Aline Soares Salgado

ANO XVII — N.º 63/64 **GAZETA DE MATEMÁTICA** MARÇO/JUNHO — 1956

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º, Dto. — Telef. 771943 — LISBOA-N.

Uma exposição intrínseca da teoria dos determinantes

por Élon Lages Lima

1. Introdução. São conhecidos 3 processos para definir determinantes. O primeiro, que chamaremos de *combinatório*, (LEIBNIZ, CAYLEY) define o determinante de uma matriz $n \times n (\alpha_{ij})$ por meio da fórmula $\det(\alpha_{ij}) = \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \alpha_{\sigma(1)1} \alpha_{\sigma(2)2} \cdots \alpha_{\sigma(n)n}$. O segundo processo, que chamaremos de *axiomático*, (WEIERSTRASS, KRONECKER) consiste em definir o determinante de uma matriz como uma função multilinear alternada dos vectores colunas dessa matriz, função normalizada pela condição de ser igual a 1 para a matriz identidade. Finalmente, o terceiro processo (a ordem, num certo sentido, é cronológica), que chamaremos *exterior*, é essencialmente devido a GRASSMANN mas só recentemente foi posto em forma matemática correta por BOURBAKI. Ele utiliza a álgebra exterior e consiste em definir, sem referência a matrizes, o determinante de uma transformação linear T sobre um espaço vectorial V de dimensão n como o escalar λ tal que o produto exterior $\Lambda^n T$ é igual a λ vezes a transformação identidade de $\Lambda^n V$. O processo combinatório, se bem que seja o mais difundido em livros de texto elementares (v. [1])*, é o de mais complicada exposição, onde todas as demonstrações são feitas por «força bruta» e as fórmulas são repletas de índices. O processo axiomático (v. [2] ou, preferìvelmente, [3]) representa um progresso, não sòmente sob o ponto de vista da elegância de exposição como da lógica, pois mostra que 3 das mais simples propriedades dos determinantes são suficientes para caracterizá-los: todas as demais propriedades se deduzem destas. Entretanto, além de exigir um teorema de existência e unicidade, este processo ainda contém muitos cálculos complicados nas demonstrações dos resultados cruciais, como: (1) $\det(AB) = \det A \,.\, \det B$; (2) $\det A \neq 0$ se e só se A possui inverso; (3) $\det(A^*) = \det A$, onde A^* representa a matriz transposta de A; (4) desenvolvimento de LAPLACE. O processo exterior, embora nada traga em benefício de (3), que é demonstrado da maneira clássica (v. [4]) elimina completamente a dificuldade das demonstrações de (1) e (2) e dá a (4) uma demonstração de simplicidade considerada maximal. Em virtude destas vantagens e de ser o único *intrínseco* (isto é, sem referência essencial a bases e matrizes) o processo exterior é considerado o mais claro, simples e elegante para apresentar a teoria dos determinantes. Apesar disso, continua-se a ensinar esta teoria da maneira combinatória

---

* Os números entre colchetes referem-se à bibliografia no fim do trabalho.

ou, quando muito, axiomática. Motivo: em geral, quem está estudando determinantes pela primeira vez não conhece a álgebra de GRASSMANN.

Nosso proprósito aqui é apresentar uma exposição intrínseca da teoria dos determinantes que difere da de BOURBAKI por não fazer uso da álgebra exterior. Tudo o que supomos conhecido do leitor são rudimentos da teoria dos espaços vectoriais sobre um corpo comutativo K que, de resto, pode ser pensado como o corpo real ou complexo. Para as demonstrações dos resultados que usaremos, veja-se [5].

