tivas ou nulas menores que 10 *daquelas equações, o que dá os pares de números*

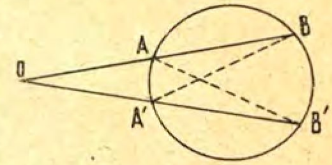
$$\begin{cases} a=4,5,6,7,8,9 \\ b=9,8,7,6,5,4 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} a=1,2,0 \\ b=1,0,2. \end{cases}$$

945 — Substitua a fracção 12/21 por outra equivalente sendo 24 a diferença entre os seus termos. R: $12/21=4/7=4n/7n$ *e como tem que ser* $7n-4n=24$ *é* $n=8$ *e a fracção pedida* $32/56$.

946 — Calcule o número da forma $N=4^n \times 15$ sabendo que tem 28 divisores. R: *Como* $N=2^{2n}.3.5$ *o número de divisores de* N *é* $(2n+1).2.2=28$ *ou* $2n+1=7$, $n=3$ *e* $N=960$.

947 — Pretende demonstrar-se o seguinte teorema: «Para as secantes a uma circunferência saídas do mesmo ponto, é constante o produto de cada uma delas pela sua parte externa».

Dão-se os seguintes elementos para fazer a demonstração: *a)* a figura junta; *b)* os ângulos inscritos no mesmo arco são iguais; *c)* dois triângulos que têm ângulos iguais cada um a cada um são semelhantes; *d)* em triângulos semelhantes os lados opostos a ângulos iguais são directamente proporcionais; *e)* em qualquer proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.



Faça a demonstração do teorema enunciado pelo método sintético e dê as justificações dos respectivos passos.

Demonstração:

Hipótese: OB e OB' são duas secantes à mesma circunferência, concorrentes em O.

Tese: $OB \times OA = OB' \times OA'$.

Passos: 1) âng.BAB' = âng.$B'A'B$; 2) âng.ABA' = âng.$AB'A$; 3) $\triangle[OA'B] \sim \triangle[OAB']$; 4) $\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$; 5) $\overline{OB} \times \overline{OA'} \times \overline{OB'}$ c. q. d.

R: *Justificação:* 1) *por* b); 2) *por* b); 3) *por* c); 4) *por* d); 5) *por* e).

Soluções dos n.os 927 a 947 de J. S. Paulo.

MATEMÁTICAS GERAIS—ÁLGEBRA SUPERIOR—COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

F. C. L. — ÁLGEBRA SUPERIOR — **Alguns pontos do 2.º exame de freqüência, Junho de 1941.**

948 — Discuta o sistema $2x+\lambda y+1=0$, $x+8y+\lambda=0$, $x+2y+2=0$ e interprete geomètricamente os resultados no plano e no espaço. R: *O sistema é sempre incompatível qualquer que seja* λ *real. O sistema formado pelas duas primeiras equações é compatível ou incompatível conforme fôr* $\lambda \neq 16$ *ou* $\lambda=16$. *O sistema formado pelas duas últimas equações é sempre compatível qualquer que seja* λ. *O sistema formado pelas 1.ª e 3.ª equações é compatível ou incompatível conforme fôr* $\lambda \neq 4$ *ou* $\lambda=4$. *Interpretação geométrica no plano: as equações do sistema são as de três rectas concorrentes duas a duas se* $\lambda \neq 4, 16$, *a primeira e terceira são paralelas e a terceira é secante se* $\lambda=4$ *e a primeira e segunda são paralelas e a terceira é secante se* $\lambda=16$. *Interpretação geométrica no espaço: basta substituir no que atraz se disse recta ou rectas por plano ou planos paralelos ao eixo dos* zz.

949 — Calcule as coordenadas do traço da recta $r \equiv x=0$, $y=z-1$ no plano π que passa por $r_1 \equiv 2x-y+2z+1=0$, $y=2z$, à distância 2 do centro da esfera $\Sigma \equiv x^2+y^2+z^2-2y+4z-1=0$.
R: *Do feixe de planos cujo eixo é a recta* r_1 *há dois planos que distam* 2 *do centro* $(0,1,-2)$ *da esfera* $\Sigma: \pi_1)$ $2x+y-2z+1=0$ *e* $\pi_2)$ $2x-3y+6z+1=0$. *Os traços da recta* r) *em cada um dêstes planos são respectivamente* $(0,-1,0)$ *e* $(0,7/3,-4/3)$.

950 — Uma recta r passa pelo ponto $(1,2)$. Determine a equação de r sabendo que, se nesta equação se trocarem entre si o coeficiente de y e o têrmo conhecido, a nova equação representa a recta r' simétrica de r em relação ao eixo dos YY. Calcule a área do triângulo definido por r, r' e o eixo dos XX. R: *Sabe-se que a equação da recta simétrica da recta* $ax+by+c=0$ *em relação ao eixo dos* yy *é* $ax-by-c=0$. *Então, a recta simétrica de* r) $mx-y+(2-m)=0$ *é* r') $mx+y+(m-2)=0$. *Por outro lado* r') $mx+(2-m)y-1=0$. *Portanto, deverá ser* $2-m=1$ *ou* $m=1$. *Logo* r) $x-y+1=0$ r') $x+y-1=0$. *Os vértices do triângulo são os pontos* $(-1,0)$ $(1,0)$ $(0,1)$. *A medida da área do triângulo é* S *tal que*

$$2S=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2, \text{ donde } S=1.$$

951 — Determine os valores de λ e μ para os quais o sistema $3x+2y+z=4$, $5x+\lambda y+5z=\mu$, $x-y+2z=2$; seja: *a)* determinado; *b)* indeterminado; *c)* incompatível. R: *A aplicação do teorema de Rouché conduz a: a) se* $\lambda \neq 0$ *e* μ *qualquer, b) se* $\lambda=0$ *e* $\mu=8$, *neste caso o sistema é simplesmente indeterminado, c) se* $\lambda=0$ *e* $\mu \neq 8$.

952 — Deduza a equação da perpendicular baixada do centro da circunferência $\Sigma \equiv 2(x^2+y^2)-3x-2y-3=0$ e calcule a área do triângulo definido pelos pontos de intersecção da recta r com a circunferência e pelo centro desta. R: *Coordenadas do centro da circunferência* $(3/4, 1/2)$. *Equação da recta que passa pelo centro e é perpendicular à recta dada* $4x-2y-2=0$. *Pontos de intersecção da recta* r *com a circunferência* Σ, *soluções do sistema formado pelas duas equações,* $(1\pm2\sqrt{10}/5)$, $(1\mp\sqrt{10}/5)$. *A área do triângulo é dada por*

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3/4 & 1/2 & 1 \\ 1+2\sqrt{10}/5 & 1-\sqrt{10}/5 & 1 \\ 1-2\sqrt{10}/5 & 1+\sqrt{10}/5 & 1 \end{vmatrix}=\sqrt{10}/4 .$$

953 — É dado o triângulo de vértices $A(0,0)$, $B(8,4)$, $C(2,14)$ e o ponto D, meio de $\overline{AC}$. Tire-se por D uma paralela a AB e seja E o ponto onde ela encontra o lado $\overline{BC}$.

