MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de Aptidão às Escolas Superiores (1941)

Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e de engenheiro geógrafo. — Outubro de 1941.

Ponto n.º 2

892 — Determine os valores de x que satisfazem à inequação $(2x^2-10x+14):(x^2-3x+2)>1$. R: *A inequação proposta é equivalente à seguinte* $(x^2-7x+12):(x^2-3x+2)>0$; *e como as raizes do trinómio numerador são* 4 *e* 3 *e as do denominador* 1 *e* 2, *as soluções da desigualdade são os valores* $x>4$, $x<1$ *e* $2<x<3$.

893 — Enuncie os teoremas que permitem deduzir o sinal do valor numérico do trinómio ax^2+bx+c para os diferentes valores de x.

894 — Escreva o têrmo médio do desenvolvimento de $\left[\left(\frac{2-i}{3i}\right)^{1/4}-\frac{i}{2}\left(\frac{2-i}{3i}\right)^{1/4}\right]^8$. R: *O têrmo médio é* ${}^8C_4\left(\frac{i}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{2-i}{3i}\right)\cdot\left(\frac{2-i}{3i}\right)=70\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{4-4i+1}{-9}=$ $=-\frac{35.(5-4i)}{72}$.

895 — Calcule, por logarítmos, a área de um paralelogramo cujos lados têm por comprimento $18^m,329$ e $7^m,623$, sendo $136^\circ\,37'\,16''$ o ângulo de dois lados consecutivos. R: *Se tomarmos o lado maior para base a altura do paralelogramo será* $h=7,623 \text{ sen } 136^\circ\,37'\,16''$, *e a área* $A=18,392\times 7,623 \text{ sen } 43^\circ\,22'\,44''$ *donde* $\log A=\log 18,392+\log 7,623+\log \text{sen } 43^\circ\,22'\,44''=1,26463+0,88213+\bar{1},83684=1,98360$ *donde* $A=96,094\ m^2$.

896 — Sendo x um dos ângulos cujo seno é y escreva a expressão dos ângulos que tem êsse mesmo seno. R: *Se* x *é dado em radianos a expressão geral dos arcos com o mesmo seno que* x *é* $u=n\pi+(-1)^n x$.

897 — Verifique a identidade: $\text{tg}^2 a-\text{tg}^2 b=\text{sen}(a+b)\,\text{sen}(a-b):\cos^2 a\cos^2 b$. R: *O primeiro membro da igualdade é* $\text{tg}^2 b-\text{tg}^2 a=\text{sen}^2 a:\cos^2 a-\text{sen}^2 b:\cos^2 b=(\text{sen}^2 a\cos^2 b-\text{sen}^2 b\cos^2 a):\cos^2 a\cos^2 b=[(\text{sen}\,a\cos b+\text{sen}\,b\cos a)(\text{sen}\,a\cos b-\text{sen}\,b\cos a)]:\cos^2 a\cos^2 b=\text{sen}(a+b)\,\text{sen}(a-b):\cos^2 a\cos^2 b$.

898 — Figure um diâmetro AB da circunferência de centro O e o raio OC perpendicular a AB. Una A com C. Prolongue OC marcando $\overline{CD}=\overline{AC}$. Una D com A e com B. Determine: 1.º o valor do ângulo ACO; 2.º o valor do ângulo ADB. R: *O ângulo* ACO *mede* 45º *por ser um ângulo inscrito e o arco compreendido entre os seus lados medir* 90º. *O ângulo* ADB *é o dôbro do ângulo* ADC *e êste é um ângulo da base do triângulo isósceles* ACD. *Como o ângulo oposto à base dêste triângulo mede* 45º *a soma dos outros dois, que é igual à medida do ângulo* ADB, *é* 135º.

O ângulo ADB é o ângulo interno dum octógono regular 135º

899 — ¿Que entende por números primos e por números primos entre si? Demonstre recorrendo ao método da decomposição em factores primos, que, sendo a primo com b, também a^n é primo com b. R: *Numeros primos são aquêles que só admitem como divisores o próprio número e a unidade; primos entre si são os números cujo máximo divisor comum é a unidade. Se* a *é primo com* b *nas suas decomposições em factores primos não existem factores comuns. Se* n *é um inteiro positivo a elevação de* a *à potência* n *não introduz na decomposição de* a^n *factores primos diferentes dos de* a; *logo* a^n *é primo com* b *se* n *fôr um inteiro positivo.*

Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto

Ponto n.º 2

900 — Enuncie as relações que permitem determinar a natureza das raízes da equação do segundo grau a uma incógnita, sem a resolver. Aplique-as à equação $2x^2-4x-1=0$. R: *A equação proposta tem o descriminante* $16+4.2.1>0$. *As raizes são por isso reais; são de sinais contrários em vista de ser negativo o seu produto; e a maior é positiva por a soma das raizes ser positiva.*

901 — Transforme a expressão $(x:2-y:3)^4$ num polinómio ordenado segundo as potências decrescentes de x. R: $(x:2-y:3)^4=(x:2)^4-4(x:2)^3(y:3)^2+6(x:2)^2(y:3)^2-4(x:2)(y:3)^3+(y:3)^3$.