2. Permutações. Resumiremos as propriedades das permutações que usaremos nos parágrafos seguintes.

Chamaremos de *grupo simétrico* S_n ao conjunto de todas permutações dos inteiros $\{1, 2, \cdots, n\}$ isto é, de todas as aplicações biunívocas do conjunto $\{1, \cdots, n\}$ sobre si próprio. Se $\rho, \sigma \in S_n$, o produto $\sigma\rho$ é definido como a permutação que consiste em aplicar ρ e depois σ. Em outras palavras: $\sigma\rho(i) = \sigma(\rho(i)), 1 \leq i \leq n$. Munido desta operação, S_n é um *grupo*, isto é: existe uma permutação $\theta \in S_n$ tal que $\theta\sigma = \sigma\theta = \sigma$ para toda $\sigma \in S_n$ (basta definir $\theta(i) = i$, para todo $i, 1 \leq i \leq n$); dada $\sigma \in S_n$ existe $\sigma^{-1} \in S_n$ tal que $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \theta$ (basta definir $\sigma^{-1}(j) = i$ se $\sigma(i) = j$); e finalmente, $\sigma(\rho\mu) = (\sigma\rho)\mu$ quaisquer que sejam $\sigma, \rho, \mu \in S_n$. O grupo S_n tem $n!$ elementos. Uma permutação $\sigma \in S_n$ diz-se *par* se o número de inversões na sequência $(\sigma(1), \cdots, \sigma(n))$ é par e *ímpar* no caso contrário. Equivalentemente, consideremos o produto $P = (1-2)(1-3)\cdots(n-1-n) = \prod_{i<j}(i-j)$. Uma permutação $\sigma \in S_n$ é par se e só se $P' = \prod_{i<j}(\sigma(i) - \sigma(j)) = P$; σ é ímpar se e só se $P' = -P$. O *sinal* de uma permutação σ é o inteiro ε_σ tal que $\varepsilon_\sigma = +1$ se σ é par e $\varepsilon_\sigma = -1$ se σ é ímpar. É claro que $\varepsilon_{\sigma\rho} = \varepsilon_\sigma \varepsilon_\sigma = \varepsilon_\rho \varepsilon_\sigma = \varepsilon_{\rho\sigma}$. Entre as permutações, destacaremos as *transposições*. Uma transposição $\tau = (ij), (1 \leq i < j \leq n)$ é uma permutação tal que $\tau(i) = j, \tau(j) = i$ e $\tau(k) = k$ se $j \neq k \neq i$. Uma transposição τ é evidentemente uma permutação ímpar, de modo que $\varepsilon_{\tau\sigma} = -\varepsilon_\sigma$ qualquer que seja a permutação σ. Dada uma transposição (fixa) τ, formaremos, para cada $\sigma \in S_n$, o subconjunto $C_\sigma = \{\sigma, \tau\sigma\} \subset S_n$. Dois desses conjuntos C_σ e $C_\rho, \rho, \sigma \in S_n$, ou coincidem ou não têm elemento em comum. (Pode acontecer que $C_\sigma = C_\rho$ com $\sigma \neq \rho$; isto se dá se e só se $\rho = \tau\sigma$). Portanto os conjuntos C_σ fornecem uma decomposição de S_n em partes disjuntas, cada uma com 2 elementos. Logo há $n!/2$ dessas partes, isto é: existem $n!/2$ permutações $\sigma_1, \cdots, \sigma_{n!/2}$ tais que

$$(D) \qquad S_n = C_1 \cup \cdots \cup C_{n!/2}, \text{ com } C_i = \{\sigma_i, \tau\sigma_i\} \text{ e } C_i \cap C_j = \emptyset, i \neq j.$$

Faremos referência a (D) como a *decomposição de* S_n *módulo* τ. Notemos que, em cada $C_\sigma = \{\sigma, \tau\sigma\}$ um dos elementos é par e o outro é ímpar. Substituindo σ_i por $\rho_i = \tau\sigma_i$ (lembramos que $C_\sigma = C_{\tau\sigma}$) se necessário, podemos supôr que, em (D), todas as permutações σ_i são pares.

3. Funções multilineares. Durante todo este trabalho indicaremos com V um espaço vectorial sobre um corpo (comutativo) K e com n a dimensão (finita) de V sobre K.

Se W é outro espaço vectorial sobre K, uma *aplicação r-linear* de V em W é uma aplicação $f: V \times V \times \cdots \times V$ (r factores) $\to W$, tal que, para $1 \leq i \leq r$:

$$f(x_1, \cdots, x_i + y_i, \cdots, x_r) = f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_r) + f(x_1, \cdots, y_i, \cdots, x_r)$$

$$f(x_1, \cdots, \lambda x_i, \cdots, x_r) = \lambda f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_r), \quad \lambda \in K.$$

Em particular, se $W = K$, uma aplicação r-linear de V em K será chamada uma *função r-linear sobre* V. Este é o caso que consideramos mais frequentemente. O conjunto $L_r(V)$ de todas as funções r-lineares sobre V constitue um espaço vectorial quando se define soma de 2 funcões e produto de uma função por um escalar, do modo natural. Em particular, se $r=1$, tem-se $L_1(V)=$ $=V^*=$ espaço dual de V.

Uma distinção importante que faremos é entre uma *sequência* de inteiros $(i_1, \cdots, i_r)$, $1 \leq i_k \leq n$, e um *conjunto* de inteiros $\{i_1, \cdots, i_r\}$, $1 \leq i_k \leq n$. Uma sequência é uma função definida no conjunto $\{1, \cdots, r\}$ com valores no conjunto $\{1, \cdots, n\}$: $1 \to i_1, \cdots, r \to i_r$; portanto, podemos ter $i_j = i_k$ numa sequência, com $j \neq k$. Diremos então que a sequência $(i_1, \cdots, i_r)$ tem repetições. Num conjunto, porém, $j \neq k$ implica $i_j \neq i_k$; não há repetições e, em particular, devemos ter $r \leq n$.

Proposição 1. Seja $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base de V. Para toda sequência $(i_1, \cdots, i_r)$, $1 \leq i_k \leq n$, fixemos arbitràriamente (*) $f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_r}) \in K$. Então existe uma e sòmente uma função r-linear f sobre V com os valores (*) nos pontos $(e_{i_1}, \cdots, e_{i_r})$.

Demonstração. Dada $f \in L_r(V)$, quaisquer que sejam $x_1, \cdots, x_r \in V$ pode-se escrever $x_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i (j=1, \cdots, r)$. Portanto $f(x_1, \cdots, x_r) =$

$$= f\left(\sum_{i_1=1}^{n} \alpha_{i_1 1} e_1, \cdots, \sum_{i_r=1}^{n} \alpha_{i_r r} e_{i_r}\right) =$$

$$= \sum_{i_1, \ldots, i_r=1}^{n} \alpha_{i_1 1} \alpha_{i_2 2} \cdots \alpha_{i_r r} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots e_{i_r}) \; (^{**})$$

o que mostra que uma função r-linear fica determinada por seus valores (*) isto é, existe no máximo uma $f \in L_r(V)$ com esses valores. Além disso, se definirmos $f(x_1, \cdots, x_r)$ por meio da igualdade(**), é evidente que $f \in L_r(V)$ e portanto existe realmente uma função r-linear satisfazendo às condições (*).