Verifique que o eixo radical das duas circunferências que têm por diâmetro respectivamente os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{AE}$, coïncide com a perpendicular a AB, passando por C. R: *Coordenadas dos pontos* D *e* E, $(1,7)$ $(5,9)$. *Coordenadas dos centros das circunferências de diâmetros* BD *e* AE, $(9/2, 11/2)$ $(5/2, 9/2)$. *Raios das circunferências* $\sqrt{58}/2$, $\sqrt{106}/2$. *Equações das circunferências* $x^2+y^2-9x-11y+36=0$, $x^2+y^2-5x-9y=0$. *Equação do eixo radical* $2x+y-18=0$. *Esta é satisfeita pelas coordenadas de* $C(2,14)$ *e é perpendicular à recta* AB *cuja equação é* $x-2y=0$.

954 — Forme o descriminante da equação $x^3-3x+\lambda-1=0$ e aproveite o resultado para determinar λ de modo que a equação tenha uma raiz múltipla. R: *O descriminante é* $\Delta=3\lambda^2-4\lambda-9$. *A equação terá uma raiz múltipla se* $3\lambda^2-4\lambda-9=0$ *isto é para* $\lambda=1/3\,(2\pm\sqrt{31})$.

955 — Dada a recta $y=1+x$ e a circunferência $x^2+y^2+x+y-2=0$ determine um ponto da circunferência que forme um triângulo rectângulo com os pontos de intersecção da recta com a circunferência. R: *As coordenadas dos pontos de intersecção da circunferência* Σ *com a recta* r *são fornecidas pela resolução do sistema formado pelas duas equações,* $(0,1)$ *e* $(-2,-1)$. *Visto que a recta* r *não passa pelo centro de* Σ, *o terceiro vértice do triângulo rectângulo é a intersecção de* Σ *com a recta que passa por* $(0,1)$ *ou por* $(-2,-1)$ *e pelo centro de* $\Sigma\,(-1/2,-1/2)$. *O problema admite duas soluções: as intersecções das rectas* $y=3x+1$ *e* $x=3y+1$ *com* Σ, *ou* $(-1,-2)$ *e* $(1,0)$.

956 — Dada a esfera $\Sigma\equiv x^2+y^2+z^2-2x+4z-2=0$ e a recta $r\equiv x=2y-1$, $y=z$ deduza as equações das esferas Σ_1 e Σ_2 passando respectivamente pelos pontos $P_1(0,0,0)$, $P_2(0,-1,0)$ e $P_3(-1,1,2)$, $P_4(1,1,0)$ e que com a esfera dada formem um sistema de eixo radical r. R: *A equação geral das esferas que passam por* P_1 *e* P_2 *é* $x^2+y^2+z^2+ax+y+cz=0$ *e a das esferas que passam por* P_3 *e* P_4 *é* $x^2+y^2+z_2+(\gamma-\delta-4)\,x+(2-\gamma)\,y+\gamma z+\delta=0$. *Para que o sistema* $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2$ *admita* r *como eixo radical é necessário e suficiente que* r *coïncida com a recta*

$$\begin{cases} ax+y+cz=-2x+4z-2 \\ (\gamma-\delta-4)\,x+(2-\gamma)\,y+\gamma z+\delta=-2x+4z-2 \end{cases}$$

donde $a=-4$, $c=15/2$, $\gamma=0$ *e* $\delta=1/2$. *Então será*

$$\Sigma_1)\ 2(x^2+y^2+z^2)-8x+2y+15z=0$$
$$\Sigma_2)\ 2(x^2+y^2+z^2)-9x+4y+1=0.$$

I. S. C. E. F. — 2.º exame de freqüência, 19-6-1941

957 — Fazer o estudo e o traçado da curva de equação $y=1+1/x+1/x^2$. R: *A equação pode escrever-se* $y=(x^2+x+1)/x^2$. *A função racional definida dêste modo é contínua nos intervalos abertos* $(-\infty,0)$ *e* $(0,+\infty)$. *A origem é um ponto de descontinuïdade infinita de 1.ª espécie porque* $\lim\limits_{x\to-0} y=+\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to+0} y=+\infty$. *Admite como assíntotas as rectas* $x=0$, *em virtude do resultado anterior, e* $y=1$ *porque* $\lim\limits_{x\to-\infty} y=1-0$ *e* $\lim\limits_{x\to+\infty} y=1+0$. *Tem-se sempre, para* x *real qualquer,* $y>0$. *O ponto* $(-2, 3/4)$ *é de mínimo e a função é crescente no intervalo aberto* $(-2,0)$ *e decrescente nos intervalos abertos* $(-\infty,-2)$ *e* $(0,+\infty)$, *por ser* $y'=-(x+2)/x^3$ *e* $y''=(2x+6)/x^4$. *O ponto* $(-3, 7/9)$ *é de inflexão e a concavidade está voltada no sentido dos* yy *positivos nos intervalos abertos* $(-3,0)$ *e* $(0,+\infty)$ *e no sentido dos* yy *negativos no intervalo aberto* $(-\infty,-3)$, *por ser* $y''=(2x+6)/x^4$ *e* $y'''=-6(x+4)/x^5$.

958 — Calcular três têrmos do desenvolvimento em série de potências da função $y=P(x)\,.\sec x$, onde $P(x)$ é um polinómio do 4.º grau que satisfaz à igualdade $P(x)+xP'(x)+x^2P''(x)+x^3P'''(x)+x^4P^{IV}(x)=65x^4+5x^2$. R: *Determinação de* $P(x)$. *Seja* $P(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$ *será* $65a_0x^4+16a_1x^3+5a_2x^2+2a_3x+a_4=65x^4+5x^2$, *donde* $a_0=a_2=1$ *e* $a_1=a_3=a_4=0$. *Logo* $P(x)=x^4+x^2$. *A função dada* $y=(x^4+x^2)\,.\sec x$ *é par, o seu desenvolvimento em série de potências será, portanto, da forma* $y=a_0+a_2x^2+a_4x^4+\cdots+a_{2n}x^{2n}+\cdots$. *Tem-se imediatamente* $x^4+x^2=y\,.\cos x$ *e, substituindo* y *e* $\cos x$ *pelos seus desenvolvimentos em série de potências,* $x^4+x^2=$

$$=(a_0+a_2x^2+a_4x^4+\cdots)\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)=a_0+$$
$$+(a_2-a_0/2!)\,x^2+(a_0/4!-a_2/2!+a_4)\,x^4+(-a_0/6!+$$

$+a_2/4!-a_4/2!+a_6)x^6+\cdots$ *e identificando vem* $a_0=0$, $a_2=1$, $a_4=3/2$, $a_6=3/8,\cdots$. *Finalmente será* $y=x^2+x^4\,3/2+x^6\,3/8+\cdots$.