902 — Simplifique a fracção $\frac{x^2+x:2-1:2}{x^2-3x:2+1:2}$. R: *As raizes dos polinómios numerador e denominador são respectivamente* $-1, +1/2$; *e* $1, 1/2$. *Logo a fracção pode escrever-se*

$$\frac{(x+1)(x-1:2)}{(x-1)(x-1:2)}=\frac{x+1}{x-1}.$$

903 — Calcule por logarítmos o valor da expressão $\sqrt{\text{sen}\,\alpha\cos\beta}:2\,\text{tg}^2\beta/2$ para $\alpha=101^\circ\,20'\,10''$ e $\beta=121^\circ\,8'\,20''$. R: *A expressão proposta é um* *número complexo pois* $\cos\beta$ *é negativo; os alunos do curso liceal não sabem calcular o logaritmo de um número negativo.*

904 — Calcule a superfície lateral de um cone recto de base circular, conhecido o raio da base igual a 10,23 metros e a altura igual a 51,34 metros. R: *A geratriz do cone é* $\sqrt{10{,}23^2+51{,}34^2}=52{,}34$ *e a área lateral do cone é então* $A=\pi\times 52{,}34\times 10{,}23=1682{,}78$ metros.

905 — Sendo dada a base dum triângulo, o ângulo oposto e a razão dos lados dêste, construir o triângulo. (Lembra-se a relação existente entre os lados do ângulo dum triângulo e os segmentos intersectados no terceiro pela bissectriz). R: *Divide-se o segmento* AB *da base na razão dos dois lados, determinando-se o ponto* D *por onde passa a bissectriz do ângulo oposto à base. Então o segmento* AD *deve ser visto do vértice* C *do triângulo sob o ângulo cuja medida é metade da do ângulo em* C; *e o mesmo acontece com o segmento* DB. *O ponto* C *é, por isso, o ponto de encontro dos dois arcos de circunferência, lugares geométricos dos pontos dos quais se vêem os segmentos* AD *e* DB *sob os ângulos dados.*

906 — Diga o que é uma progressão aritmética e uma progressão geométrica. Dê um exemplo de uma e outra. R: *Uma progressão aritmética é uma sucessão de números em que é constante a diferença de cada um para o anterior; e uma progressão geométrica, uma sucessão de números em que é constante a razão de um têrmo para o anterior. Exemplos: da primeira a sucessão dos números inteiros; da segunda a sucessão das potências de* 2.

Soluções dos n.os 892 a 906 de J. da Silva Paulo.

Instituto Superior de Agronomia

Ponto n.º 1

907 — Determine o parâmetro m de modo que as raízes da equação $x^2-2mx+2-m=0$ sejam *reais* e *positivas*. R: *Se designarmos por* Δ, P *e* S *respectivamente o discriminante da equação, o produto e a soma das suas raízes,* m *deverá satisfazer simultâneamente às relações:* $\Delta>0$, $P>0$ *e* $S>0$ *ou* $m^2+m-2>0$, $2-m>0$ *e* $m>0$ *ou, finalmente,* $0<m<2$ *e* $m<-2$ *ou* $m>1$. *O parâmetro* m *deverá então ser considerado de modo a satisfazer simultâneamente às 3 relações anteriores e é, por isso, qualquer número real do intervalo restrito* $(1,2)$ *isto é,* $1<m<2$.

908 — Sendo $x_1=2$ e $y_1=7$ uma solução da equação $2x+3y=c$, determine c e calcule *tôdas* as soluções inteiras e positivas da referida equação. R: *Por definição de raiz ter-se-á* $2\times 2+3\times 7=c$ *donde* $c=25$. *Por outro lado as soluções inteiras e positivas da equação, são dadas pelas expressões* $x=2+3\theta$ *e* $y=7-2\theta$ *onde* θ *designa um* inteiro *que satisfaça às relações* $2+3\theta>0$ *e* $7-2\theta>0$ *ou seja* $\theta=0,1,2,3$. *As soluções inteiras e positivas são por isso* $x=2;5;8;11$ *e* $y=7;5;2;1$.