Uma aplicação r-linear f de V em outro espaço vectorial W sobre K diz-se *alternada* se cumpre a condição

$$f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_r) = 0 \quad \text{quando} \quad x_i = x_j$$

Uma aplicação r-linear alternada f é também *antissimétrica*, isto é,

$$f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_r) = -f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_r).$$

Para demonstrar este facto, ponhamos $f(x_1, \cdots, x_i, \cdots x_j, \cdots, x_r) = \varphi(x_i, x_j)$. Temos $0 = \varphi(x_i + x_j, x_i + x_j) = \varphi(x_i, x_j) +$ $+ \varphi(x_j, x_j) + \varphi(x_i, x_j) + \varphi(x_j, x_i) = \varphi(x_i, x_j) +$ $+ \varphi(x_j, x_i)$, donde $\varphi(x_i, x_j) = -\varphi(x_j, x_i)$. Mais geralmente, dada f alternada, para toda permutação $\sigma \in S_r$, temos

$$f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(r)}) = \varepsilon_\sigma f(x_1, \cdots, x_r).$$

Recìprocamente, se K tem característica diferente de 2, é fácil ver que toda aplicação r-linear antissimétrica é também alternada. Representaremos por $A_r(V)$ o conjunto das funções r-lineares alternadas sobre V, isto é, o conjunto das aplicações r-lineares alternadas de V em K. $A_r(V)$ é um subespaço vectorial de $L_r(V)$.

A toda permutação $\sigma \in S_r$ e toda função $f \in L_r(V)$ associaremos a função σf, definida pela fórmula:

$$\sigma f(x_1, \cdots, x_r) = f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(r)}).$$

É claro que $\sigma f \in L_r(V)$ e $\sigma\left(\sum \lambda_i f_i\right) =$ $= \sum \lambda_i (\sigma f_i), \lambda_i \in K, f_i \in L_r(V)$; se ρ é outra permutação, $\rho(\sigma f) = (\sigma \rho) f$; se f é alternada $\sigma f = \varepsilon_\sigma f$.

Dada a função $f \in L_r(V)$, definiremos a *alternada* $\mathfrak{A} f$ de f como $\mathfrak{A} f = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \sigma f$ (σ percorrendo o conjunto S_r de todas as permutações dos inteiros $1, \cdots, r$). Evidentemente $\mathfrak{A} f$ é uma função r-linear. Mostraremos agora que $\mathfrak{A} f$ é alternada. Para isto, sejam $x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_r \in V$ tais que $x_i = x_j$ e consideremos a transposição $\tau = (ij) \in S_r$. Por simplicidade, escrevamos $x = (x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_r)$; temos $\tau f(x) = f(x)$. Seja $\{\sigma_1, \tau\sigma_1\} \cup \cdots \cup \{\sigma_{r!/2}, \tau\sigma_{r!/2}\}$ a decomposição de S_r módulo τ. Admitindo cada σ_i par, temos: $\mathfrak{A} f(x) = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \sigma f(x) =$

$$= \sum_{i=1}^{r!/2} [\sigma_i f(x) - (\tau \sigma_i) f(x)] = \sum_i [\sigma_i f(x) - \sigma_i (\tau f(x))] = \sum_i [\sigma_i f(x) - \sigma_i f(x)] = 0 .$$

Proposição 2. Para todo inteiro $r \leq n$ existe uma função r-linear alternada $f \neq 0$.

Demonstração. Consideremos uma base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de V e a função $g \in L_r(V)$ tal que $g(e_1, \cdots, e_r) = 1$ e $g(e_{i_1}, \cdots, e_{i_r}) = 0$ para toda sequência $(i_1, \cdots, i_r) \neq (1, \cdots, r)$. g existe pela proposição 1. Tomemos $f = \mathfrak{A} g$; como vimos acima, f é alternada e além disso, $f(e_1, \cdots, e_r) = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma g(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)}) = g(e_1, \cdots, e_r) = 1$.

Observação: Se $r > n$, existe a sequência $(e_1, \cdots, e_r)$, o que invalida a demonstração acima.

Corolário: *Dada uma base* $\{e_1, \cdots, e_n\}$ *de* V *existe uma função* n-*linear alternada* f_0 *tal que* $f_0(e_1, \cdots, e_n) = 1$.

Proposição 3. Sejam $x_1, \cdots, x_n \in V$ e $0 \neq f \in A_n(V)$. Então $f(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$ se e só se $x_1, \cdots, x_n$ são linearmente independentes.

Demonstração: Se $x_1, \cdots, x_n$ são linearmente dependentes, podemos supôr $x_1 = \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$, $\lambda_i \in K$. Então

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f\left(\sum_{i=2}^n \lambda_i x_i, x_2, \cdots, x_n\right) = \lambda_2 f(x_2, x_2, \cdots, x_n) + \cdots + \lambda_n f(x_n, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

pois f é alternada. Recìprocamente, se $x_1, \cdots, x_n$ são independentes, eles constituem uma base de $V: x_1 = e_1, \cdots x_n = e_n$. Se fosse $f(e_1, \cdots, e_n) = 0$ então, para toda permutação $\sigma \in S_n$ teríamos $f(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon_\sigma f(e_1, \cdots, e_n) = 0$ e, se $(i_1, \cdots, i_n)$ é uma sequência com repetições, $f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}) = 0$, pois f é alternada. Pela proposição 1, teríamos então $f = 0$, uma contradição.