959 — Determine as raízes racionais da equação $3x^3+11x^2+17x+24=0$. R: *As raízes da equação proposta são* $-8/3$ *e* $-1/2+i\sqrt{11}/2$, *das quais só a primeira é racional.*

I. S. C. E. F. — 2.º exame de freqüência, 26-6-1941

960 — Estudar e representar geomètricamente a função $y=e^{1-1/x}$. As ordenadas dos pontos notáveis (máximos e mínimos ou pontos de inflexão, se houver) serão calculados com um êrro inferior a 10^{-3}, utilisando o desenvolvimento em série de e^x. R: *A função é sempre positiva, definida e contínua nos intervalos* $(-\infty,0)$ *e* $(0,+\infty)$ *abertos. A origem é um ponto de descontinuïdade infinita de 1.ª espécie porque* $\lim_{x\to+0} y=\left[e^{\lim_{x\to 0}(1-x)/x}\right]^{-1}=0$ *e* $\lim_{x\to 10} y=\infty$. *Além do eixo das ordenadas, a curva representativa da função admite como assíntota a recta* $x=e$, *porque* $\lim_{x\to+\infty} y=e-0$ *e* $\lim_{x\to-\infty} y=e+0$. *A função não admite máximos nem mínimos porque a 1.ª derivada* $y'=e^{1-1/x}/x^2$ *não se anula para os valores finitos de* x *e é definida para todos os valores de* x *pertencentes ao domínio da função. Note-se que* $y'(-0)=\infty$ *e* $y'(+0)=0$. *A função é monotónica crescente em todo o domínio de definição porque* y' *é sempre positiva. O ponto* $(1/2, y(1/2)=e^{-1})$ *é de inflexão porque* $y''=e^{1-1/x}(1-2x)/x^4$ *e* $y'''=e^{1-1/x}(1-6x+6x^2)/x^6$. *A concavidade está voltada no sentido dos yy positivos nos intervalos* $(-\infty,0)$ *e* $(0,1/2)$ *e no sentido dos yy negativos no intervalo* $(1/2,+\infty)$. *Cálculo de* $y(1/2)=1/e$, *ordenada do ponto de inflexão: Tem-se* $e^{-1}=1/2!-1/3!+\cdots+(-1)^n 1/n!+\cdots$. *Se considerarmos um, dois, três, quatro ou cinco têrmos, o êrro sistemático é inferior a* $1/3!$, $1/4!$, $1/5!$, $1/6!$ *ou* $1/7!$ *respectivamente. Então, basta tomar cinco têrmos para que o êrro sistemático seja inferior a* $1/7!=1/5.040<5/10.000$. *Portanto* $y(1/2)=e^{-1}\simeq 1/2-1/6+1/24-1/120+1/720=0,5-$ $-95/720\simeq 0,5-0,1319\simeq 0,368$.

961 — Determinar com um êrro inferior a 10^{-1} todos os valores reais de λ para os quais o sistema $\begin{cases} x+(\lambda-1)y=0 \\ x+\lambda z=0 \\ \lambda^2 y+z=0 \end{cases}$ tem soluções não nulas. R: *É condição necessária e suficiente para que o sistema proposto de equações lineares e homogéneas, admita soluções não nulas, que a característica da matriz dos coeficientes do sistema seja inferior a* 3. *Esta característica não pode ser inferior a* 2 *porque na matriz pode formar-se o determinante* $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$. *Então, o sistema será simplesmente indeterminado se atribuirmos a* λ *os valores que satisfazem a*

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{vmatrix}=\lambda^3+\lambda-1=0.$$

A aplicação do teorema de Descartes a esta equação e à sua transformada em $-\lambda$, *permite afirmar que ela admite apenas uma raiz irracional positiva e duas raízes complexas conjugadas. Como imediatamente se reconhece, a raiz real pertence ao intervalo aberto* $(0,1)$. *Para a sua determinação aproximada utilizemos o método de Rufini-Horner. A transformada da equação em* $\mu=10\lambda$ *é* $Q(\mu)=$ $=\mu^3+10\mu-100=0$ *cuja raiz irracional está compreendida entre* 0 *e* 10. *Notemos que* $Q(0)$, $Q(1)$, $Q(2)$ *e* $Q(3)$ *são números negativos e* $Q(4)$ *é positivo. Então, a raiz real de* $Q(\mu)=0$ *está compreendida entre* 3 *e* 4 *e a raiz da equação em* λ *está compreendida entre* $0,3$ *e* $0,4$. *Êstes dois números são valores aproximados a menos de* 10^{-1}, *o primeiro por defeito e o segundo por excesso, da raiz em causa.*

I. S. T. — Alguns pontos do 2.º exame de freqüência de 1940-41.

962 — Verificar a identidade $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{2n-1}-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{2n+1}=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{2n^2}$ e, utilizando-a, provar que a série de têrmo geral $u_n=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{2n^2}$ é convergente. R: *Tomando tangentes dos dois membros da identidade vem*

$$\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right]\Big/\left[1+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]=\frac{1}{2n^2}$$

e, efectuando as operações indicadas no 1.º membro, obtém-se uma identidade evidente. O têrmo geral da série dada pode decompor-se do modo indicado no enunciado e a soma dos n *primeiros termos da série é* $S_n=\operatorname{arc\,tg}1-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{2n+1}$. *Portanto, tem-se* $S=\lim_{n\to\infty}S_n=\operatorname{arc\,tg}1=\pi/4$, *resultado que prova a convergência da série.*

Pode provar-se a convergência da série sem recorrer à identidade. Com efeito, consideremos a série, manifestamente convergente, de têrmo geral $v_n=\operatorname{tg}u_n=\dfrac{1}{2n^2}$ *e determinemos* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{u^n}{v^n}=1$. *As duas séries têm o mesmo caracter e a série de têrmo geral* u_n *é convergente.*

963 — Provar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_2 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix} = x_1 x_2 \cdots x_n .$$

R: *Substituindo tôdas as colunas do determinante, excepto a 1.ª pela sua soma com esta multiplicada por* -1, *obtem-se fàcilmente o resultado pedido.*

964 — Achar o ponto da recta $\begin{cases} x=3 \\ y=z+5 \end{cases}$ que é eqüidistante de $A(1,2,3)$ $B(-4,0,6)$.

R: *O ponto cuja determinação se pede é a intersecção da recta dada com o lugar geométrico dos pontos do espaço eqüidistantes de* A *e* B. *Êste lugar é o plano perpendicular a* AB *e que passa pelo ponto médio do segmento* $\overline{AB}$. *A sua equação é* $5(x+3/3)+2(y-1)-3(z-9/2)=0$. *A resolução do sistema formado por esta equação e pelas equações da recta dada conduz ao ponto* $(3,22,17)$.

