p a soma das probabilidades dos 3 acontecimentos incompatíveis dois a dois: B não figure mas sim A, A não figure mas sim B, nem A nem B figurem). A probabilidade em 4) é $\frac{3^n}{4^n}\cdot P_{n,3}$ onde $P_{n,3}$ é a probabilidade para que, tomada ao acaso uma entre as 3^n aplicações dum conjunto de n elementos num (A, B, C) de três elementos, nessa aplicação figure, pelo menos uma vez, cada um dos três elementos A, B, C.

Tem-se, pois, $1-P_{n,4}=\frac{3^n}{4^n}+\frac{3^n}{4^n}\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)+$ $+\frac{3^n}{4^n}\left[1-\left\{2\cdot\frac{2^n}{3^n}\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{3^n}\right\}\right]+\frac{3^n}{4^n}P_{n,3}$.

E haverá agora que calcular $P_{n,3}$ (o que se fará procedendo anàlogamente ao que se acaba de referir) obtendo-se $1-P_{n,3}=\frac{2^n}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+$ $+\frac{2^n}{3^n}\left[1-2\cdot\frac{1}{2^n}\right]$ donde $P_{n,3}=1-\frac{2^n-1}{3^{n-1}}$.

Tem-se finalmente $1-P_{n,4}=\frac{3^n-3.2^{n-1}+1}{4^{n-1}}=$ $=\frac{3^n}{4^{n-1}}-\frac{3}{2^{n-1}}+\frac{1}{4^{n-1}}$ ou $P_{n,4}=\frac{4^{n-1}-3^n+3.2^{n-1}-1}{4^{n-1}}$.

O dr. José da Silva Paulo que quis fazer o favor de efectuar os cálculos determinou

$$P_{11,4}\simeq 0{,}834\,,\quad P_{21,4}\simeq 0{,}990\,,\quad P_{31,4}\simeq 0{,}999\,.$$

O professor Quintanilha considera, além do caso que deu origem ao problema anterior, dois outros para os quais convém indicar aqui os resultados que se obtêm, aliás de modo imediato. Um é o das formas bipolares, em há dois grupos igualmente numerosos. Aqui a probabilidade de que faltem os elementos de um grupo é $\frac{1}{2^{n-1}}$. O outro caso é o das formas tetrapolares, em que há 4 grupos A, B, C, D igualmente numerosos onde A é complementar de B e C complementar de D. Aqui a probabilidade de que faltem simultâneamente os elementos de A e B ou de C e D é também $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Já depois de redigida esta pequena nota, e por amável interferência do Eng. Fernando Carvalho Araújo, soubemos que uma expresssão analítica muito geral, igualmente utilisável na resolução do problema, fôra posta em relêvo já em 1937 pelo matemático inglês W. L. Stevens; e tivemos o prazer de discutir a questão com o próprio autor e verificar que da sua igualdade resulta, de facto, em particular, a relação a que chegámos.

Procurámos, então, obter também (o que desde início se nos afigurara tarefa simples) uma igualdade para o caso geral, seguindo o caminho muito elementar e muito directo que tinhamos já tomado para $s=4$.

O resultado a que chegámos é o seguinte:

$$1-P_{n,s}=\left(\frac{s-1}{s}\right)^n\sum_{i=0}^{s-1}\left[1-\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}\left(\frac{s-1-j}{s-1}\right)^n\tau_j\right]$$

com $\tau_j=\begin{cases}1 & \text{se } j\neq i\\ 1-\left(\dfrac{s-1-i}{s-1-j}\right)^n & \text{se } j=i.\end{cases}$

Estamos muito agradecidos a W. L. Stevens pela prontidão com que acedeu a publicar, aqui os seus resultados.

III

Consideremos a série das potências de ordem s dos números naturais começando em zero e as diferenças sucessivas destas potências.