909 — Escreva o têrmo médio do desenvolvimento de $\left(\sqrt[4]{\frac{x}{2}}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^8$ e simplifique o resultado obtido. R: *Como o desenvolvimento contém 9 termos, será o quinto o têrmo médio, isto é,*

$$T_{4+1}=\binom{8}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^4\left(\sqrt[4]{\frac{x}{2}}\right)^4=\frac{8.7.6.5}{2.3.4}\cdot\frac{2^4}{x^2}\cdot\frac{x}{2}=\frac{560}{x}.$$

910 — A base de um triângulo isósceles mede 90059 cm e a altura correspondente mede 362,777 metros. Calcule um dos ângulos iguais do referido triângulo. (Empregue logaritmos). R: *Designemos por* c *a altura do triângulo, por* b *a semi-base do triângulo e por* C *o ângulo oposto a* c. *Tem-se* $c=b.\operatorname{tg}C$ *donde* $\operatorname{tg}C=c/b$ *e portanto* $\log\operatorname{tg}C=\log c+\operatorname{colog} b=2{,}55964+\bar{3}{,}34650=\bar{1}{,}90614$ *donde* $C=38^\circ\,51'\,23'',07$.

911 — Determine todos os ângulos, compreendidos entre 0 e 4π radianos, cuja tangente é igual à unidade. R: *O ângulo* α *do* 1.º *quadrante cuja tangente é igual à unidade é* $\pi/4$ *radianos. A expressão geral de todos os ângulos que têm a mesma tangente que o ângulo* α *é* (1) $x=k\pi+\alpha$ *em que* k *designa um inteiro qualquer. Como pelo enunciado do problema,* $0<x<4\pi$ *deverá* k *satisfazer à dupla relação* $0<k\pi+\pi/4<360^\circ$ *isto é* $k=0,1,2,3$. *Dêste modo a fórmula* (1) *fornece-nos as 4 soluções do problema* $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\frac{5\pi}{4}$, $x_3=\frac{9\pi}{4}$ *e* $x_4=\frac{13\pi}{4}$.

912 — Supondo α um ângulo do 2.º quadrante que satisfaz à condição $\operatorname{sen}\alpha=0{,}5$, calcule $\operatorname{tg}\alpha$. R: *Da fórmula fundamental da trigonometria deduz-se, atendendo a que se trata dum ângulo do 2.º quadrante:* $\cos\alpha=-\sqrt{1-(0{,}5)^2}=-\sqrt{3}/2$. *Da definição da tangente resulta fàcilmente:*

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1/2}{-\sqrt{3}/2}=-\sqrt{3}/3.$$ m $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

913 — $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são as diagonais de um quadrilátero $[ABCD]$ irregular, convexo, inscrito numa circunferência. Demonstre que os triângulos $[AMB]$ e $[DMC]$, em que M designa o ponto de intercepção das referidas diagonais, são semelhantes. R: *Com efeito:* $\widehat{D}=\widehat{A}$ *por serem ins-*

critos no arco $\widehat{BC}$ *e* $\widehat{B}=\widehat{C}$ *por serem inscritos no arco* $\widehat{AD}$. *Os triângulos* [AMB] *e* [DMC] *tendo assim dois ângulos iguais, cada um a cada um, são semelhantes,* c. q. d.

914 — O volume de uma pirâmide recta de base quadrada e cuja altura é tripla da aresta da base, é igual a 27 centímetros cúbicos. Calcule o perímetro da base da referida pirâmide. R: *Designemos por* V, h, l, *respectivamente, o volume da pirâmide, a sua altura e a aresta da base. Tem-se* $V=\frac{1}{3}l^2.h$ *e em virtude do enunciado:* $27=\frac{1}{3}l^2.3.l$ *donde* $l=\sqrt[3]{27}=3$. *O perimetro da base é pois* $P=4\times3=12$ cm.

Soluções dos n.^{os} 907 a 914 de J. Calado.

I. S. C. E. F. — 9 de Outubro de 1941

Ponto n.º 3

915 — *a)* Defina semelhança de triângulos e dê as suas propriedades mais importantes.

b) Resolva o seguinte problema: dado um triângulo ABC, considera-se no seu interior um ponto P tal que unindo (por segmentos de recta) P com A, B e C se obtêm três triângulos de áreas iguais. Calcular o produto das alturas dêsses triângulos em função dos lados e de uma das alturas do triângulo dado. R: *b) Porque as áreas dos triângulos* PAB, PAC *e* PBC *são iguais, cada uma delas é um têrço da área do triângulo* ABC *e, por conseqüência* $3ah_1=ah$, $3bh_2=ah$, $3ch_2=ah$, *onde* h_1, h_2 *e* h_3 *são as alturas dos três triângulos obtidos relativas aos lados* a, b, c *respectivamente e* h *é a altura do triângulo dado relativa ao lado a. Multiplicando ordenadamente aquelas três igualdades, vem* $9abch_1h_2h_3=a^3h^3$ *donde* $h_1h_2h_3=\frac{a^2h^3}{9bc}$.

