Os espaços métricos e a análise clássica: o método do ponto fixo

(Conclusão)

§ 5. Sistemes lineares infinitos.

Consideremos o sistema linear infinito

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots = b_2 \\ \dots \qquad \dots \end{cases}$$

ou, abreviadamente,

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\, x_j = b_i \qquad (i=1,2,\cdots),$$

e procuremos uma sucessão $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ que, substituída nos primeiros membros das equações (1), os torne convergentes com somas dadas pelos segundos membros. A tal sucessão, caso exista, chamaremos *solução* do sistema (1).

TEOREMA. *O sistema* (1) *admite uma e uma só solução limitada sempre que se verifiquem as condições*

α) $\qquad a_{ii} \neq 0,$

β) $\qquad \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^{\infty} |a_{ij}| \leq q\, |a_{ii}|$ *com* $q < 1,$

γ) $\qquad |b_i| \leq B$

$\qquad (i=1,2,\cdots).$

Dem. A condição α) permite resolver a primeira equação em ordem a x_1, a segunda em ordem a x_2, etc. Obtém-se o sistema

$$(2) \qquad x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^{\infty} c_{ij}\, x_j + b_i \qquad (i=1,2,\cdots)$$

com $c_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$.

As fórmulas

$$(3) \qquad y_i = \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^{\infty} c_{ij}\, x_j + b_i \qquad (i=1,2,\dots)$$

permitem obter a partir de cada sucessão $x = \{x_i\}$ limitada, $|x_i| < M$ $(i=1,2,\cdots)$, uma nova sucessão $y = \{y_i\}$ que é também limitada:

$$|y_i| \leq \sum |c_{ij}|\, |x_j| + |b_i| \leq M \sum |c_{ij}| + B \leq M q + B,$$

em virtude das condições β) e γ).

As fórmulas (3) difinem portanto um operador U no espaço m das sucessões limitadas. E se pusermos $y^{(k)} = U(x^{(k)})$, $x^{(k)} = \{x_{kj}\}$, $y^{(k)} = \{y_{kj}\}$ $(k=1,2)$ será

$$\begin{aligned} \delta\,[U(x^{(1)}), U(x^{(2)})] = \delta\,(y^{(1)}, y^{(2)}) = \sup_i |y_{1i} - y_{2i}| &\leq \\ \leq \sup_i \sum |c_{ij}|\, |x_{1j} - x_{2j}| &\leq \\ \leq \sup_i \sum |c_{ij}| \sup_j |x_{1j} - x_{2j}| &\leq \\ \leq q\, \delta\,(x^{(1)}, x^{(2)}), & \end{aligned}$$

o que quer dizer que U é um operador de contracção no espaço métrico completo m. O seu ponto fixo será a solução limitada, única, a que se refere o teorema.

Cálculo aproximado da solução.

Construa-se por iteração sobre as fórmulas (3) a sucessão (de sucessões)

$$x^{(0)} = \{0\},\ x^{(1)} = \{b_i\},\ \cdots,\ x^{(n)} = \{\xi_{ni}\},\ \cdots.$$

Designando por $x = \{\xi_i\}$ a solução, tem-se

$$\delta\,(x^{(n)}, x) \leq \frac{B\, q^n}{1-q},$$

visto que na desigualdade (4) de § 3 é agora

$$\varkappa = \delta\,(x^{(1)}, x^{(0)}) = \sup |b_i| \leq B.$$

Além disso resulta de (3)

$$|y_i| \leq \sum |c_{ij}|\, |x_j| + B,$$

logo é

$$\sup |\xi_{1i}| \leq B,$$
$$\sup |\xi_{2i}| \leq B(1+q),$$
$$\cdots \quad \cdots$$
$$\sup_i |\xi_{ni}| \leq B(1+q+\cdots+q^{n-1}) \leq \frac{B}{1-q}.$$

Vimos no §2, (2) que $\xi_{ni} \to \xi_i$. Por conseseguinte,

$$|x| = \sup_i |\xi_i| \leq \frac{B}{1-q}.$$

Observação. Se todos os b_i são nulos, a única solução limitada do sistema (1) — nas condições do teorema — é a solução nula.