965 — Sendo $\begin{cases} x+ay+1=0 \\ z+1=0 \end{cases}$ as equações duma recta r determinar a de modo que, por r, passe um plano perpendicular a $\begin{cases} y=2x \\ 3y=2z. \end{cases}$ Determinar êsse plano. R: *A equação geral dos planos que passam pela recta* r *é* $x+ay+\lambda z+1+\lambda=0$. *As equações normais da segunda recta são* $x=y/2=z/3$. *A família de planos* $x+ay+\lambda z+1+\lambda=0$ *conterá um plano perpendicular à segunda recta se* $1=\frac{a}{2}=\frac{\lambda}{3}$ *ou* $a=2, \lambda=3$ *e a equação dêsse plano é* $x+2y+3z+4=0$.

966 — Achar os focos da curva $xy=4$. R: *A curva dada é uma hipérbole equilátera cujas assíntotas são os eixos coordenados. A sua equação referida aos eixos de simetria é* $Ax^2+Cy^2+G=0$ *com* $A+C=0$, $AC=-1/4$ *e* $ACG=4$ *donde* $A=-C=1/2$, $G=-16$, *isto é* $x^2-y^2=32$. *Os focos são os pontos* $(\pm 8,0)$ *relativamente ao segundo sistema de referência e os pontos* $(\pm 4\sqrt{2}, \pm 4\sqrt{2})$ *relativamente ao primeiro referencial.*

967 — Determinar a parábola que encontra o eixo Oy nos pontos de ordenadas -1 e $1/4$ e tem a recta $2x+4y+1=0$ como diâmetro conjugado com Ox. R: *Seja* $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+G=0$ *a equação da parábola. A equação do diâmetro conjugado com* Ox $Ax+By+D=0$ *não deve ser distinta de* $2x+4y+1=0$, *logo, à parte um factor constante,* $A=2$, $B=4$, $D=1$. *Por se tratar duma parábola deverá ser* $B^2-AC=0$, *portanto* $16-2C=0$ *e* $C=8$. *Finalmente a equação deverá ser satisfeita pelas coordenadas dos pontos* $(0,1)$ *e* $(0,-1/4)$, *portanto, não serão distintas as equações* $8y^2+2Ey+G=0$, $8(y+1)(y-1/4)=0$ *donde* $E=3$ *e* $G=-2$. *Tem-se* $2x^2+8xy+8y^2+2x+6y-2=0$.

Soluções dos exercícios n.^{os} 948 a 967 de A. Sá da Costa.

Contém pontos de segundos exames de freqüência de *Algebra Superior* os seguintes números da «*Gazeta de Matemática*»: 2 e 6.

GEOMETRIA DESCRITIVA — GEOMETRIA PROJECTIVA

F. C. C. — 2.º exame de freqüência

Ponto I

968 — GEOMETRIA COTADA — Apoiar em duas rectas enviezadas a sua perpendicular comum. Uma das rectas é horizontal.

969 — PERSPECTIVA RIGOROSA — Determinar o ângulo de duas rectas enviezadas. Uma das rectas faz com o quadro um ângulo de 45°. R: *Rebata-se sôbre o quadro o plano que contém uma das rectas e é paralelo à outra.*

970 — POLIEDROS — Determinar a secção feita pelo 1.º plano bissector numa pirâmide pentagonal de base regular assente no plano horizontal de projecção. O vértice da pirâmide é um ponto de afastamento nulo e cota positiva. R: *O problema pode resolver-se:* a) *Mudando de plano vertical para qualquer plano de perfil, o que transforma o 1.º plano bissector num plano de tôpo;* b) *Determinando o traço de cada uma das arestas no 1.º plano bissector.*

Ponto II

971 — GEOMETRIA COTADA — Determinar os planos bissectores de dois planos de escalas de declive paralelas. R: *A introdução dum plano vertical de projecção de traço paralelo às escalas de declive, transforma os planos dados em planos de tôpo e permite resolver o problema fàcilmente.*

972 — PERSPECTIVA RIGOROSA — Determinar o ângulo duma recta projectante com o plano neutro. R: *O ângulo pedido é o da recta dada com o quadro.*

973 — TRIEDROS — É dada uma recta do plano horizontal de projecção que faz com a linha de terra um ângulo de 60^o. Conduzir por um ponto a recta que faz com a linha de terra e a recta dada ângulos de 30^o e 40^o, respectivamente. R: *Conduz-se pelo ponto a recta paralela à aresta oposta à base de* 60^o, *no triedro de que se conhecem as faces* (60^o, 40^o *e* 30^o). *Tem duas soluções.*

Soluções dos n.os 968 a 973 de L. G. M. de Albuquerque.

F. C. L. — Alguns pontos

974 — Duas rectas, não de perfil, têm projecções de nome contrário coïncidentes. Prove que são complanas e determine a intersecção da linha de terra com o seu plano. R: *Dadas* a *e* b *è, por hipótese,* $a' \equiv b''$ *e* $a'' \equiv b'$. *O ponto* P *tal que* $P' \equiv P'' \equiv a'a'' \equiv b'b''$ *é o traço comum de* a *e* b *em* β_{24}*: as rectas concorrem em* $P \in \beta_{24}$ *definindo o plano* $\pi \equiv a, b$.

Um plano, por exemplo $\rho : \notin P ; \perp \varphi_0$ *determina* $A \equiv a\rho$ *e* $B \equiv b\rho$ *e, seguidamente,* $r \equiv AB$. *Obtidos* $Q \equiv r\beta_{24}$ *e* $t \equiv PQ \equiv \pi\beta_{24}$ *é* $M \equiv t \,.\, LT$ *a intersecção pedida.*

975 — Num plano oblíquo, e por um ponto dêle, conduzir uma recta cujas projecções sejam ortogonais entre si. R: *São dados* π *oblíquo e* $P \in \pi$, *pertende-se traçar* $s : \in P ; \in \pi$ *tal que* $s' \perp s''$.

Com a ⊙ *de diâmetro* $\overline{P'P''}$ *coincidem as projecções duma elipse* $[e] \in \beta_{24}$. *Cada geratriz (exceptuadas a vertical e a de tôpo) da superfície cónica* $[\gamma]$ *de vértice* P *e directriz* $[e]$ *tem as suas projecções ortogonais entre si, visto que os ângulos inscritos numa semi-*⊙ *são rectos.*

As geratrizes de $[\gamma]$ *que passam pela intersecção de* $t \equiv \pi\beta_{24}$ *com* $[e]$ *são as rectas pedidas.*

O problema pode ter $2, 1, 0$ *soluções.*

I. S. T. — Aulas práticas

976 — Dada a hipotenusa $\overline{BC}$ de um triângulo rectângulo, e uma recta PQ que passa pelo vértice A dêsse triângulo, determinar êste vértice. $B(-45, 70, 60)$; $C(+45, 70, 60)$; $P(-95, 70, 60)$; $Q(26, 104, 110)$.