916 — Dada a equação $3x^2-4x+5=0$ e chamando α e β as suas raízes, formar, sem a resolver, outra equação cujas raízes sejam $z_1=2\alpha+\beta$ e $z_2=2\beta+\alpha$. R. *Tem-se* $z_1+z_2=3(\alpha+\beta)$ *e* $z_1z_2=2(\alpha^2+\beta^2)+5\alpha\beta=2(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta$ *e* $z_1+z_2=4$ $z_1z_2=37/3$ *por ser* $\alpha+\beta=4/3$ *e* $\alpha\beta=5/3$. *E a equação pedida é* $3z^2-12z+37=0$.

917 — Calcular $x=a^{1/2}.b^{1/3}.c^{1/4}$ onde $a=0{,}03^{-4}$, $b=\text{sen}\,127^\circ14'$, $c=\text{tg}\,71^\circ47'$. R: $\log x=2\,\text{colog}\,0{,}03+\frac{1}{3}\log\text{sen}\,127^\circ14'+\frac{1}{4}\log\text{tg}\,71^\circ47'=3{,}0457574+\bar{1}{,}9670034+0{,}1206662=3{,}1334270$ *donde* $x=1359{,}64$.

918 — Defina simetria em relação a um eixo. Resolva o seguinte problema: dada, num plano, uma recta r) e dois pontos A e B, do mesmo lado dessa recta, determinar nela um ponto P tal que a soma $\overline{AP}+\overline{PB}$ seja mínima. R: *O ponto* P *é determinado pela intersecção da recta* r) *com a recta definida por um dos pontos dados e o simétrico do outro relativamente à recta dada.*

Razões: a menor distância entre B *e* A' *(simétrica de* A *em relação a* r) *é medida sôbre a recta* BA' *e* $\overline{A'P}=\overline{AP}$.

919 — Dum trapézio isósceles conhecem-se as duas bases e a altura; determinar os restantes lados e os ângulos internos do trapézio. Aplicação numérica: $b=7{,}2$ metros, $B=11{,}4$ metros, $h=5$ metros. R: *Seja* MNPQ *o trapézio,* $B=\overline{MN}$ *a base maior e* $b=\overline{QP}$ *a menor,* h *a altura e* R *a projecção de* Q *sôbre* MN. *Tem-se:* $\overline{MR}=\frac{1}{2}(B-b)$,

$$\text{tg}\,\widehat{M}=\frac{h}{\overline{MR}}=\frac{2h}{B-b},\quad \widehat{Q}=180^\circ-\widehat{M}\quad e\quad l=\overline{MQ}=\frac{\overline{QR}}{\text{sen}\,\widehat{M}}=\frac{h}{\text{sen}\,\widehat{M}}.$$

Aplicação: $\overline{MR}=2{,}1$ metros

$$\text{tg}\,\widehat{M}=\frac{10}{2{,}1}=4{,}791 \quad\rightarrow\quad \widehat{M}=77^\circ10'\quad \widehat{Q}=102^\circ50'$$

$$l=\overline{MQ}=\frac{5}{\text{sen}\,77^\circ10'}=5{,}128\ \text{metros}.$$

920 — Dada uma fracção a/b, forma-se uma nova fracção, multiplicando cada um dos termos desta pela potência de expoente n do outro têrmo. Exprimir a nova fracção em função da primeira e estudar a variação do valor duma com a outra.

R: $\frac{ab^n}{ba^n}=\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{1-n}$

valores de n inteiro	$\frac{a}{b}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{1-n}$
$n>1$	cresc. decresc.	decresc. cresc.
$n=1$	cresc. decresc.	const. $=1$
$n\leq0$	cresc. decresc.	cresc. decresc.

Soluções dos n.^{os} 915 a 920 de A. Sá da Costa.

Instituto Superior Técnico

921 — Um veleiro faz uma viagem de um porto a outro e volta. Na ida, com vento favorável, a viagem demora menos vinte horas do que no regresso em virtude de o barco percorrer em cada hora mais cinco quilómetros. Calcular o tempo

600 = vt

600 = (v+5)(t-20)

t =

gasto na viagem sabendo que a distância entre os dois portos é de 600 quilómetros e que o barco se demorou trinta e seis horas no porto do destino. R: *Se forem* v *e* t *a velocidade, em* km/h, *e o tempo, em horas, gasto na ida, serão* $600=vt$ *e* $600=(v-5)(t+20)$ *as equações que resolvem o problema. Eliminando* v *entre as duas equações obtêm-se a equação* $t^2+20t-2400=0$ *que admite a solução positiva* $t=40$. *O tempo gasto foi então* $40+60+36=136$ horas.