Notemos também que mesmo nas condições do teorema podem existir infinitas soluções não limitadas. É o caso do sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= a\, x_2 \\ x_2 &= a\, x_3 \\ &\cdots \\ x_n &= a\, x_{n+1}. \\ &\cdots \end{aligned} \qquad |a| < 1$$

que tem a solução não limitada $\left(\varkappa, \frac{\varkappa}{a}, \frac{\varkappa}{a^2}, \ldots\right)$ com a constante arbitrária $\varkappa$.

§ 6. Resolução da equação $f(x) = 0$ por iteração.

TEOREMA 1. *Seja* $y = \varphi(x)$ *uma função de domínio e contradomínio no espaço métrico completo* X, *que satisfaz as duas condições seguintes:*

$\alpha_1)$ $\quad \delta[\varphi(x), \varphi(x')] \leq q\,\delta(x, x')$ *com* $0 < q < 1$ *para quaisquer* x *e* x' *na vizinhança* X_1 *do ponto a definida por* $\delta(x, a) \leq \varepsilon$;

$\alpha_2)$ $\quad \delta[\varphi(a), a] \leq (1-q)\,\varepsilon$.

Então a equação

(1) $$x = \varphi(x)$$

admite uma e uma só solução x^* *na mesma vizinhança* X_1, *que é o limite da sucessão*

$$x_0 = a, \quad x_1 = \varphi(a), \quad \cdots, \quad x_n = \varphi(x_{n-1}), \cdots,$$

tendo-se

(2) $$\delta(x_n, x^*) \leq \varepsilon\, q^n.$$

Dem. A função $y = \varphi(x)$ define um operador U no subespaço X_1 de X. Com efeito, se $x \in X_1$, de $\alpha_1)$ e $\alpha_2)$ resulta

$$\begin{aligned} \delta(Ux, a) = \delta(\varphi(x), a) &\leq \delta(\varphi(x), \varphi(a)) + \delta(\varphi(a), a) \\ &\leq q\,\delta(x, a) + (1-q)\,\varepsilon \leq q\,\varepsilon + (1-q)\,\varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

logo também $Ux = \varphi(x) \in X_1$.

A condição $\alpha_1)$ mostra que U é um operador de contracção.

X_1 é um espaço métrico completo. Na verdade, toda a sucessão $\{x_n\}$ extraída de $X_1 \subset X$ que satisfaça a condição de CAUCHY tem um limite $x \in X$, uma vez que X é completo. E de $\delta(x_n, a) \leq \varepsilon$ resulta $\delta(x, a) \leq \delta(x, x_n) + \delta(x_n, a) \leq \delta(x, x_n) + \varepsilon$, o que implica $\delta(x, a) \leq \varepsilon$, isto é $x \in X_1$, se atendermos a que $\delta(x, x_n) \to 0$.

Em resumo, U é um operador de contracção no espaço métrico completo X_1; por consequência admite um e um só ponto fixo x^* em X_1: $Ux^* = \varphi(x^*) = x^*$. E tomando o ponto inicial $x_0 = a$, vem [§ 3, (4)]:

$$\delta(x_n, x^*) \leq k \frac{q^n}{1-q}$$

com $k = \delta(x_1, x_0) = \delta(\varphi(a), a) \leq (1-q)\,\varepsilon$, o que estabelece (2).

Exemplo: equação de KEPLER.

É a equação[1]

(3) $$x = e \operatorname{sen} x + M \qquad (0 < e < 1).$$

Neste caso X é o corpo real com a distância $\delta(x, y) = |x - y|$; e $\varphi(x) = e \operatorname{sen} x + M$.

Usando o teorema da média do cálculo diferencial, temos

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(x')| &= e\,|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x'| = \\ &= e\,|\cos x_1|\,|x - x'| \leq e\,|x - x'|; \end{aligned}$$

tem portanto lugar a condição $\alpha_1)$ com $q = e$ em qualquer vizinhança de um ponto arbitrário a, o que automàticamente assegura $\alpha_2)$ e garante a existência de uma e uma só raiz x^* de (3) em todo o intervalo $(-\infty, +\infty)$.