Nota: A primeira coordenada é a abscissa relativamente a um ponto arbitrário de LT, a segunda é a ordenada ou afastamento e a terceira é a cota.

R: *Nas condições do enunciado* BC *e* PQ *são complanas. Rebata-se* BCQ, *em tôrno de* BC, *sôbre um dos planos projectantes desta recta. No rebatimento, a* ⊙ *de diâmetro* $\overline{BC}$ *determina* A_r *em* PQ_r. *Inverta-se o rebatimento.*

O problema tem duas soluções.

Outra resolução: *A esfera* $[\varepsilon]$ *de diâmetro* $\overline{BC}$ *é o lugar dos pontos (exceptuados* B *e* C*) donde se vê aquêle segmento sob um ângulo recto. Os pontos de intersecção de* PQ *com* $[\varepsilon]$ *são os pontos pedidos.*

977 — Dados os pontos

$A(50, 25, 60)$; $B(12, 18, 40)$; $C(15, 43, 17)$

duma circunferência, determinar as projecções do polo da recta BC em relação à circunferência. R: *Rebata-se o plano* ABC *em tôrno duma das suas horizontais (ou rectas de frente) sôbre o plano de nível (ou de frente) correspondente. Obtidos* A_r, B_r *e* C_r *trace-se a* ⊙$[ABC]_r$ *e as tangentes a esta* b_r *em* B_r *e* c_r *em* C_r. *O ponto* $P_r \equiv b_r c_r$ *é o rebatimento do ponto pedido. Inverta-se o rebatimento.*

Soluções dos n.os 974 a 977 de Luiz Passos.

CÁLCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR

F. C. L. — 2.º exame de freqüência

Ponto n.º 1

978 — Calcule $\int x^5 l^2 x\, dx$ (l logarítmo neperiano). R: *Integrando por partes obtêm-se:*

$$\int x^5 l^2 x\, dx = \frac{x^6}{6}\left[l^2 x - \frac{1}{3} lx + \frac{1}{18}\right] + \text{const.}$$

979 — Estude a curva $x^3 - y(1+x)^2 = 0$ e faça a sua representação geométrica. R: *A curva tem existência real em todo o plano. Há duas assíntotas:* $x = -1$ *e* $y = x - 2$. *Passa na origem e não corta os eixos coordenados em qualquer outro ponto. Há um ponto de inflaxão na origem das coordenadas e um máximo em* $(-3, -27/4)$.

Ponto n.º 2

980 — Calcule $I = \int (x^2 - 1) \operatorname{arc\,sen} 2x\, dx$.

R: *Integrando por partes tem-se*

$$I = \frac{x^3 - 3x}{3} \operatorname{arc\,sen} 2x - \frac{2}{3} \int \frac{x^3 - 3x}{\sqrt{1 - 4x^2}}\, dx.$$ *Mas*

$$\int \frac{x^3 - 3x}{\sqrt{1 - 4x^2}}\, dx = \int \frac{x^3}{\sqrt{1 - 4x^2}}\, dx - 3 \int \frac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}}\, dx$$

e o primeiro dêstes integrais fàcilmente se calcula por partes e o segundo é imediato. Tem-se finalmente

$$I = \int (x^2 - 1) \operatorname{arc\,sen} 2x\, dx = \frac{x^3 - 3x}{3} \operatorname{arc\,sen} 2x - \frac{1}{36} \sqrt{1 - 4x^2}\,(17 - 2x^2) + C.$$

981 — Estude a curva $x^2y+y-x=0$ e faça a sua representação geométrica. R: *Como para* $x>0$ *é sempre* $y>0$ *e para* $x<0$ *é sempre* $y<0$, *os pontos da curva estão todos no 1.º e 3.º quadrantes. A curva passa na origem e não encontra os eixos coordenados em qualquer outro ponto. Há uma única assintota que é o eixo* OX. *Há um máximo em* $(1, 1/2)$ *e um máximo em* $(-1, -1/2)$. *Há três pontos de inflexão: na origem, em* $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/4)$ *e em* $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/4)$.

Soluções dos n.os 978 a 981 de J. Queiroz de Barros.

F. C. P. — 2.º exame de freqüência, Maio de 1941

Ponto n.º 1

982 — Integrar a equação $y'-\frac{2y}{x}=\frac{y^2}{x^2(x^2+4)}$. R: *É uma equação de Bernoulli. Temos* $y^{-2}y'-2\frac{y^{-1}}{x}=\frac{1}{x^2(x^2+4)}$. *Fazendo a mudança da variável dependente* $y^{-1}=z$, *vem a equação linear de 1.ª ordem:* $z'+2\frac{z}{x}=-\frac{1}{x^2(x^2+4)}$. *O integral geral da equação sem 2.º membro é:* $z=Cx^{-2}$. *Variando a constante temos:* $C=-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+k$. *Portanto* $z=kx^{-2}-\frac{x^{-2}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}$ e $y=\frac{2x^2}{2k-\operatorname{arc\,tg} x/2}$.

983 — Calcular $\iint_D \frac{y^2\,dx\,dy}{\sqrt{x}}$. O domínio D é limitado pelas linhas: $xy^2=4$; $y=2x$; $y=x/4$.

$$\text{R}: I=\int_0^1 y^2\,dy\int_{y/2}^{4y}\frac{dx}{\sqrt{x}}+\int_1^2 y^2\,dy\int_{y/2}^{4/y^2}\frac{dx}{\sqrt{x}}=$$

$$=\int_0^1 y^2\left[2\sqrt{x}\right]_{y/2}^{4y}dy+\int_1^2 y^2\left[2\sqrt{x}\right]_{y/2}^{4/y^2}dy=18/7.$$

984 — Determinar a curvatura da secção feita na superfície $z=(x-1)^{y-2}+(y+1)^{x-2}-2$, pelo plano $x-y-3z=0$ no ponto $(2,2,0)$. R: *Plano tangente à superfície no ponto* $(2,2,0): z=0$. *Tangente à secção plana no ponto* $(2,2,0): x-y=0$, $z=0$. *Curvatura da secção normal feita pelo plano normal que passa por* **t**. $C_n=\frac{r+2s+t}{2}$. *Pelo teorema de Meusnier temos:* $C=\frac{C_n}{\cos i}$ *sendo* $\cos i=\frac{1+1}{\sqrt{11}.\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{2}{11}}$. *Derivando* z *obtém-se* $p_1=0$, $q_1=0$ *e* $r_1=0$, $t_1=0$, $s_1=2$. *Portanto* $C_n=2$ *e* $C=2\sqrt{11/2}=\sqrt{22}$.