922 — A função de x definida pela equação $ab(x+2y)-20=2(a+b)xy$, a e b são constantes, toma os valores $5/3$ e -1 para $x=0$ e $x=2$, respectivamente. Calcular o valor da função para $x=3$. R: *Substituindo os valores de* y, *e os correspondente de* x, *na equação dada, obtêm-se o sistema* $ab=6$, $a+b=5$ *que admite a solução* $a=3$ *e* $b=2$, *donde* $y=(20-6x):(12-10x)$ *ou* $y=(10-3x):(6-5x)$ *e para* $x=3$ *vem* $y=-1/9$.

923 — Determinar os ângulos B e C de um triângulo rectângulo, sabendo que é $\sqrt{3}(\operatorname{tg}B-1)=1-\operatorname{tg}C$. R: *Se* B *e* C *forem os ângulos agudos de um triângulo rectângulo será* $B=90-C$ *e então é* $\sqrt{3}(\operatorname{cotg}C-1)=1-\operatorname{tg}C$ *ou* $\operatorname{tg}^2C-(1+\sqrt{3})\operatorname{tg}C+\sqrt{3}=0$, *equação cujas soluções são dadas por* $\operatorname{tg}C=1$ *ou* $\operatorname{tg}C=\sqrt{3}$; *a primeira dá para* C *o valor utilizável* $C=\frac{\pi}{4}$ *e a segunda* $C=\frac{\pi}{3}$.

924 — Dado um triângulo rectângulo de lados a, b e c, tirar, pelo vértice do ângulo recto, uma recta que divida o triângulo dado em dois triângulos cujas áreas estejam na razão m/n. R: *A recta tirada pelo vértice do ângulo recto dividirá a hipotenusa* a *em dois segmentos* x *e* $a-x$, *bases dos dois triângulos pedidos de altura comum* h *igual à altura, relativa à hipotenusa, do triângulo dado; e então será pelo enunciado* $xh:(a-x)h=m:n$ *ou* $nx=(a-x)m$ *e* $x=ma:(m+n)$.

925 — Numa pirâmide hexagonal regular, as faces laterais têm um ângulo igual a 77° e o lado oposto igual a 20 centímetros. Calcular o volume da pirâmide. R: *Se o ângulo dado fôr o ângulo da base do triângulo isósceles, que é cada uma das faces, a aresta lateral da pirâmide mede* 20 cm.; *então o lado da base, raio do circulo circunscrito ao exágono da base, medirá* $20.\cos 77^\circ=20.\operatorname{sen}13^\circ=20\times0{,}225=4{,}50$ cm., *e a altura da pirâmide terá por medida* $\sqrt{20^2-20^2.\operatorname{sen}^2 13^\circ}=20.\cos 13^\circ=20\times0{,}974=19{,}48$ cm. *O volume da pirâmide é, neste caso,* $V=\frac{1}{3}\times3\times4{,}5\times3{,}82\times19{,}48=338{,}11\text{ cm}^3$, *por o apótema da base medir* $4{,}5.\sqrt{3}/2=3{,}82$ cm. *É claro que podíamos considerar o ângulo dado como oposto à base do triângulo isósceles o que nos conduzia a outra solução.*

926 — Num losango, uma diagonal mede 6 centímetros e a outra é igual ao lado. Calcular o volume do sólido gerado pela rotação do losango em tôrno da paralela à diagonal menor tirada por um dos vértices opostos. R: *O lado* l *do losango satisfaz à equação* $l^2=3^2+l^2/4$, *donde* $l=2\sqrt{3}$ cm. *O sólido gerado tem por volume o dôbro do volume do cone circular recto, de raio igual a* 6 cm. *(diagonal maior do losango) e altura* 1, *menos quatro vezes o volume do cone cujo raio e altura são metade dos do cone anterior, ou seja:* $V=2.\pi.6^2.1/3-4.\pi.3^2.1/6=2\pi.1/3.(6^2-3^2)=36\pi\sqrt{3}\text{ cm}^3$.

Soluções dos n.os 921 a 926 de J. da Silva Paulo.

Contém pontos da prova de matemática dos *exames de aptidão* de anos lectivos anteriores todos os números da «*Gazeta de Matemática*».