---

[1] Trata-se da equação que em Astronomia permite calcular a anomalia excêntrica x conhecidas a excentricidade e e a anomalia média M.

Mais precisamente, tomando $a=M$, asseguramos α_2) com $\varepsilon=\dfrac{1-e}{e}$, visto que

$$|\varphi(a)-a|=|\varphi(M)-M|=e\,|\operatorname{sen} M|\leq e\,.$$

E construída a sucessão

$$x_0=M\,,\ x_1=e\operatorname{sen} M+M\,,\cdots,\ x_n=e\operatorname{sen} x_{n-1}+M\,,\cdots$$

será

$$x^*=\lim_{n\to\infty} x_n\,,$$

tendo-se, usando (2),

$$|x^*-x_n|\leq\frac{e^{n+1}}{1-e}\,. \tag{4}$$

Pode porém calcular-se directamente um menor limite excedente do erro:

$$\begin{aligned}|x^*-x_n|&\leq e\,|\operatorname{sen} x^*-\operatorname{sen} x_{n-1}|\leq\\ &\leq e\,|\cos x_1|\,|x^*-x_{n-1}|\leq\\ &\leq e\,|x^*-x_{n-1}|\leq e^2\,|x^*-x_{n-2}|\leq\\ &\leq\cdots\leq e^n\,|x^*-x_0|\leq e^{n+1}\,,\end{aligned}$$

o que quer dizer que em (4) se pode substituir o segundo membro por e^{n+1}.

TEORÉMA 2. *Seja* $y=f(x)$ *uma função real de variável real que na vizinhanca* X_1 *do ponto* a *definida por* $|x-a|\leq\varepsilon$ *admite derivada (finita) e satisfaz as seguintes condições:*

β_1) $$|f(a)|<\varepsilon\,|f'(a)|\,,$$

β_2) $$\sup\left|1-\frac{f'(x)}{f'(a)}\right|\leq 1-\frac{1}{\varepsilon}\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|.$$

Então a equação $f(x)=0$ *admite uma e uma só raiz* x^* *na vizinhança* X_1, *tendo-se*

$$x^*=\lim_{n\to\infty} x_n$$

com

$$x_0=a\,,\ x_1=\varphi(x_0)\,,\ \cdots.\ x_n=\varphi(x_{n-1})\,,\cdots,$$

$$\varphi(x)=x-\frac{1}{f'(a)}f(x)$$

e

$$|x^*-x_n|\leq\varepsilon\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|\right)^n.$$

Dem. A condição β_1) garante $f'(a)\neq 0$ e com isso a possibilidade de construirmos a função $\varphi(x)$. Provemos que esta satisfaz as condições α_1) e α_2) do Teorema 1, onde X é agora o corpo real com a distância $\partial(x,y)=|x-y|$, desde que se tome

$$q=1-\frac{1}{\varepsilon}\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|.$$

É $q<1$ e β_1) garante $q>0$.

Pelo teorema da média do cálculo diferencial temos $f(x)-f(x')=f'(x_1)(x-x')$ com x_1 entre os pontos x e x' de X_1. Portanto,

$$\begin{aligned}|\varphi(x)-\varphi(x')|&=\left|x-x'-\frac{1}{f'(a)}\Big(f(x)-f(x')\Big)\right|\\ &=\left|1-\frac{f'(x_1)}{f'(a)}\right|\,|x-x'|\,,\end{aligned}$$

donde, usando β_2) e a definição de q,

$$|\varphi(x)-\varphi(x')|\leq q\,|x-x'|\qquad(0<q<1),$$

que é a condição α_1).

A condição α_2) é — com igualdade — a própria definição de q.

A função $\varphi(x)$ admite pois um ponto fixo x^* : $\varphi(x^*)=x^*$ e isto é o mesmo que $f(x^*)=0$.

