RESOLUÇÃO GRÁFICA DA EQUAÇÃO ALGÉBRICA DO 2.º GRAU A UMA INCÓGNITA

por JOSÉ DA SILVA PAULO

Vários são os métodos, e bem conhecidos, geralmente usados para a resolução gráfica da equação do 2.º grau a uma incógnita. Quási todos os livros elementares tratam o assunto, mas os métodos geralmente usados sómente têm aplicação no caso em que as raízes da equação são reais.

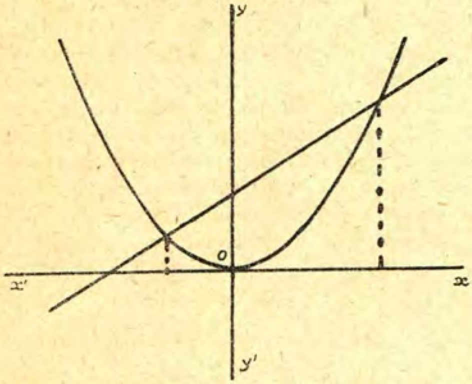

Figura 1

Nesta nota exporemos dois dêles e apresentaremos outros dois aplicáveis ao caso das raízes da equação serem números complexos.

Consideremos a equação algébrica do 2.º grau reduzida à forma 1) $x^2+px+q=0$ e façamos 2) $y=x^2$ e 3) $y=-px-q$; é evidente que os valores de x que satisfazem simultâneamente a 2) e 3) são as raízes de 1); de modo que esta última equação se pode resolver gràficamente determinando as abscissas dos pontos de encontro da parábola 2) com a recta 3) fig. 1.

É êste um dos métodos que dá as raízes reais da equação 1), se esta as tiver. Assim, se a recta encontra a parábola em dois pontos, 1) terá duas raízes reais, ambas positivas, ambas negativas, uma positiva e uma negativa, ou uma nula e outra não nula, conforme os dois pontos são ambos do 1.º quadrante, ambos do 2.º, um do 1.º e outro do 2.º, ou em que um dos pontos é a origem; se a recta é tangente à parábola, 1) terá uma raíz dupla, positiva, negativa ou nula; e finalmente se as linhas 2) e 3) não se encontram, a equação 1) terá raízes que são números complexos, os quais não podem ser determinados gràficamente por êste processo.

Vejamos agora um outro método que se baseia em propriedades das cordas de uma circunferência.

Recorda-se que «se duas ou mais cordas de uma circunferência, se encontram num ponto do interior do círculo, cada uma delas é dividida pelo ponto de intersecção em dois segmentos cujo produto é constante».

Consideremos ainda a equação 1) e dois eixos coordenados rectangulares (fig. 2). Marquemos sôbre um dêles (o dos xx por exemplo) um segmento $\overline{OC}=-p/2$ e sôbre o outro os segmentos $\overline{OE}=|q|$ e $\overline{OD}=\pm 1$, tendo em conta o sinal de p e tomando $\overline{OD}$ o sinal $+$ ou $-$, conforme q fôr positivo ou negativo (no caso da figura supõe-se $q<0$).

Determinemos uma circunferência que passe pelos pontos D e E (levantando a perpendicular ao meio de DE) e cujo centro O' tenha a abscissa de C, isto é, $-p/2$; esta circunferência, no caso geral, e se as raízes de 1) forem reais, encontrará o eixo dos xx em dois pontos A e B cujas abscissas são as raízes de 1).

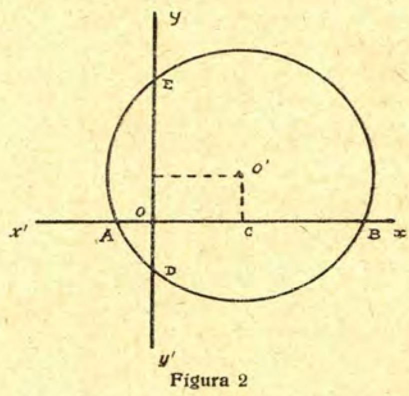

Figura 2

Efectivamente é $\overline{OC}=(\overline{OA}+\overline{OB}):2$ ou seja $\overline{OA}+\overline{OB}=2\overline{OC}=-p$ e $\overline{OA}\times\overline{OB}=\overline{OD}\times\overline{OE}=|q|\times(\pm 1)=q$, donde $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$, abscissas de A e B, são as raízes de 1) pois a sua soma é $-p$ e o seu produto q.

