RESOLUÇÃO GRÁFICA DA EQUAÇÃO ALGÉBRICA DO 2.º GRAU A UMA INCÓGNITA

por JOSÉ DA SILVA PAULO

Vários são os métodos, e bem conhecidos, geralmente usados para a resolução gráfica da equação do 2.º grau a uma incógnita. Quási todos os livros elementares tratam o assunto, mas os métodos geralmente usados sómente têm aplicação no caso em que as raízes da equação são reais.

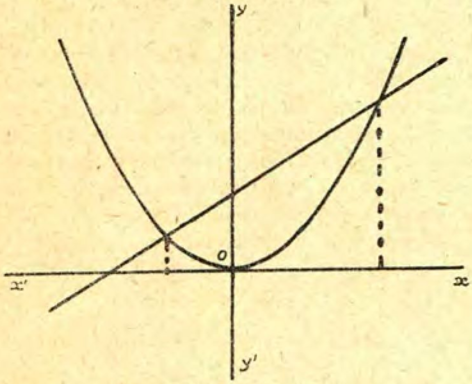

Figura 1

Nesta nota exporemos dois dêles e apresentaremos outros dois aplicáveis ao caso das raízes da equação serem números complexos.

Consideremos a equação algébrica do 2.º grau reduzida à forma 1) $x^2+px+q=0$ e façamos 2) $y=x^2$ e 3) $y=-px-q$; é evidente que os valores de x que satisfazem simultâneamente a 2) e 3) são as raízes de 1); de modo que esta última equação se pode resolver gràficamente determinando as abscissas dos pontos de encontro da parábola 2) com a recta 3) fig. 1.

É êste um dos métodos que dá as raízes reais da equação 1), se esta as tiver. Assim, se a recta encontra a parábola em dois pontos, 1) terá duas raízes reais, ambas positivas, ambas negativas, uma positiva e uma negativa, ou uma nula e outra não nula, conforme os dois pontos são ambos do 1.º quadrante, ambos do 2.º, um do 1.º e outro do 2.º, ou em que um dos pontos é a origem; se a recta é tangente à parábola, 1) terá uma raíz dupla, positiva, negativa ou nula; e finalmente se as linhas 2) e 3) não se encontram, a equação 1) terá raízes que são números complexos, os quais não podem ser determinados gràficamente por êste processo.

Vejamos agora um outro método que se baseia em propriedades das cordas de uma circunferência.

Recorda-se que «se duas ou mais cordas de uma circunferência, se encontram num ponto do interior do círculo, cada uma delas é dividida pelo ponto de intersecção em dois segmentos cujo produto é constante».

Consideremos ainda a equação 1) e dois eixos coordenados rectangulares (fig. 2). Marquemos sôbre um dêles (o dos xx por exemplo) um segmento $\overline{OC}=-p/2$ e sôbre o outro os segmentos $\overline{OE}=|q|$ e $\overline{OD}=\pm 1$, tendo em conta o sinal de p e tomando $\overline{OD}$ o sinal $+$ ou $-$, conforme q fôr positivo ou negativo (no caso da figura supõe-se $q<0$).

Determinemos uma circunferência que passe pelos pontos D e E (levantando a perpendicular ao meio de DE) e cujo centro O' tenha a abscissa de C, isto é, $-p/2$; esta circunferência, no caso geral, e se as raízes de 1) forem reais, encontrará o eixo dos xx em dois pontos A e B cujas abscissas são as raízes de 1). Efectivamente é $\overline{OC}=(\overline{OA}+\overline{OB}):2$ ou seja $\overline{OA}+\overline{OB}=2\overline{OC}=-p$ e $\overline{OA}\times\overline{OB}=\overline{OD}\times\overline{OE}=|q|\times(\pm 1)=q$, donde $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$, abscissas de A e B, são as raízes de 1) pois a sua soma é $-p$ e o seu produto q.

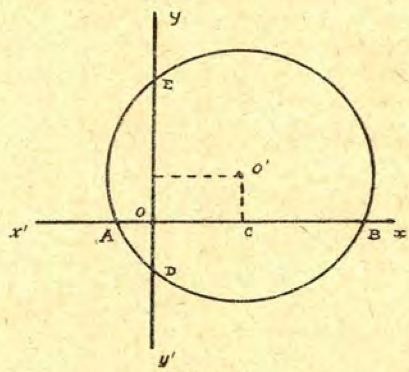

Figura 2