Exemplo:

Seja $f(x)=x^3+2x-1$. Tomando $a={}^1/_2$ e $\varepsilon={}^1/_4$ tem-se $f(a)=\dfrac{1}{8}$, $f'(a)=\dfrac{11}{4}$ e $q=\dfrac{9}{11}$. O leitor poderá verificar que estes valores satisfazem β_1) e β_2). Por conseguinte, $f(x)$ admite no intervalo $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right]$ uma e uma só raiz x^*, que é um número irracional ($f(x)$ não admite raizes racionais), limite da sucessão de números racionais

$$x_0=\frac{1}{2}\,,\ \cdots,\ x_n=\varphi(x_{n-1})\,,\ \cdots,$$

$$\varphi(x)=x-\frac{4}{11}\,(x^3+2x-1)\,,$$

tendo-se

$$|x^*-x_n|\leq\frac{1}{4}\left(\frac{9}{11}\right)^n.$$

§ 7. A equação $y = \varphi(x,y)$ em espaços métricos abstractos.

Começaremos por generalizar a espaços métricos abstractos o exemplo (3) do § 2 de um espaço completo de funções contínuas.

Sejam x e y os elementos genéricos de dois espaços métricos X e Y com as métricas ρ e δ respectivamente. Consideremos uma função $y = \eta(x)$ com o domínio X e o contradomínio em Y. Por continuidade de $\eta(x)$ num ponto x entende-se que, dado $\varepsilon > 0$ e arbitrário, existe um número $\mu(\varepsilon) > 0$ tal que $\rho(x, x') < \mu(\varepsilon)$ implica $\delta(y, y') = \delta(\eta(x), \eta(x')) < \varepsilon$.

Suponhamos que Y é um espaço métrico completo e designe C o conjunto das funções $\eta(x)$ contínuas em todos os pontos $x \varepsilon X$. A função Δ definida neste conjunto por

$$\Delta(\eta, \eta_1) = \sup_{x \varepsilon X} \delta(\eta(x), \eta_1(x))$$

é uma função de distância.

Vamos provar que, com a distância Δ, o espaço métrico C é completo.

Seja então $\{\eta_n(x)\}$ uma sucessão de Cauchy em C. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma ordem $N(\varepsilon)$ a partir da qual se tem

$$\Delta(\eta_m, \eta_n) = \sup_{x \varepsilon X} \delta(\eta_m(x), \eta_n(x)) < \varepsilon$$

e portanto

$$\delta(\eta_m(x), \eta_n(x)) < \varepsilon \qquad (x \varepsilon X), \tag{1}$$

o que mostra que a sucessão $\eta_1(x), \cdots, \eta_n(x), \cdots$, satisfazendo a condição do Cauchy no espaço métrico completo Y, tem certo limite $\eta(x)$. E a sucessão converge uniformemente para este limite, porquanto resulta de (1)

$$\delta(\eta(x), \eta_n(x)) \leq \delta(\eta(x), \eta_m(x)) + \delta(\eta_m(x), \eta_n(x)) < \delta(\eta(x), \eta_m(x)) + \varepsilon,$$

donde, fazendo $m \to \infty$,

$$\delta(\eta(x), \eta_n(x)) \leq \varepsilon \qquad (x \varepsilon X). \tag{2}$$

Desta desigualdade e da continuidade das funções $\eta_n(x)$ resulta a continuidade da função $\eta(x)$, visto que

$$\delta(\eta(x), \eta(x')) \leq \delta(\eta(x), \eta_n(x)) + \delta(\eta_n(x), \eta_n(x')) + \delta(\eta_n(x'), \eta(x')).$$

Finalmente, mostra (2) que se tem

$$\Delta(\eta, \eta_n) = \sup_{x \varepsilon X} \delta(\eta(x), \eta_n(x)) \leq \varepsilon,$$

quer dizer, $\lim_{n \to \infty} \eta_n = \eta$ no espaço C.