985 — Determinar a equação diferencial das linhas (L) tais que o quadrado da área do triângulo OM_1N_1, formado pela tangente em M e pelos eixos seja constante. Integrar a equação obtida e calcular a área limitada pela linha representada pela solução singular e pelas rectas $y=x$; $y=x/\sqrt{3}$ no 1.º quadrante. R: *Seja* $y=f(x)$ *a equação de linha. Equação da tangente em* $M: Y-y=y'(X-x)$. *Pontos de intersecção com os eixos coordenados:* $M_1(0, y-xy')$ *e* $N_1\left(x-\frac{y}{y'}, 0\right)$. *Temos a equação:* $\frac{1}{4}(y-xy')^2\left(x-\frac{y}{y'}\right)^2=k$ *ou* $(y-xy')^2=\pm 2y'\sqrt{k}$. *Temos portanto uma solução:* $y=xy'+\sqrt{2cy'}$. *Integrando vem:* $y=c_1x+\sqrt{2cc_1}$. *Solução singular:* $yx=\frac{3}{2}C$. *A área pedida é:*

$$A=\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/4}c^2d\theta=\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{3c}{\operatorname{sen}2\theta}d\theta=\frac{3c}{8}\log 3.$$

Soluções dos n.os 982 a 985 de Jaime Rios de Sousa.

Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras — 19-VI-1941.

986 — Integrar a equação $(1-x^2)\frac{dy}{dx}-xy(1+ay)=0$. R: *A equação proposta é de Bernoulli, como se reconhece imediatamente resolvendo-a em ordem a* $\frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{1-x^2}y-\frac{ax}{1-x^2}y^2$. *A substituição* $u=\frac{1}{y}$ *permite a sua redução à equação linear* $\frac{du}{dx}=\frac{x}{x^2-1}u-\frac{ax}{x^2-1}$ *cujo integral geral é* $u=e^{\int\frac{x\,dx}{x^2-1}}\left[a\int\frac{x}{1-x^2}\cdot e^{\int\frac{x\,dx}{1-x^2}}dx+C\right]$

$$u=\sqrt{x^2-1}\left[-2a(x^2-1)^{5/2}+C\right]$$

$$u=C\sqrt{x^2-1}-2a(x^2-1)^3.$$

O integral geral da equação proposta é pois $y=[C\sqrt{x^2-1}-2a(x^2-1)^3]^{-1}$.

987 — Transformar a equação $y'y'''-3y''^2=0$ tomando y para variável independente.

R: *Sabe-se que* $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$,

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2-\frac{d^3x}{dy^3}\cdot\frac{dx}{dy}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}$$ *e a equação transformada*

é $\frac{dx}{dy}\cdot\frac{d^3x}{dy^3}=0$ *que será satisfeita se e só se*

$$\frac{dx}{dy}=0 \rightarrow x=c \quad e \quad \frac{d^3x}{dy^3}=0 \rightarrow x=ay^2+by+c.$$

O integral geral da equação proposta é

$$(x-c)(x-ay^2+by+c)=0.$$

988 — Determinar o raio de curvatura e a evoluta da curva $(4-x)y^2=x^3$.

989 — Por uma rotação da mesma curva, em tôrno da sua assíntota, qual é o volume gerado pela área plana limitada pela curva e pela assíntota? R: *A curva* $(4-x)y^2=x^3$ *admite como assintota a recta* $x=4$. *Se efectuarmos a substituïção* $X=4-x$, $Y=y$, *esta correspondente à mudança de origem para o ponto de coordenadas* $(4,0)$, *de encontro da assíntota com o eixo dos* xx, *com conservação das direcções dos eixos, e a equação transformada escreve-se* $XY^2=(4-X)^3$. *A rotação da curva em tôrno da assintota que coïncide com o eixo dos* yy *dá origem a uma superfície que admite o plano* Oxz *como plano de simetria e cuja equação é* $Y^2\sqrt{X^2+Z^2}=(4-\sqrt{X^2+Z^2})^2$. *O volume do sólido limitado pela superfície considerada terá medida finita se, e só se, fôr convergente*

$$I=\iint_A\left(\frac{(4-\sqrt{X^2+Z^2})^3}{\sqrt{X^2+Z^2}}\right)^{1/2}dX\,dZ$$ *sendo* A *a área limitada pela circunferência de equação* $X^2+Z^2=16$. *Em coordenadbs polares, escreve-se*

$$I=\int_0^4 d\rho\int_0^{2\pi}\frac{(4-\rho)^{3/2}}{\rho}d\theta=2\pi\int_0^4\frac{(4-\rho)^{3/2}}{\rho}d\rho$$ *e o integral é, manifestamente, divergente.*

Soluções dos n.os 986 a 989 de A. Sá da Costa.

Inst. Sup. Técnico — 2.º ex. de freq., 1941

990 — Verificar que, sendo $y=f(x)$ uma solução da equação 1) $y''+\frac{a}{x}y'+by=0$ será $Y=\frac{1}{x}f'(x)$ uma solução da equação 2) $y''+\frac{a+2}{x}y'+by=0$. Portanto a equação 1) sabe integrar-se quando a fôr um inteiro par e positivo. R: *Como* $y=f(x)$ *é solução da equação* 1) *tem-se* α) $f''+\frac{a}{x}f'+bf=0$. *Por outro lado substituindo* $Y=\frac{1}{x}f'(x)$ *e as suas derivadas de* 1.ª *e* 2.ª *ordens no* 1.º *membro de* 2) *obtém-se* $\frac{1}{x}f'''+\frac{a}{x^2}f''-\frac{a}{x^3}f'+\frac{b}{x}f'$ *expressão que é o cociente por* x *de derivada de* α) *e portanto identicamente nula como queria provar-se.*

991 — Sendo P, Q e R funções homogéneas de x e y e P e R do mesmo grau de homogeneidade, integrar a equação $\frac{dy}{dx}=\frac{R+Qy}{P+Qx}$ fazendo a mudança de variável $y=zx$. R: *Fazendo* $y=zx$ *e designando por* n *o grau de homogeneidade de* P *e* Q *e por* m *o de* R, *isto é, supondo que* $P(x,y)=x^n p(z)$, $R(x,y)=x^n r(z)$ *e* $Q(x,y)=x^m q(z)$, *vem:*

$$\frac{dx}{du}+\frac{p(z)}{zp(z)-r(z)}x+\frac{q(z)}{zp(z)-x(z)}x^{m-n+2}$$

que é uma equação de Bernoulli e que portanto sabe integrar-se.

992 — Sendo $y=4x^2$, $z=f(x)$ as equações duma curva, determinar $f(x)$ de modo tal que as normais principais da curva sejam paralelas ao plano yz. R: *Como as equações do normal principal em* (x,y,z) *são* $\frac{X-x}{Bz'-Cy'}=\frac{Y-y}{Cx'-Az'}=\frac{Z-z}{Ay'-By'}$ *o paralelismo das normais principais ao plano* yz *exige ser* $Bz'-Cy'=0$. *Tem-se então:* $B=z'x''-z''x'=-z''$, $C=x'y''-x''y'=8$ *(atendendo a que* $x'=1, x''=0, y'=8x, y''-8$) *e* $Bz'-Cy'=-z'z''-64x$.