Curso dos Liceus — 7.º Ano

Ponto n.º 2

927 — Determine os valores de x que tornam própria a fracção $\frac{2x^2+2x-18}{x^2+5x-14}$. R: *Quem fêz o ponto deve ter querido enunciar o seguinte problema «resolver a desigualdade* $\frac{2x^2+2x-18}{x^2+5x-14}<1$», *mas esqueceu-se que para os valores de* x *que tornam o primeiro membro daquela expressão um número irracional menor que* 1 *não existe fracção e por isso não há fracção própria, mas simplesmente um número irracional. Resolvendo então a desigualdade, como ela é equivalente à seguinte* $\frac{x^2-3x-4}{x^2+5x-14}<0$ *e esta é verificada para os valores de* x *que tornam de sinais contrários o numerador e o denominador da fracção, tem-se que, os valores que satisfazem à desigualdade são* $-7<x<-1$ *e* $2<x<4$.

928 — Calcule m de modo que seja negativa a raiz da equação $(m^2+1)x-2m+5=0$. R: $x=(2m-5):(m^2+1)$, *e como* m^2+1 *é um número positivo, terá que ser* $2m-5<0$ *ou* $m<5/2$.

929 — Calcule k de modo que a equação $(k^2-k-6)x=k-3$ seja impossível. R: *Como* $x=(k-3):(k^2-k-6)$ *terá que ser* $k-3\neq0$ *e* $k^2-k-6=0$; *como as raizes da 2.ª equação são* $k_1=-2$ *e* $k_2=3$, *o valor pedido é* $k=-2$.

930 — Determine a equação de Diofanto cujas raízes são da forma $x=1-2n$ e $y=-1-3n$. R: *Como se sabe a equação terá a forma* $ax+by=c$; *os coeficientes* a *e* b *são respectivamente* 3 *e* -2, *como se conclue da forma das raízes, logo a equação será* $3x-2y=c$ *e como a equação admite as raízes* $x=1$, $y=-1$ *será* $c=5$, *donde a equação pedida* $3x-2y=5$.

931 — Quantos sistemas de valores inteiros e positivos verificam a equação $5x-7y=27$? R: *A equação admite soluções inteiras porque os coeficientes das incógnitas são primos entre si. Por outro lado admite uma infinidade de soluções inteiras e positivas porque os coeficientes das incógnitas são de sinais contrários.*

932 — Calcule m e n na equação $x^2+mx-n=0$ de modo que as raízes sejam -2 e -1. R: *A soma das raízes* $-m$ *é igual a* -1, *donde* $m=1$; *o produto* $-n$ *é igual a* -2 *donde* $n=2$.

933 — Dada a equação $ax^2+bx+c=0$, forme outro cujas raízes obedeçam às relações $y'=2x'-x''$, $y''=2x''-x'$. R: $y'+y''=2x'+2x''-x'-x''=x'+x''=-b/a$, $y'y''=(2x'-x'')(2x''-x')=5x'x''-2(x'^2+x''^2)=5c:a-2(b^2-2ac):a^2=(9ac-2b^2):a^2$ *donde a equação* $a^2y^2+aby+9ac-2b^2=0$.

934 — Forme a equação biquadrada que admite a raiz $x'=1+2i$. R: *Se uma raiz é* $1+2i$ *uma outra é* $1-2i$; *por outro lado a equação biquadrada admitirá também as raízes* $-1-2i$ *e* $-1+2i$; *por isso a equação é* $x^4+6x^2+25=0$.

935 — Calcule n de modo que seja $(n+2)!=72.n!$ R: *Será* $(n+2)(n+1)n!=72.n!$ *ou* $(n+2)(n+1)-72=0$ *equação que admite as raízes* $n_1=7$ *e* $n_2=-10$ *das quais só a primeira serve ao problema.*

936 — Calcule m de modo que seja $({}^mC_4-{}^mC_3):({}^mC_4-{}^mC)=3/4$. R: *O problema é impossível.*

937 — Determine o expoente da expressão $(x+1)^n$ sabendo que a soma dos coeficientes do seu desenvolvimento é 1024. R: *Como a soma dos coeficientes do desenvolvimento do binómio é* 2^n, *é* $n=10$.

938 — Calcule o 5.º têrmo do desenvolvimento de $(x/2-3/x^2)^{11}$. R: *O 5.º têrmo é dado por* ${}^{11}C_4(-1)^4.(3/x^2)^4.(x/2)^7=18365/64x$.

939 — Calcule dois números sabendo que a sua soma, está para o seu produto como 2 está para 45, e que o seu menor múltiplo comum é igual a 15 vezes o seu máximo divisor comum. R: *Sejam* a *e* b *os números,* D *e* M *o seu m. d. c. e o seu m. m. c. Então é* $a=D.p$, $b=D.q$, $M=ab:D=pqD$ *onde* p *e* q *são inteiros primos entre si. Daqui se conclue que* $15D=pqD$ *ou* $pq=15$; *e os únicos valores possíveis de* p *e* q *são* $p=1$ *ou* $p=3$ *e* $q=15$ *ou* $q=5$. *Resulta então que* $D(p+q):D^2pq=2/45$ *ou* $(p+q):Dpq=2/45$. *No primeiro caso será* $16:D.15=2:45$ *o que dá o valor* $D=24$ *e por isso* $a=24.1$ *e* $b=24.15=360$; *no segundo caso* $(3+5):D.15=2:45$ *e então* $D=12$, *donde* $a=3.12=36$ *e* $b=5.12=60$.