O conjunto Z dos pares (x, y) com $x \varepsilon X$ e $y \varepsilon Y$ diz-se *produto* dos espaços X e Y. Escreve-se $Z = X \times Y$.

O teorema que vamos dar neste parágrafo refere-se a uma função $\varphi(x, y)$ de domínio no espaço produto $X \times Y$ e de contradomínio em Y.

Diz-se que a função $\varphi(x, y)$ é contínua num ponto (x, y) quando, dado $\varepsilon > 0$ e arbitrário, se tem

$$\delta(\varphi(x, y), \varphi(x', y')) < \varepsilon$$

sempre que $\rho(x, x') < \mu(\varepsilon)$ e $\delta(y, y') < \nu(\varepsilon)$.

Teorema. *Sejam* X *e* Y *espaços métricos, o segundo dos quais completo. Consideremos uma função* $\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ *de domínio em* $\mathrm{Z} = \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ *e contradomínio em* Y *nas seguintes condições:*

α_1) $\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ e' *definida e contínua na vizinhança* $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{X}_1 \times \mathrm{Y}_1$ *do ponto* $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \varepsilon \mathrm{Z}$ *definida por* $\rho(\mathrm{x}, \mathrm{a}) \leq \alpha$ *e* $\delta(\mathrm{y}, \mathrm{b}) \leq \beta$;

α_2) $\varphi(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \mathrm{b}$;

α_3) $\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ *satisfaz a condição de* Lipschitz

$$\delta(\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \varphi(\mathrm{x}, \mathrm{y}')) < \mathrm{q}\, \delta(\mathrm{y}, \mathrm{y}')$$

com $0 < \mathrm{q} < 1$ *para* $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \varepsilon \mathrm{Z}_1$ *e* $(\mathrm{x}, \mathrm{y}') \varepsilon \mathrm{Z}_1$.

Então existe uma e uma só função $\mathrm{y} = \Phi(\mathrm{x})$ *definida e contínua numa vizinhança* $\mathrm{X}_2 \subset \mathrm{X}_1$ *do ponto* a, *tal que* $\Phi(\mathrm{a}) = \mathrm{b}$, *e que na mesma vizinhança satisfaz a equação*

$$\mathrm{y} = \varphi(\mathrm{x}, \mathrm{y}). \tag{3}$$

Dem. Resulta de α_1) e α_2) que a função $\varphi(x, b)$ é contínua no ponto a e toma neste ponto o valor b. Será portanto

$$\delta(\varphi(x, b), b) < (1 - q)\, \beta \tag{4}$$

para todo o x pertencente a uma certa vizinhança X_2 do ponto a definida por $\rho(x, a) < \alpha' \leq \alpha$.

Consideremos o conjunto C_1 das funções contínuas $y = \eta(x)$ com domínio X_2, de contradomínio em Y_1— subespaço completo de Y— e tais que $\eta(a)=b$. Com a distância Δ, o conjunto C_1 é um espaço métrico completo, tal como o espaço C estudado acima e que o contém.

Vamos mostrar que a função de domínio X_2

$$\psi(x)=\varphi(x,\eta(x)) \tag{5}$$

é elemento do espaço C_1.

Temos $\psi(a)=b$. O contradomínio de $\psi(x)$ está contido em Y_1; é o que resulta de α_3) e de (4):

$$\begin{aligned}\delta(\psi(x),b)&=\delta[\varphi(x,\eta(x)),b]\leq\\ &\leq\delta[\varphi(x,\eta(x)),\varphi(x,b)]+\delta[\varphi(x,b),b]<\\ &<q\,\delta(\eta(x),b)+(1-q)\,\beta\leq q\,\beta+(1-q)\,\beta=\beta.\end{aligned}$$