Há pois que integrar a equação diferencial ordinária de 2.ª ordem: $z'z''+64x=0$. *Tem-se.* $2z'z''=-128x$, $z'^2=-64x^2+c_1=-64x^2+64C_1$ *donde* $z'=\pm 8\sqrt{c_1-x^2}$ *e* $z=\pm 8\int\sqrt{c_1-x^2}\,dx=$

$$=\pm 8C_1\int\cos^2 t\,dt=8C_1\frac{t+\operatorname{sen}t\cos t}{2}+C_2=$$

$$=4C_1\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{C_1}}+\frac{x}{\sqrt{C_1}}\sqrt{1-\frac{x^2}{C_1}}\right)+C_2,$$

(fazendo $x=\sqrt{c_1}\operatorname{sen}t$). *E então*

$$z=f(x)=\pm\left(c_1\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{C_1}}+x\sqrt{C_1-x^2}\right)-C_2.$$

993 — Sendo $\alpha=(2x+3y)I+(3y+4z)J+(2-3y)K$ para que pontos do espaço se verifica o sistema $\begin{cases}\operatorname{div}.\alpha=\alpha\,|\,I\\ \operatorname{div}(x\alpha)=4?\end{cases}$. R: *Tem-se sucessivamente* $\operatorname{div}\alpha=7$, $\alpha|I=2x+3y$, $x\alpha=(2x^2+3xy)I+(3xy+4xz)J+(2xz-3xy)K$, $\operatorname{div}(x\alpha)=9x+3y$.

O sistema dado é pois $\begin{cases}2x+3y=7\\9x+3y=4\end{cases}$ *ou* $\begin{cases}x=-3/7\\y=55/21,\end{cases}$ *equações duma recta paralela ao eixo* OZ.

Soluções dos n.os 990 a 993 de Manuel Zaluar.

Contém pontos de segundos exames de freqüência de *Cálculo infinitesimal e de Análise Superior* os seguintes números da «*Gazeta de Matemática*: 2 e 6.

MECÂNICA RACIONAL — FÍSICA MATEMÁTICA

F. C. L. — 2.º exame de freqüência, 1-II-1941

994 — Determinar o centro de gravidade da superfície lateral dum cilindro de revolução em tôrno do eixo dos xx, limitado pelos planos coordenados e pelo plano $x=h$, e cuja densidade é uma função linear da coordenada z, nula para $z=0$. R: *A equação da superfície é* $y^2+z^2=R^2$, *donde* $p=0$ *e* $q=-y/z$. *A densidade num ponto é* $\lambda=az$. *As coordenadas do centro de gravidade calculam-se pelas fórmulas.* $\xi=\dfrac{\iint_c \sqrt{1+p^2+q^2}\,\lambda x\,dx\,dy}{\iint_c \sqrt{1+p^2+q^2}\,\lambda\,dx\,dy}$, *e expressões análogas por* η *e* ζ *que se deduzem por substituição de* x *por* y *e* z *respectivamente.*

Ora $\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{1}{z}\sqrt{y^2+z^2}=\frac{R}{z}$ *e portanto*

$$\xi=\frac{\int_0^h x\,dx\int_0^R dy}{\int_0^h dx\int_0^R dy}=\frac{h}{2},\qquad \eta=\frac{\int_0^h dx\int_0^R y\,dy}{\int_0^h dx\int_0^R dy}=\frac{R}{2}\quad e$$

$$\zeta=\frac{\int_0^h dx\int_0^R z\,dy}{\int_0^h dx\int_0^R dy}=\frac{\int_0^R\sqrt{R^2-y^2}\,dy}{R}=$$

$$=\frac{1}{R}\left[\frac{y}{2}\sqrt{R^2-y^2}+\frac{R^2}{2}\,\text{arc sen}\,\frac{y}{R}\right]_0^R=\frac{\pi R}{4}.$$

995 — Um ponto material pode mover-se sôbre a parábola $y^2=2px$ e é atraído por um ponto do plano da curva de coordenadas (p, b), com uma fôrça proporcional à distância. Calcular as posições de equilíbrio. R: *Componentes da fôrça:* $X=k(p-x)$ $Y=k(b-y)$. *a) Método das reacções:*

$$\begin{cases} k(p-x)+\mu\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\[2mm] k(b-y)+\mu\dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}\quad \textit{ou seja}\quad \begin{cases} k(p-x)-2p\mu=0\\ k(b-y)+2y\mu=0.\end{cases}$$

Mas $x=\dfrac{y^2}{2p}$ *e a 1.ª equação pode escrever-se* $k\left(p-\dfrac{y^2}{2p}\right)-2p\mu=0$ *donde* $\mu=\dfrac{2p^2-y^2}{4p^2}k$; *substituindo na 2.ª equação vem* $y=\sqrt[3]{2p^2b}$ *e portanto* $x=\dfrac{y^2}{2p}=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{4pb^2}$. *b) Método dos trabalhos virtuais:* $x=\dfrac{y^2}{2p}$ $\delta x=\dfrac{y}{p}\delta y$ *logo* $X\delta x+Y\delta z=0$ *ou*

$$k(p-x)\frac{y}{p}\delta y+k(b-y)\delta y=0,\qquad \left(b-\frac{xy}{p}\right)\delta y=0.$$

Como δy *pode tomar qualquer valor, deve ser* $b-\dfrac{xy}{p}=0$ *ou atendendo ao valor de* x: $b-\dfrac{y^3}{2p^2}=0$ *donde* $y=\sqrt[3]{2p^2b}$.

996 — No movimento duma figura plana no seu plano, as velocidades, num dado instante, dos pontos $P_1(0,0)$ e $P_2(4,3)$ têm respectivamente por cosenos directores $\alpha_1=3/\sqrt{3}$, $\beta_1=2/\sqrt{3}$, $\alpha_2=3/\sqrt{10}$ e $\beta_2=-1/\sqrt{10}$. Determinar o centro instantâneo de rotação. R: *Tem-se* $\mathbf{v}_1=\rho_1(3\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2)$ *e* $\mathbf{v}_2=\rho_2(3\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)$. *As normais a estas velocidades, tiradas respectivamente por* P_1 *e* P_2 *são:* $Q_1=P_1+\lambda i(3\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2)=P_1+\lambda(-2\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2)$ *e* $Q_2=P_2+i\mu(3\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)=P_2+\mu(\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2)=P_1+4\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2+\mu(\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2)=P_1+(4+\mu)\mathbf{e}_1+(3+3\mu)\mathbf{e}_2$ *cujo ponto de encontro é dado pelos valores de* λ *e de* μ *que tornem* $Q_1\equiv Q_2$ *ou seja:* $-2\lambda=4+\mu$, $3\lambda=3+3\mu$ *donde* $\lambda=-1$ *e* $\mu=-2$. *O centro instantâneo de rotação é pois* $C=P_1-(-2\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2)$ *ou seja* $C(2,-3)$.