Observação: A primeira parte da demonstração acima mostra, mais geralmente, que se $\{x_1, \cdots, x_r\}$ é qualquer conjunto finito de vectores linearmente dependentes em V, $f(x_1, \cdots, x_r) = 0$. Em particular, se $r > n$, toda função r-linear alternada é igual a zero, mostrando que a proposição 2 não pode ser melhorada.

Proposição 4. Se $0 \neq f \in A_n(V)$, para toda $g \in A_n(V)$ existe $\lambda \in K$ tal que $g = \lambda f$. Em outras palavras, $A_n(V)$ é um espaço vectorial de dimensão 1 sobre K.

Demonstração: Seja $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base de V. Pela proposição 3, $f(e_1, \cdots, e_n) \neq 0$. Logo existe $\lambda \in K$ tal que $g(e_1, \cdots, e_n) = \lambda f(e_1, \cdots, e_n)$. Se $\sigma \in S_n$ então $g(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon_\sigma g(e_1, \cdots, e_n) = \lambda \varepsilon_\sigma f(e_1, \cdots, e_n) = f(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)})$. Se $(i_1, \cdots, i_n)$ é uma sequência com repetição então $g(e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}) = f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}) = 0 = \lambda f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_n})$. Portanto g e λf coincidem em todos os pontos da forma $(e_{i_n}, \cdots, e_{i_n})$. Pela proposição 1, tem-se $g = \lambda f$.

4. Determinantes. Dados o endomorfismo T de V(= transformação linear de V em si próprio), definiremos o endomorfismo ${}^rT$ de $L_r(V)$ do seguinte modo: para toda $f \in L_r(V)$, ${}^rTf$ é a função tal que ${}^rTf(x_1, \cdots, x_r) = f(Tx_1, \cdots, Tx_r)$.

É fácil ver que ${}^rTf \in L_r(V)$ e que ${}^rT: f \to {}^rTf$ é realmente um endomorfismo. Se S é outro endomorfismo de V, tem-se

$$(1) \qquad {}^r(TS) = {}^rS \cdot {}^rT$$

Se f é alternada, ${}^rTf$ é também alternada. Em particular, se representarmos por $\hat{T}$ a restrição de ${}^nT$ a $A_n(V)$, $\hat{T}$ é um endomorfismo de $A_n(V)$. Como $A_n(V)$ tem dimensão 1, todo seu endomorfismo é um múltiplo escalar do endomorfismo identidade I. Portanto existe um escalar $\det T \in K$ tal que $\hat{T} = \det T \cdot \mathrm{I}$, isto é, $\hat{T} f = \det T \cdot f$ qualquer que seja $f \in A_n(V)$. Chamaremos o escalar $\det T$ de *determinante* do endomorfismo T. Temos então

$$f(Tx_1, \cdots, Tx_n) = \det T \cdot f(x_1, \cdots, x_n)$$

quaisquer que sejam $x_1, \cdots, x_n \in V$ e $f \in A_n(V)$. Em particular, se $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é uma base de V e $f_0 \in A_n(V)$ é tal que $f_0(e_1, \cdots, e_n) = 1$, temos

$$(2) \qquad \det T = f_0(Te_1, \cdots, Te_n)$$

TEOREMA 1. *Se* S *e* T *são endomorfismos de* V, $\det(ST) = \det S \cdot \det T$.

Demonstração: Indicando com o mesmo símbolo I os endomorfismo identidades de V e $A_n(V)$, temos $\det(ST) \cdot I = \widehat{ST} = \hat{S} \cdot \hat{T} = (\det S \cdot I)(\det T \cdot I) = \det S \cdot \det T \cdot I$ donde $\det(S\,T) = \det S \cdot \det T$.

É claro que $\det I = 1$, de modo que se T tem inverso e pomos $S = T^{-1}$ no Teorema 1, obtemos $1 = \det(T^{-1}) \cdot \det T$. Segue-se que $\det(T^{-1}) = (\det T)^{-1}$ e que $\det T \neq 0$. Recìprocamente, se T não possui inverso, dada a base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de V e $f_0 \in A_n(V)$ tal que $f_0(e_1, \cdots, e_n) = 1$, temos $\det T = f_0(Te_1, \cdots, Te_n) = 0$ porque $Te_1, \cdots, Te_n$ são linearmente dependentes. Portanto vale o

TEOREMA 2. $\det T \neq 0$ *se e só se* T *possui inverso.*

Definimos agora o determinante de uma matriz $n \times n$ (α_{ij}) com elementos em K, pondo $\det(\alpha_{ij}) = \det T$, onde T é o endomorfismo do espaço vectorial K^n que possui a matriz (α_{ij}) relativamente à base canónica $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de K^n; recordemos que esta base é formada pelos vectores $e_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ com todas as coordenadas 0, excepto a i-ésima, que é 1. Explìcitamente, se $f \in A_n(K_n)$:

$$(3) \qquad \det(\alpha_{ij}) \cdot f(e_1, \cdots, e_n) = f(x_1, \cdots, x_n)$$
$$\text{onde cada } x_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i .$$