É claro que, como no método anterior, 3 casos podem apresentar-se: 1.º) a circunferência de centro O', corta em dois pontos o eixo dos xx (situados ambos para o mesmo lado de Oy, ou um de um lado e outro do outro); 2.º a circunferência é

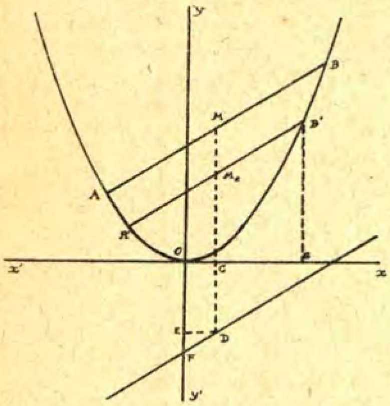

Figura 3

tangente a Ox; 3.º) não encontra Ox, e assim terá 1) duas raízes reais (ambas positivas, ambas negativas ou uma positiva e uma negativa), uma raiz dupla, ou raízes que são números complexos, e neste último caso ainda o método não permite determinar o seu valor. Note-se que o método ainda se emprega com uma pequena variante no caso de haver uma raiz nula.

Dêste modo se quisermos resolver gràficamente a equação 1) quando as suas raízes são imaginárias teremos que recorrer a outros métodos. O primeiro que apresentamos encontramo-lo no livro «Graphic Algebra» de Schultz, e consiste no seguinte: A equação 1) no caso de as suas raízes serem números complexos da forma $a \pm bi$ pode escrever-se, como é obvio, sob a forma 4) $x^2-2ax+a^2+b^2=0$. Consideremos agora a parábola 5) $y=x^2$ e a recta 6) $y=2ax-(a^2+b^2)$.

É claro que neste caso não se encontram as linhas 5) e 6) por as raízes de 4) serem imaginárias.

Tracemos uma corda qualquer AB da parábola 5) mas paralela à recta 6), (fig. 3). Esta corda terá por equação 7) $y=2ax+r$, sendo r a ordenada na origem, e notando que AB deve ter o o mesmo coeficiente angular, $2a$, que 6). As abscissas dos pontos extremos A e B são os valores de x soluções comuns a 7) e 5) ou seja $x_1=a+\sqrt{a^2+r}$ e $x_2=a-\sqrt{a^2+r}$; e o ponto médio M de AB terá a abscissa $x_3=(x_1+x_2):2=a$. Determinemos o ponto da recta 6) cuja abscissa é a, isto é o ponto D, e calculemos a sua ordenada. Da figura B tira-se que $\overline{EF}=a\,.\,2a=2a^2$, visto $2a$ ser a tangente do ângulo FDE igual ao que a recta 6) forma com a parte positiva do eixo dos xx; então a ordenada de D é em valor absoluto $a^2+b^2-2a^2=b^2-a^2$, como fàcilmente se vê.

Tracemos finalmente a corda $A'B'$ da parábola 5) paralela à recta 6) e cuja ordenada na origem é em valor absoluto b^2-a^2 ou seja o comprimento do segmento OE; a equação desta corda é $y=2ax+b^2-a^2$ e as suas extremidades terão por abscissas os valores $a+b$ e $a-b$. Como o ponto M_1, médio da corda $A'B'$, tem a abscissa $\overline{OC}=a$, o segmento $\overline{CG}$ é então igual a b, determinando-se assim gràficamente o valor das raízes $a \pm bi$ da equação 4), pelo conhecimento de a e b.

O outro método, que a seguir expomos, muito mais simples que êste, não o vimos ainda tratado em qualquer livro, e isto possìvelmente porque se baseia no problema bem conhecido da determinação do afixo dum complexo de que se conhece a norma a^2+b^2, e a parte real a.

Da comparação de 1) e 4) conclue-se que 8) $a=-p/2$ e 9) $a^2+b^2=q$.

Tomemos para variáveis a e b; nestas condições a equação 8) representa, em coordenadas rectangulares, uma recta paralela ao eixo dos bb

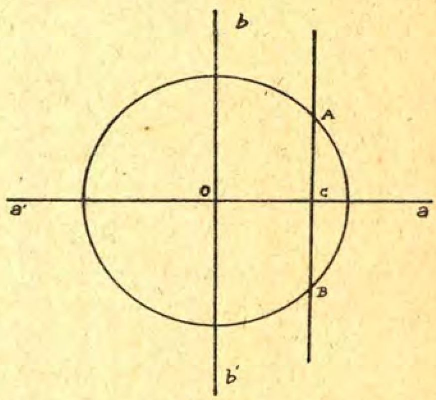

Figura 4

(fig. 4) e 9) representa uma circunferência de raio $\sqrt{q}$ e centro na origem. Os pontos, A e B, de encontro da recta e da circunferência tem por coordenadas, respectivamente, (a, b) e $(a, -b)$, coordenadas que são exactamente a parte real e o coeficiente da parte imaginária dos números complexos $a \pm bi$ raízes de 4).