997 — É dada a parábola $y^2=2px$. Supondo que a área limitada pela parábola tem uma densidade de forma $\lambda=x+b$ determinar b de forma que o centro de gravidade da área referida limitada pela recta $x=p$ esteja no foco da parábola. R: *As coordenadas do foco são* $F(p/2, 0)$. *Como a curva é simétrica em relação ao eixo dos* xx, *o centro de gravidade está sôbre êste eixo e portanto* $\eta=0$. *Basta pois determinar o valor de* ξ *e igualá-lo a* $p/2$. *Temos então:* $\xi=\dfrac{\iint\lambda x\,dx\,dy}{\iint\lambda\,dx\,dy}=$

$$=\frac{\int_0^p(x^2+bx)\,dx\int_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}}dy}{\int_0^p(x+b)\,dx\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}}dy}=\frac{30p^2+42pb}{42p+70b}.\quad \textit{Logo}$$

$\xi=p/2$ *ou* $9p+7b=0$ *donde* $b=-9/7$.

Soluções dos exercícios 994 a 997 de F. V. A. de Veiga de Oliveira.

F. C. P. — 2.º exame de freqüência, 1940-1941

998 — Um ponto material pesado P está suspenso dum fio inextensível em cuja extremidade livre actua uma fôrça Φ que lhe imprime um movimento rectilíneo, vertical, ascendente, uniformemente acelerado. Pêso do ponto $p=500$ kg. A aceleração $a=2$ m/s².

1.º ¿Como varia Φ com o tempo, na hipótese de ser nula a velocidade inicial do ponto?

2.º ¿Como varia com o tempo a potência desenvolvida por Φ e qual o seu valor em kw, 10 segundos depois do instante inicial, na hipótese considerada na pregunta anterior?

999 — Um sistema material é constituído como a figura indica. Os discos D e D_1 são solicitários e concêntricos, e o movimento de D_1 sôbre Ox faz-se sem escorregamento. Os raios de D e D_1 são b e b_1 e tem lugar a relação $2b=b_1$. O é fixo e o resvalamento de D contra OA faz-se sem atrito. As fôrças actuantes são os pesos p e p' dos discos e da barra e uma fôrça F horizontal aplicada em C. O sistema é homogénio.

Dados numéricos: $p=p'=10$ kg. $b_1=1m$ $OA=2a=5m$.

a) Parametre o sistema.

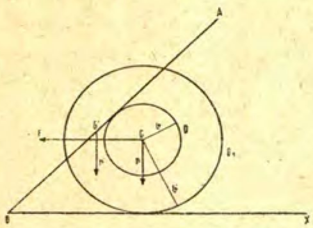
b) Escreva equações que traduzam condições necessárias e suficientes de equilíbrio do sistema considerado.

c) Calcule a fôrça F de modo que o equilíbrio tenha lugar quando a barra OA forma com Ox um ângulo de 60°.

d) Poderá calcular gràficamente a fôrça F? Justifique a resposta.

e) Verifique se as ligações são perfeitas

Suponha agora que o sistema parte, sem velocidade inicial, de uma posição que não seja de equilíbrio, abandonado à acção das fôrças anteriormente consideradas, incluindo F a que se atribuirá um valor constante.



f) Escreva a equação ou as equações que permitem estudar o movimento do sistema.

g) Escreva a equação que lhe permite calcular o valor comum das reacções que se desenvolvem entre a barra OA e o disco D.

I. S. T. — 2.° exame de freqüência, 25-6-1941

1000 — Um paralelogramo articulado $ABA'B'$ está em equilíbrio. Os dois vértices opostos B e B' são ligados por um fio flexível e inextensível. Sôbre os vértices opostos A e A' actuam duas fôrças iguais e opostas, F e $F'=-F$, que tendem a aproximar êsses dois vértices. Qual é a tensão do fio BB', em qualquer dos seu pontos?

1001 — Um fio flexível e inextensível homogéneo, cujas extremidades são dois pontos fixos A e B, está animado duma rotação uniforme em tôrno da recta AB. Dasprezando o pêso do fio, em face da fôrça centrífuga, qual é a figura de equilíbrio relativo?

1002 — Quando uma figura plana, possìvelmente deformàvel, se move em tôrno duma recta qualquer do seu plano, o seu momento cinético, em relação a essa recta, é o mesmo que seria se não houvesse deformação.

1003 — Verificar que o sistema das fôrças de inércia de transporte é conservativo, quando o movimento de transporte é uma rotação em tôrno dum eixo fixo. Achar o seu potencial.

Contém pontos de segundos exames de freqüência de *Mecânica Racional* e *Física Matemática* os seguintes números da «*Gazeta de Matemática*»: 2 e 6.

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C. L. — 2.° exame de freqüência 21-5-1941

1004 — Tomam-se ao acaso dois números quaisquer entre 0 e $a>0$. Calcular a probabilidade de que o produto dêles seja inferior a ma^2 $(0<m<1)$. Aplicação numérica $m=1/4$. R: *Designemos por* x *e* y *os dois números em questão. Tem-se* $0<x<a$ *e* $0<y<a$. *Pretende-se determinar a probabilidade de que* $xy<ma^2$.

O mesmo problema pode receber estoutro enunciado: Determinar a probablidade de que um ponto (x, y) *tomado ao acaso no interior do quadrado de lados* $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=a$ *seja interior ao domínio* $0<x<a$, $0<y<a$, $xy<ma^2$, *isto é, o domínio do 1.° quadrante limitado pelas rectas* $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=a$ *e pela hipérbole* $xy-ma^2=0$. *A solução dêste problema é imediata — a probabilidade pedida é o cociente das áreas dos dois domínios, isto é,*

$$p=\frac{ma^2+\int_{ma}^{a}\frac{ma^2}{x}dx}{a^2}=m(1-\log m).$$

$m=1/4 \to p=(1+\log 4)/4=(1+1{,}3863)/4=0{,}5791$.

1005 — Calcular o valor médio da função $\sqrt{r^2-x^2}$ sendo $\frac{dx}{k}$ a probabilidade elementar da variável casual x definida no intervalo $(-r, r)$. R: *Cálculo de* k: $1=\int_{-r}^{+r}\frac{dx}{k}=2kr \to k=1/2r$. *Cálculo do valor médio:* $M\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)=\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=$ $=\frac{r}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{\pi r}{2}$.

Soluções dos números 1004 e 1005 de M. Zaluar

Contém pontos de segundos exames de freqüência de *Cálculo das Probabilidades* o número 2 da «*Gazeta de Matemática*».