Os Teoremas 1 e 2 são evidentemente válidos se interpretarmos S e T como matrizes e portanto duas matrizes semelhantes (α_{ij}) e $(\beta_{ij})^{-1}(\alpha_{ij})(\beta_{ij})$ têm o mesmo determinante. Segue-se que o determinante de um endomorfismo T é igual ao determinante de qualquer das suas matrizes. Consequentemente a fórmula (3) é válida se considerarmos $\{e_1, \cdots, e_n\}$ como uma base de qualquer espaço vectorial V de dimensão n sobre k, e $f \in A_n(V)$. Em particular, é interessante ler a fórmula (3) da direita para a esquerda e ver como se calcula o valor de uma função alternada $f \in A_n(V)$ quando se conhece apenas $f(e_1, \cdots, e_n)$.

Se, em (3), considerarmos novamente α_{ij} como a i-ésima coordenada do vector $x_j \in K^n$ e tomarmos $f = f_0 \in A_n(K^n)$ tal que $f_0(e_1, \cdots, e_n) = 1$, obtemos $\det(\alpha_{ij}) = f_0(x_1, \cdots, x_n)$. Portanto o determinante de uma matriz é uma função multilinear alternada dos vectores colunas dessa matriz, normalizada pela condição $\det(\delta_{ij}) = 1$, onde (δ_{ij}) é a matriz identidade. (Definição axiomática de determinante). Se $F(\alpha_{ij}) = f(x_1, \cdots, x_n)$ é uma função multilinear alternada dos vectores colunas da matriz (α_{ij}) então a fórmula (3) mostra que $F(\alpha_{ij}) = \det(\alpha_{ij}) \cdot f(e_1, \cdots, e_n) = \det(\alpha_{ij}) \cdot F(\delta_{ij})$. Portanto a função F é um múltiplo escalar da função $(\alpha_{ij}) \to \det(\alpha_{ij})$, o coeficiente escalar sendo precisamente o valor que F assuma para a matriz identidade. Demonstramos assim o teorema básico de existência e unicidade da teoria dos determinantes exposta pelo método axiomático.

Se, em (3), tomarmos $f = f_0$ tal que $f_0(e_1, \cdots, e_n) = 1$ e desenvolvermos o segundo membro de acordo com a definição de função n-linear, teremos:

$$\det(\alpha_{ij}) = f_0\left(\sum_{i_1=1}^{n} \alpha_{i_1} e_{i_1}, \cdots, \sum_{i_n=1}^{n} \alpha_{i_n n} e_{i_n}\right) =$$
$$= \sum_{i_1, \ldots, i_n=1}^{n} \alpha_{i_1 1} \alpha_{i_2 2} \cdots \alpha_{i_n n} f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}) .$$

Notemos, porém, que f_0 é alternada e portanto $f_0(e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}) = 0$ se a sequência $(i_1, \cdots, i_n)$ tem repetições; além disso, se todos os i_k são diferentes, isto é, se

$(i_1, \cdots, i_k) = (\sigma(1), \cdots, \sigma(n))$ para alguma permutação $\sigma \in S_n$, temos $f_0(e_{i_1}, \cdots, e_{i_r}) = f_0(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon_\sigma f_0(e_1, \cdots, e_n) = \varepsilon_\sigma$. Então, a última igualdade se escreve

$$(4) \qquad \det(\alpha_{ij}) = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \, \alpha_{\sigma(1)\,1} \, \alpha_{\sigma(2)\,2} \cdots \alpha_{\sigma(n)\,n}$$

onde σ percorre o conjunto S_n. Estabelecemos assim a equivalência entre a nossa definição de determinante e a definição combinatória.

5. Simetria entre linhas e colunas.

Proposição 5. Seja (α_{ij}) uma matriz $n \times n$ com elementos em K. Se (α'_{ij}) representa a matriz obtida multiplicando-se a primeira linha de (α_{ij}) por λ, onde $0 \neq \lambda \in K$ temos $\det(\alpha'_{ij}) = \lambda \cdot \det(\alpha_{ij})$.

Demonstração: Seja $0 \neq f \in A_n(V)$ e $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base de V. Por (3), se tomarmos $x_j = \sum_i \alpha_{ij} e_i \,(j = 1, \cdots, n)$, teremos

$$(5) \qquad f(x_1, \cdots, x_n) = \det(\alpha_{ij}) \cdot f(e_1, \cdots, e_n).$$

Por outro lado, considerando a base $\{e_1' \cdots e_n'\}$ de V, onde $e_1' = (1/\lambda)\, e_1$ e $e_i' = e_i$ se $i \neq 1$, e os mesmos x_j, obtemos $x_j = \sum_i \alpha'_{ij} e'_j$, donde

$$(6) \qquad f(x_1, \cdots, x_n) = \det(\alpha'_{ij}) \cdot f(e_1', \cdots, e_n').$$

Notando que $f(e_1', \cdots, e_n') = (1/\lambda) f(e_1, \cdots, e_n) \neq 0$, a comparação de (5) e (6) dá: $\det(\alpha'_{ij}) = \lambda \det(\alpha_{ij})$.