Resta ainda mostrar que $\psi(x)$ é contínua em X_2. Dado $\varepsilon>0$, tem-se, supondo $x,x'\,\varepsilon\,X_2$ e $y'\,\varepsilon\,Y_1$,

$$\delta[\varphi(x,\eta(x)),\varphi(x',y')]<\varepsilon,$$

desde que $\rho(x,x')<\mu'(\varepsilon)$ e $\delta(\eta(x),y')<\nu(\varepsilon)$— e isto em virtude da continuidade de $\varphi(x,y)$ no ponto $(x,\eta(x))$. Por outro lado, sendo $\eta(x)$ contínua, é

$$\delta(\eta(x),\eta(x'))<\nu(\varepsilon)$$

para $\rho(x,x')<\mu''(\varepsilon)$. Designe $\mu(\varepsilon)$ o menor dos inteiros μ' e μ''; $\rho(x,x')<\mu(\varepsilon)$ implica então

$$\delta[\varphi(x,\eta(x)),\varphi(x',\eta(x'))]<\varepsilon,$$

isto é,

$$\delta(\psi(x),\psi(x'))<\varepsilon,$$

o que prova a continuidade de $\psi(x)$ em X_2.

Posto isto, podemos concluir que a definição (5) de $\psi(x)$ é uma transformação U no espaço métrico completo C_1. Para estabelecer o teorema a partir do teorema de BANACH só falta verificar se U é um operador de contracção. Mas é o que resulta de α_3):

$$\begin{aligned}\Delta(U(\eta),U(\eta_1))&=\Delta[\varphi(x,\eta(x)),\varphi(x,\eta_1(x))]=\\ &=\sup_{x\,\varepsilon\,X_1}\delta[\varphi(x,\eta(x)),\varphi(x,\eta_1(x))]<\\ &<\sup_{x\,\varepsilon\,X_1}q\,\delta(\eta(x),\eta_1(x))=q\,\Delta(\eta,\eta_1),\end{aligned}$$

com $0<q<1$.

Cálculo aproximado de $\Phi(\mathrm{x})$.

Tomando o ponto inicial $\eta_0(x)=b$, a sucessão

$$\eta_0(x)=b,\cdots,\eta_n(x)=\varphi(x,\eta_{n-1}(x)),\cdots$$

converge no espaço C_1 para a solução $\Phi(x)$, quer dizer

$$\lim_{n\to\infty}\Delta(\Phi,\eta_n)=0.$$

Tomando a iteração $\eta_n(x)$ como aproximação de $\Phi(x)$, o limite excedente do erro será dado pelo segundo membro da desigualdade

$$\Delta(\Phi,\eta_n)\leq\beta q^n,$$

a qual se obtém de (4), § 3 calculando k e usando (4):

$$k=\Delta(\eta_1,\eta_0)=\sup_{x\,\varepsilon\,X_2}\delta(\varphi(x,b),b)\leq(1-q)\,\beta.$$

§ 8. Sistemas de equações diferenciais.

TEOREMA. *Seja*

$$\frac{d\,y_i}{d\,x}=f(x,y_1,\cdots,y_n)\qquad(i=1,\cdots,n) \tag{1}$$

um sistema de n *equações diferenciais ordinárias resolvido em ordem às derivadas e suponhamos que para*

$$\begin{aligned}&|x-a|\leq\alpha,\\ &|y_i-b_i|\leq\beta\qquad(i=1,\cdots,n)\end{aligned}$$

as n *funções* f_i *são contínuas e satisfazem a condição de* LIPSCHITZ

$$\begin{aligned}&|f_i(x,y_1,\cdots,y_n)-f_i(x,y'_1,\cdots,y'_n)|<\\ &<K(|y_1-y'_1|+\cdots+|y_n-y'_n|)\quad(i=1,\cdots,n).\end{aligned} \tag{2}$$

Existe então um e um só sistema de n *funções contínuas* $y_i=\varphi_i(x)$ $(i=1,\cdots,n)$ *que verificam identicamente o sistema* (1) *para* $|x-a|\leq\alpha'<\alpha$ *e tais que* $\varphi_i(a)=b_i$ $(i=1,\cdots,n)$.

Dem. O sistema (1) com as condições iniciais $y_i(a)=b_i$ é equivalente a este outro

$$y_i=b_i+\int_a^x f_i(t,y_1,\cdots,y_n)\,dt \tag{3}$$

onde, é claro, $|x-a|\leq\alpha$.