Expressões gerais

$$\begin{array}{cccccc}
0^s & & & & & \\
 & \Delta(0^s) & & & & \\
1^s & & \Delta^2(0^s) & & & \\
 & \Delta(1^s) & & \Delta^3(0^s) & & \\
2^s & & \Delta^2(1^s) & & \cdots & \Delta^r(0^s) \\
 & \Delta(2^s) & & \Delta^3(1^s) & & \\
3^s & & \Delta^2(2^s) & & \cdots & \Delta^r(1^s) \\
 & \Delta(3^s) & & \Delta^3(2^s) & & \\
4^s & & \Delta^2(3^s) & & & \\
 & \Delta(4^s) & & & & \\
5^s & & & & &
\end{array}$$

Exemplo, $s=5$

$$\begin{array}{cccccc}
0 & & & & & \\
 & 1 & & & & \\
1 & & 30 & & & \\
 & 31 & & 150 & & \\
32 & & 180 & & 240 & \\
 & 211 & & 390 & & 120 \\
243 & & 570 & & 360 & \\
 & 781 & & 750 & & \\
1024 & & 1320 & & & \\
 & 2101 & & & & \\
3125 & & & & &
\end{array}$$

As quantidades na margem superior da tabela podem chamar-se «diferenças iniciais das potências de ordem s de zero» e obedecem à equação operacional $n^s=E^n(0^s)=(1+\Delta)^n(0^s)=(0^s)+n\Delta(0^s)+$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\Delta^2(0^s)+\cdots+\frac{n!}{(n-r)!\,r!}\Delta^r(0^s)+\cdots+\Delta^n(0^s)$$
para todos os valores de n e s ($\Delta^p(0^s)=0$ se $p>s$).

Consideremos agora o seguinte problema: Dados s elementos diferentes e n classes, de quantas maneiras poderemos distribuïr os s elementos pelas n classes, de tal modo que r das classes fiquem ocupadas e $n-r$ desocupadas?

Seja u_{rs} o número de maneiras de distribuïr os s elementos por um certo e determinado grupo de r classes. É evidente que $u_{0s}=0$, e $u_{ps}=0$ quando $p>s$.

Então o número de maneiras de distribuïr os s elementos por quaisquer r classes é dado por $\frac{n!}{(n-r)!\,r!}u_{rs}$ visto $n!/(n-r)!\,r!$ ser o número de alternativas para a escolha de r classes dentro das n consideradas.

Contudo o número total de maneiras de colocarmos s elementos em n classes, sem restrições, é n^s porque cada elemento se pode colocar em qualquer das n classes.

Somando para todos os valores possíveis de r teremos $u_{0s}+nu_{1s}+\frac{n(n-1)}{2}u_{2s}+\cdots+\frac{n!}{(n-r)!\,r!}u_{rs}+$ $+\cdots+u_{ns}=n^s$ equação que é satisfeita para todos os valores de n e s.

Comparando-a com a equação anterior vê-se que $u_{rs}\equiv\Delta^r(0^s)$.

Se supozermos ainda que cada elemento tem a mesma probabilidade, de cair em qualquer das n classes, então todos estes arranjos são igualmente provaveis e a lei de distribuïção de r, número de classes ocupadas, obtém-se dividindo por n^s os têrmos da equação achada.

O têrmo geral será $\frac{1}{n^s}\cdot\frac{n!}{(n-r)!\,r!}\Delta^r(0^s)$.

As quantidades $\frac{1}{r!}\Delta^r(0^s)$ foram tabeladas por Stevens (1937) e a tabela foi reimpressa por Fisher e Yates.

Exemplo: Um fungo é caracterizado por 4 tipos sexuais igualmente provaveis. Qual a grandeza da amostra a escolher que nos garanta uma confiançá razoável no aparecimento dos 4 tipos sexuais?

Teremos $n=4$, $r=4$

Probabilidade $P=\frac{4!}{4^s}\cdot\frac{\Delta^4(0^s)}{4!}$.

Da tabela obtém-se

S	$\frac{\Delta^4(0^s)}{4!}$	P
10	34105	73,48 %
15	423.5595	94,67 %
20	4.52321×10^5	98,73 %
	etc.	

Referências

W. L. Stevens (1937), *The Significance of Grouping* Annals of Eugenics 8, pp. 57-69.

R. A. Fisher & F. Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research* Oliver and Boyd, Edinburgh, Scotland.