Definiremos agora a aplicação $\Lambda : (V^*)^n \to A_n(V)$ do seguinte modo: se $f_1, \cdots, f_n \in V^*$, $f = \Lambda(f_1, \cdots, f_n)$ é tal que

$$(7) \qquad f(x_1, \cdots, x_n) = \det(f_i x_j), \quad x_1, \cdots, x_n \in V.$$

Como o determinante de uma matriz é uma função n-linear alternada dos seus vectores colunas, vemos que, realmente, $f \in A_n(V)$. Além disso, a proposição 5 mostra que, se $f = \Lambda(f_1, \cdots, f_n)$ então (8) $\lambda f = \Lambda(\lambda f_1, \cdots, f_n)$. Se $\{e^1, \cdots, e^n\}$ é uma base de V^*, evidentemente $\Lambda(e^1, \cdots, e^n) \neq 0$. Como dim. $A_n(V) = 1$, toda $f \in A_n(V)$ pode ser escrita como $f = \Lambda(f_1, \cdots, f_n)$, $f_1, \cdots, f_n \in V^*$, de modo não único. Realmente, $f = \lambda \Lambda(e^1, \cdots, e^n) = \Lambda(\lambda e^1, \cdots, e^n)$.

Proposição 6. Se, a cada $\varphi \in A_n(V^*)$ e a cada $f = \Lambda(f_1, \cdots, f_n) \in A_n(V)$ associarmos o escalar $\prec f, \varphi \succ = \varphi(f_1, \cdots, f_n) \in K$, obteremos uma dualidade entre $A_n(V^*)$ e $A_n(V)$. Dado o endomorfismo T em V e o seu transposto T^* em V^*, o transposto do endomorfismo $\hat{T}$ de $A_n(V)$ em relação à dualidade acima definida é o endomorfismo $\widehat{T^*}$ de $A_n(V^*)$. Em outras palavras: $(\hat{T})^* = \widehat{T^*}$.

Demonstração: Em primeiro lugar, precisamos verificar que $\prec f, \varphi \succ$ é bem definida. Para isto, suponhamos que $g_1, \cdots, g_n \in V^*$ são tais que $\Lambda(g_1, \cdots, g_n) = f = \Lambda(f_1, \cdots, f_n)$. Isto significa (permutando i e j em (6), por conveniência) que $\det(g_j x_i) = \det(f_j x_i)$ (9) quaisquer que sejam $x_1, \cdots, x_n \in V$. Tomando a base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ em V e a base dual $\{e^1, \cdots, e^n\}$ em V^*, escrevamos $f = \sum_i \alpha_{ij} e^i$ e $g_j = \sum_i \alpha_{ij} e^i$. Temos $f_j e_i = \alpha_{ij}$ e $g_j e_i = \beta_{ij}$. Portanto, (9) fornece $\det(\alpha_{ij}) = \det(\beta_{ij})$. Como φ é alternada, temos, em virtude de (3): $\varphi(f_1, \cdots, f_n) = \det(\alpha_{ij}) \cdot \varphi(e^1, \cdots, e^n) = \det(\beta_{ij}) \cdot \varphi(e^1, \cdots, e^n) = \varphi(g_1, \cdots, g_n)$. Assim, o escalar $\prec f, \varphi \succ$ depende ùnicamente de f e φ mas não da representação $f = \Lambda(f_1, \cdots, f_n)$. Para mostrar que $\prec f, \varphi \succ$ é bilinear, observemos que, sendo os 2 espaços $A_n(V)$ e $A_n(V^*)$ de dimensão 1, basta verificar que $\prec \lambda f, \mu \varphi \succ = \lambda \mu \prec f, \varphi \succ$, $\lambda, \mu \in K$, o que é óbvio, em virtude de (8). Finalmente, se $\prec f, \varphi \succ = 0$ para toda f então $\varphi = 0$ por definição e, se $\prec f, \varphi \succ = 0$ para toda φ, $f = 0$ pois, dado $f \neq 0$, tomamos uma base $\{e^i\}$ de V^* e $f = \Lambda(\lambda e^1, \cdots, e^n)$, $\lambda \neq 0$; qualquer que seja $\varphi \neq 0$ em $A_n(V^*)$, $\prec f, \varphi \succ = \varphi(\lambda e^1, \cdots, e^n) \neq 0$. Por conseguinte, $\prec f, \varphi \succ$ dá, realmente, uma dualidade entre $A_n(V^*)$ e $A_n(V)$. Quanto ao transposto de $\hat{T}$, temos que provar a identidade $\prec \hat{T} f, \varphi \succ =$

$= \prec f, \hat{I}^* \varphi \succ$ qualquer que sejam f e φ. Ora, se $f = \Lambda(f_1, \cdots, f_n)$, é claro que $\hat{T} f = \Lambda(T^* f_1, \cdots, T^* f_n)$, donde:

$$\prec \hat{T} f, \varphi \succ = \varphi(T^* f_1, \cdots, T^* f_n) =$$
$$= T^* \varphi(f_1, \cdots, f_n) = \prec f, \hat{T}^* \varphi \succ . \qquad CQD.$$

Observemos agora que, se indicarmos com o mesmo símbolo I o endomorfismo identidade de um espaço e do seu dual e se $\lambda \in K$, temos $(\lambda \cdot \mathrm{I})^* = \lambda \cdot \mathrm{I}$. Segue-se que: $\det T^* \cdot I = T^* = (\hat{T})^* = (\det T \cdot I)^* = \det T \cdot I$, donde o

TEOREMA 3. $det\, \mathrm{T} = det\, \mathrm{T}^*$.