Introduzamos o espaço K_1 da variável x e o espaço K_n das matrizes-colunas

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Definamos a função, de domínio em $K_1 \times K_n$ e contradomínio em K_n, equivalente aos segundos membros de (3),

$$\varphi(x,y)=b+f(x,y) \tag{4}$$

onde

$$b=\begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}, \qquad f=\begin{bmatrix} \int_a^x f_1\,dt \\ \cdots \\ \int_a^x f_n\,dt \end{bmatrix}.$$

Vamos mostrar que a função (4) satisfaz as condições α_1), α_2) e α_3) do teorema do § anterior na vizinhança $X_1 \times Y_1$ do ponto (a,b) do espaço $K_1 \times K_n$ definida pelas desigualdades

$$|x-a| \le \alpha_1, \qquad |y-b| \le \beta \tag{5}$$

na primeira das quais se fixa α_1 mediante a condição

$$\alpha_1 < \min\left\{\alpha, \frac{1}{Kn}\right\}. \tag{6}$$

Começemos por verificar a continuidade de $\varphi(x,y)$. Recordando a definição de distância em K_n (§ 2), temos:

$$|\varphi(x,y)-\varphi(x',y')|=|f(x,y)-f(x',y')|=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left|\int_a^x f_i(t,y_1,\cdots,y_n)\,dt-\int_a^{x'} f_i(t,y'_1,\cdots,y'_n)\,dt\right|=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left|\int_a^x [f_i(t,y_1,\cdots,y_n)-f_i(t,y'_1,\cdots,y'_n)]\,dt-\right.$$
$$\left.-\int_x^{x'} f_i(t,y'_1,\cdots,y'_n)\,dt\right|\le$$
$$\le\sum_{i=1}^{n}\left|\int_a^x f_i(t,y_1,\cdots,y_n)-f_i(t,y'_1,\cdots,y'_n)\,dt\right|+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left|\int_x^{x'} f_i(t,y'_1,\cdots,y'_n)\,dt\right|<$$
$$<Kn|x-a|(|y_1-y'_1|+\cdots,+|y_n-y'_n|)+$$
$$+nM|x-x'|,$$

utilizando a condição de Lipschitz (2) e designando por M o maior dos supremos das funções f_i para $|x-a|\le\alpha$ e $|y_i-b_i|\le\beta$. Com ε positivo e arbitrário, virá, como queríamos,

$$|\varphi(x,y)-\varphi(x',y')|<\varepsilon$$

desde que, sempre na vizinhança $X_1 \times Y_1$,

$$|y_i-y'_i|<\frac{\varepsilon}{2Kn^2\alpha_1}, \qquad |x-x'|<\frac{\varepsilon}{2nM}.$$

A verificação da condição α_2) resulta da definição (4) de $\varphi(x,y)$ e de ser $f(a,b)=0$.

Passemos a α_3). Pelo primeiro teorema da média do cálculo integral temos

$$\varphi(x,y)-\varphi(x,y')=f(x,y)-f(x,y')=$$
$$=\begin{bmatrix} \int_a^x [f_1(t,y_1,\cdots,y_n)-f_1(t,y'_1,\cdots,y'_n)]\,dt \\ \cdots \\ \int_a^x [f_n(t,y_1,\cdots,y_n)-f_n(t,y'_1,\cdots,y'_n)]\,dt \end{bmatrix}=$$
$$=(x-a)\begin{bmatrix} f_1(x_1,y_1,\cdots,y_n)-f_1(x_1,y'_1,\cdots,y'_n) \\ \cdots \\ f_n(x_n,y_1,\cdots,y_n)-f_n(x_n,y'_1,\cdots,y'_n) \end{bmatrix},$$

designando por $x_1,\cdots,x_n$ valores convenientes de t entre a e x. De (2) resulta então

$$|\varphi(x,y)-\varphi(x,y')|<Kn|x-a|y-y'|\le q|y-y'|$$

se pusermos, atendendo a (5),

$$q=Kn\alpha_1. \tag{7}$$

Mostra (6) que é $q<1$ (além de ser $q>0$), logo a condição α_3) está verificada.