940 — Justifique os passos da demonstração do seguinte teorema: «O resto da divisão de um número escrito no sistema de numeração decimal por 6 pode obter-se dividindo por 6 a soma do valor do algarismo das unidades com o quadruplo da soma dos valores de todos os outros». *Passos:* 1) $N=mcdu$; 2) $N=m10^3+c10^2+d.10+u$; 3) $10^n=\dot{6}+4$; 4) $N=m(\dot{6}+4)+c(\dot{6}+4)+d(\dot{6}+4)+u$; 5) $N=\dot{6}+[u+4(d+c+m)]$; 6) $R[N:6]=R\{[u+4(d+c+m)]:6\}$. R: *Justificação:* 1) *Por hipótese;* 2) *Porque no sistema decimal o número* N *se pode escrever sob esta forma;* 3) *A justificação dêste passo requeria a demonstração de que qualquer potência de* 10 *é um multiplo de* 6 *aumentado de* 4; 4) *Por substituição de* 3) *em* 2) *quando se particularisa o valor de* n; 5) *Efectuando as operações do segundo membro de* 4); 6) *Porque se uma de duas parcelas de uma soma é divisível por um número, a soma e a outra parcela dão restos iguais quando divididas por êsse número.*

941 — Qual é a base do sistema de numeração em que 243 é o quadrado de 16? R: *O número não está escrito no sistema da base* 10 *pois que neste é* $16^2=256$, *e da comparação dos dois números se conclue que a base é maior que* 10. *Ora sendo a diferença entre os dois números* 13 *a diferença entre as bases é pequena. Suponhamos que a base é* 11 *então o número* 16 *no sistema da base* 10 *é* 17 *cujo quadrado é* 289, *número que escrito na base* 11 *é* 243.

942 — Decomponha o número 735 na soma de três múltiplos consecutivos de 7. R: $735=7[n+n+1+n-1]=7.3.n$ *ou seja* $n=35$ *e os números são* 238, 245 *e* 252.

943 — A que condição hão-de obedecer os números a e b para que se não altere o produto ab quando se juntam 2 unidades a a e se tiram 3 unidades a b. R: $ab=(a+2)(b-3)$ *ou* $ab=ab+2b-3a-6$ *ou* $2b-3a=6$.

944 — Que valores podem ter os algarismos a e b para que seja nulo o resto da divisão do número $8b5a$ (base 10) por 11. R: *Terá que ser* $b+a-13=\dot{11}$ *ou* $b+a=13$ *e* $b+a+11-13=\dot{11}$ *ou* $b+a=13$, *pois* a *e* b *são no máximo iguais a* 9. *Trata-se de determinar as soluções inteiras e posi-*

tivas ou nulas menores que 10 *daquelas equações, o que dá os pares de números*

$$\begin{cases} a=4,5,6,7,8,9 \\ b=9,8,7,6,5,4 \end{cases} \ e \ \begin{cases} a=1,2,0 \\ b=1,0,2. \end{cases}$$

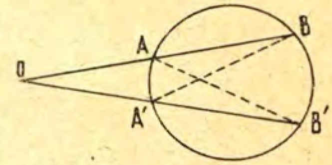
945 — Substitua a fracção 12/21 por outra equivalente sendo 24 a diferença entre os seus termos. R: $12/21=4/7=4n/7n$ *e como tem que ser* $7n-4n=24$ *é* $n=8$ *e a fracção pedida* $32/56$.

946 — Calcule o número da forma $N=4^n\times 15$ sabendo que tem 28 divisores. R: *Como* $N=2^{2n}.3.5$ *o número de divisores de* N *é* $(2n+1).2.2=28$ *ou* $2n+1=7$, $n=3$ *e* $N=960$.

947 — Pretende demonstrar-se o seguinte teorema: «Para as secantes a uma circunferência saídas do mesmo ponto, é constante o produto de cada uma delas pela sua parte externa».

Dão-se os seguintes elementos para fazer a demonstração: *a)* a figura junta; *b)* os ângulos inscritos no mesmo arco são iguais; *c)* dois triângulos que têm ângulos iguais cada um a cada um são semelhantes; *d)* em triângulos semelhantes os lados opostos a ângulos iguais são directamente proporcionais; *e)* em qualquer proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

Faça a demonstração do teorema enunciado pelo método sintético e dê as justificações dos respectivos passos.