COROLÁRIO: *Se* $(\alpha_{\mathrm{i}\,\mathrm{j}})$ *é uma matriz* $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ *e* $(\alpha_{\mathrm{j}\,\mathrm{i}})$ *é a sua matriz transposta, então* $det(\alpha_{\mathrm{i}\,\mathrm{j}}) = det(\alpha_{\mathrm{j}\,\mathrm{i}})$.

Assim, todos os resultados anteriores referentes a matrizes continuam válidos se substituirmos «colunas» por «linhas» nos enunciados. Em particular:

$$(a) \qquad \det(\alpha_{ij}) = \sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma \, \alpha_{1\sigma(1)} \cdot \alpha_{2\sigma(2)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)} \cdot$$

(b) O determinante de uma matriz é uma função multilinear alternada dos vectores linhas dessa matriz.

Aplicando (b) à definição (7), obtemos a

PROPOSIÇÃO 7. A aplicação $\Lambda : (V^*)^n \to A_n(V)$ é n-linear alternada.

COROLÁRIO: *Se* $\{\mathrm{e}^1, \cdots, \mathrm{e}^n\}$ *é uma base de* V^* *e* $\mathrm{f}_\mathrm{j} = \sum_i \alpha_{\mathrm{i}\,\mathrm{j}} \, \mathrm{e}^\mathrm{i}$, *então*:

$$(10) \qquad \Lambda(f_1, \cdots, f_n) = \det(\alpha_{ij}) \cdot \Lambda(e^1, \cdots, e^n).$$

Com efeito, $\Lambda(f_1, \cdots, f_n) =$
$$= \Lambda\Big(\sum_{i_1 = i}^n \alpha_{i_1 1} e^{i_1}, \cdots, \sum_{i_n = 1}^n \alpha_{i_n n} e^{i_n}\Big) =$$
$$= \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^n \alpha_{i_1 1} \alpha_{i_2 2} \cdots \alpha_{i_n n} \cdot \Lambda(e^{i_1}, \cdots, e^{i_n}).$$

Mas, conforme a proposição 7, $\Lambda(e^{i_1}, \cdots, e^{i})=0$ se $(i_1, \cdots, i_n)$ tem termos repetidos e, em caso contrário $\Lambda(e^{i_1}, \cdots, e^{i_n}) = \Lambda(e^{\sigma(1)}, \cdots, e^{\sigma(n)}) = \varepsilon_\sigma \Lambda(e^1, \cdots, e^n), \sigma \in S_n$. Portanto $\Lambda(f_1, \cdots, f_n) =$
$$= \Big(\sum_\sigma \varepsilon_\sigma \alpha_{\sigma(1)1} \alpha_{\sigma(2)2} \cdots \alpha_{\sigma(n)n}\Big) \Lambda(e^1, \cdots, e^n) =$$
$= \det(\alpha_{ij}) \cdot \Lambda(e^1, \cdots, e^n)$, de acôrdo com a igualdade (4).

6. Desenvolvimento de Laplace. Com as mesmas notações do Corolário acima, se escolhermos um conjunto $J = \{j_1, \cdots, j_r\}$ de inteiros tais que $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n$ e consideramos o seu complementar $J' = \{j'_1, \cdots, j'_{n-r}\} = \{1, \cdots, n\} - J$, ainda com $j'_1 < \cdots < j'_{n-r}$, temos

$$(11) \qquad \Lambda(f_1, \cdots, f_n) = \rho_{J,J'} \Lambda(f_{j_1}, \cdots, f_{j_r}, f_{j'_1}, \cdots, f_{j'_r}) =$$
$$= \rho_{J,J'} \sum_{(k_1, \ldots, k_r)} \alpha_{k_1 j_1} \alpha_{k_2 j_2} \cdots \alpha_{k_r j_r} \cdot$$
$$\cdot \Lambda(e^{k_1}, \cdots, e^{k_r}, f_{j'_1}, \cdots, f_{j'_{n-r}})$$

onde $\rho_{J,J'}$ é igual a $+1$ ou a -1, conforme o número de inversões da sequência $(j_1, \cdots, j_r, j'_1, \cdots, j'_{n-r})$ seja par ou ímpar, e a soma acima é estendida a todas as sequências $(k_1, \cdots, k_r)$, $1 \leq k_s \leq n$. Entretanto, se uma dessas sequências possui um elemento repetido, o termo correspondente em (11) é nulo pois Λ é alternada. Omitindo as parcelas nulas, podemos dizer que a soma (11) é estendida a todas as sequências $(k_1, \cdots, k_r)$ onde os k_s são todos distintos. Fixemos arbitràriamente uma sequência $(k_1, \cdots, k_r)$ com elementos distintos, tais que $k_1 < \cdots < k_r$ e vejamos qual é a contribuição, para a soma (11), das parcelas que correspondem às sequências $(p_1, \cdots p_r)$ que têm os mesmos elementos que $(k_1, \cdots, k_r)$ porém em ordem diferente; em outras palavras: existe uma permutação $\sigma \in S_r$ tal que $p_1 = \sigma(k_1), \cdots, p_r = \sigma(k_r)$. (Observe-se que estamos escrevendo $\sigma(k_s)$ em vez de $k_{\sigma(s)}$).