Demonstração:

Hipótese: OB e OB' são duas secantes à mesma circunferência, concorrentes em O.

Tese: $OB\times OA=OB'\times OA'$.

Passos: 1) âng.BAB'=âng.$B'A'B$; 2) âng.ABA'=âng.$AB'A$; 3) $\triangle[OA'B]\sim\triangle[OAB']$; 4) $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}=\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$; 5) $\overline{OB}\times\overline{OA'}\times\overline{OB'}$ c. q. d.

R: *Justificação:* 1) *por* b); 2) *por* b); 3) *por* c); 4) *por* d); 5) *por* e).

Soluções dos n.os 927 a 947 de J. S. Paulo.

MATEMÁTICAS GERAIS—ÁLGEBRA SUPERIOR—COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

F. C. L. — ÁLGEBRA SUPERIOR — **Alguns pontos do 2.º exame de freqüência, Junho de 1941.**

948 — Discuta o sistema $2x+\lambda y+1=0$, $x+8y+\lambda=0$, $x+2y+2=0$ e interprete geomètricamente os resultados no plano e no espaço. R: *O sistema é sempre incompatível qualquer que seja* λ *real. O sistema formado pelas duas primeiras equações é compatível ou incompatível conforme fôr* $\lambda\neq 16$ *ou* $\lambda=16$. *O sistema formado pelas duas últimas equações é sempre compatível qualquer que seja* λ. *O sistema formado pelas 1.ª e 3.ª equações é compatível ou incompatível conforme fôr* $\lambda\neq 4$ *ou* $\lambda=4$. ***Interpretação geométrica no plano:** as equações do sistema são as de três rectas concorrentes duas a duas se* $\lambda\neq 4,16$, *a primeira e terceira são paralelas e a terceira é secante se* $\lambda=4$ *e a primeira e segunda são paralelas e a terceira é secante se* $\lambda=16$. ***Interpretação geométrica no espaço:** basta substituir no que atraz se disse recta ou rectas por plano ou planos paralelos ao eixo dos* zz.

949 — Calcule as coordenadas do traço da recta $r\equiv x=0$, $y=z-1$ no plano π que passa por $r_1\equiv 2x-y+2z+1=0$, $y=2z$, à distância 2 do centro da esfera $\Sigma\equiv x^2+y^2+z^2-2y+4z-1=0$.
R: *Do feixe de planos cujo eixo é a recta* r_1 *há dois planos que distam* 2 *do centro* $(0,1,-2)$ *da esfera* Σ: π_1) $2x+y-2z+1=0$ *e* π_2) $2x-3y+6z+1=0$. *Os traços da recta* r) *em cada um dêstes planos são respectivamente* $(0,-1,0)$ *e* $(0,7/3,-4/3)$.

950 — Uma recta r passa pelo ponto $(1,2)$. Determine a equação de r sabendo que, se nesta equação se trocarem entre si o coeficiente de y e o têrmo conhecido, a nova equação representa a recta r' simétrica de r em relação ao eixo dos YY. Calcule a área do triângulo definido por r, r' e o eixo dos XX. R: *Sabe-se que a equação da recta simétrica da recta* $ax+by+c=0$ *em relação ao eixo dos* yy *é* $ax-by-c=0$. *Então, a recta simétrica de* r) $mx-y+(2-m)=0$ *é* r') $mx+y+(m-2)=0$. *Por outro lado* r') $mx+(2-m)y-1=0$. *Portanto, deverá ser* $2-m=1$ *ou* $m=1$. *Logo* r) $x-y+1=0$ r') $x+y-1=0$. *Os vértices do triângulo são os pontos* $(-1,0)$ $(1,0)$ $(0,1)$. *A medida da área do triângulo é* S *tal que*

$$2S=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2, \text{ donde } S=1.$$

951 — Determine os valores de λ e μ para os quais o sistema $3x+2y+z=4$, $5x+\lambda y+5z=\mu$, $x-y+2z=2$; seja: *a)* determinado; *b)* indeterminado; *c)* incompatível. R: *A aplicação do teorema de Rouché conduz a: a) se* $\lambda\neq 0$ *e* μ *qualquer, b) se* $\lambda=0$ *e* $\mu=8$, *neste caso o sistema é simplesmente indeterminado, c) se* $\lambda=0$ *e* $\mu\neq 8$.

952 — Deduza a equação da perpendicular baixada do centro da circunferência $\Sigma\equiv 2(x^2+y^2)-3x-2y-3=0$ e calcule a área do triângulo definido pelos pontos de intersecção da recta r com