Esta contribuição é $\sum_\sigma \alpha_{\sigma(k_1)j_1}\alpha_{\sigma(k_2)j_2}\cdots\alpha_{\sigma(k_r)j_r}\cdot$

$$\cdot\Lambda(e^{\sigma(k_1)},\cdots,e^{\sigma(k_r)},f_{j'_1}\cdots,f_{j'_{n-r}})=$$

$$=\left(\sum_\sigma \varepsilon_\sigma\,\alpha_{\sigma(k_1)j_1}\alpha_{\sigma(k_2)j_2}\cdots\alpha_{\sigma(k_r)j_r}\right)\cdot$$

$.\,\Lambda(e^{k_1},\cdots,e^{k_r},f_{j'_1},\cdots,f_{j'_{n-r}})$, a soma sendo estendida a todas as $\sigma\in S_r$. Ora, o coeficiente entre parêntesis é evidentemente o determinante da matriz $r\times r$ (β_{st}) onde $\beta_{st}=\alpha_{k_s j_t}$. Este determinante é chamado o *menor* da matriz (α_{ij}) relativo à escolha das linhas $k_1<\cdots<k_r$ e colunas $j_1<\cdots<j_r$. Representaremos tal menor por $M\binom{k_1\cdots k_r}{j_1\cdots j_r}=$ $=M\binom{K}{J}$. Fazendo K percorrer todos os conjuntos $\{k_1,\cdots,k_r\}$ onde $k_1<\cdots<k_r$, temos

$$\Lambda(f_1,\cdots,f_n)=\rho_{J,J'}\sum_K M\binom{K}{J}\cdot\Lambda(e^{k_1},\cdots,e^{k_r},f_{j'_1},\cdots,f_{j'_{n-r}})$$

Procedendo de modo análogo com os argumentos $f_{j'_1},\cdots,f_{j'_{n-r}}$ obteremos:

$$\Lambda(f_1,\cdots,f_n)=\rho_{J,J'}\sum_{K,L} M\binom{K}{J}M\binom{L}{J'}\cdot$$
$$\cdot\Lambda(e^{k_1},\cdots,e^{k_r},e^{l_1},\cdots,e^{l_{n-r}})$$

onde L percorre todos os conjuntos $\{l_1,\cdots,l_{n-r}\}$ com $l_1<\cdots<l_{n-r}$. Mas, sendo Λ alternada, $\Lambda(e^{k_1},\cdots,e^{k_r},e^{l},\cdots,e^{l_{n-r}})$ é igual a zero se $L\neq K'$ ($=$ complementar de K) e $\Lambda(e^{k_1},\cdots,e^{k_r},e^{l_1},\cdots,e^{l_{n-r}})=$ $=\rho_{K,K'}\Lambda(e^1,\cdots,e^n)$ se $L=K'$. Portanto:

$$\Lambda(f_1,\cdots,f_n)=\left(\rho_{J,J'}\sum_K\rho_{K,K'}M\binom{K}{J}M\binom{K'}{J'}\right)\cdot$$
$$\cdot\Lambda(e^1,\cdots,e^n).$$

Comparando este resultado com (10), como $(e^1,\cdots,e^n)\neq 0$, temos

$$\det(\alpha_{ij})=\rho_{J,J'}\sum_K M\binom{K}{J}\cdot M\binom{K'}{J'} \tag{12}$$

e este é o desenvolvimento de LAPLACE do determinante de (α_{ij}) em relação às colunas $j_1<\cdots<j_r$. O menor $M\binom{K'}{J'}$, formado precisamente pelas linhas e colunas de (α_{ij}) que não entram na confecção de $M\binom{K}{J}$, chama-se o *menor complementar* de $M\binom{K}{J}$.

A fórmula (12) afirma então que, escolhidas as r colunas $j_1,\cdots,j_r$ da matriz (α_{ij}), o determinante de (α_{ij}) é a soma de todos os produtos que se obtêm multiplicando cada $r\times r$ menor extraído das r colunas escolhidas pelo menor complementar respectivo, cada um desses produtos sendo procedido de um sinal conveniente. Em particular, se escolhermos apenas uma coluna, (12) dá o desenvolvimento usual de um determinante segundo os elementos de uma coluna. Outra consequência de (11), muito útil nas aplicações, é que o determinante de uma matriz do tipo $\begin{pmatrix}A & B\\ O & C\end{pmatrix}$, onde A é $r\times r$, C é $(n-r)\times$ $\times(n-r)$ e 0 tem todos os elementos iguais a zero, é igual a $\det A.\det C$. (Basta escolher as colunas de A para o desenvolvimento de LAPLACE).

Usando o Teorema 3, obtemos um desenvolvimento de LAPLACE relativo a linhas.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. J. CARAÇA, Lições de Álgebra e Análise, 2.ª edição, Lisboa, 1945.

[2] SCHREIER & SPERNER, Modern Algebra and Matrix Theory, N. York, 1951.

[3] E. ARTIN, Galois Theory, Ann. Arbor, 1953.

[4] N. BOURBAKI, Algèbre, Chapitre III, Paris, 1948.

[5] N. BOURBAKI, Algèbre, Chapitre II, Paris, 1947.