De acordo com o teorema do § anterior existe por conseguinte uma e uma só função de domínio em K_1 e contradomínio em K_n

$$y=\varphi(x)=\begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n(x) \end{bmatrix}$$

contínua numa vizinhança $X_2 \subset X_1$ do ponto a definida por $|x-a|\le\alpha'\le\alpha_1<\alpha$ que verifica identicamente a equação

$$y=\varphi(x,y),$$

equivalente às n equações (3), e tal que

$\varphi(a) = b$, isto é, $\varphi_i(a) = b_i$ $(i = 1, \cdots, n)$. O teorema está provado.

Cálculo aproximado das funções $\varphi_i(x)$. A função $\varphi_i(x)$ é o limite da sucessão

$$\varphi_i^{(0)}(x) = b_i$$

$$\varphi_i^{(1)}(x) = b_i + \int_a^x f_i(t, b_1, \cdots, b_n)\, dt$$

$$\cdots$$

$$\varphi_i^{(m)}(x) = b_i + \int_a^x f_i[t, \varphi_1^{(m-1)}(x), \cdots, \varphi_n^{(m-1)}(x)]\, dt$$

$$\cdots$$

Designe $\varphi^{(m)}(x)$ a matriz-coluna das n funções $\varphi_i^{(m)}(x)$. Para $|x - a| \leq \alpha'$ temos

$$(8) \qquad |\varphi(x) - \varphi^{(m)}(x)| \leq k \frac{q^m}{1-q}$$

com

$$k = |\varphi^{(1)}(x) - \varphi^{(0)}(x)| = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_a^x f_i(t, b_1, \cdots, b_n)\, dt \right| \leq M n \alpha'.$$

Usando (7) pode pois escrever-se (8) com a forma

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(x) - \varphi_i^{(m)}(x)| \leq \frac{M\, k^m\, (n\,\alpha')^{m+1}}{1 - k\, n\, \alpha_1}.$$

É evidente que o primeiro membro de (9) pode ser substituído por $\sup|\varphi_i(x) - \varphi_i^{(m)}(x)|$ para $|x - a| \leq \alpha'$. Concluímos que a função $\varphi_i(x)$ é o limite da sucessão uniformemente convergente $\varphi_i^{(m)}(x)$, na vizinhança $|x - a| \leq \alpha'$.

§ 9. Funções implícitas.

Teorema. *Seja*

$$(1) \qquad f_i(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n) = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

um sistema de n *equações contendo as* m + n *variáveis reais* $x_1, \cdots, y_n$ *e suponhamos que têm lugar as condições:*

β_1) *o sistema é verificado pelos valores*

$$x_i = a_i \quad (i = 1, \cdots, m), y_i = b_i (i = 1, \cdots, n),$$

isto é,

$$f_i(a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_n) = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n);$$

β_2) *as* n *funções* f_i *possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em relação às* m + n *variáveis para*

$$|x_i - a_i| \leq \alpha \quad (i = 1, \cdots, m)$$
$$|y_i - b_i| \leq \beta \quad (i = 1, \cdots, n);$$

β_3) det $M \neq 0$, *sendo*

$$M = \left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right]_{\substack{x_i = a_i \\ y_i = b_i}}$$

a matriz das derivadas parciais $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$ *calculada para* $x_i = a_i$, $y_i = b_i$.

Então existe um e um só sistema de funções

$$y_i = \Phi_i(x_1, \cdots, x_m) \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

contínuas [1] *para* $|a_i - a_i| \leq \alpha' \leq \alpha$, *que verificam identicamente o sistema* (1) *e tais que*

$$(2) \qquad \varphi_i(a_1, \cdots, a_m) = b_i \qquad (i = 1, \cdots, n).$$

Dem. Introduzamos os espaços K_m e K_n das matrizes-colunas

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}$$

e seja $f(x, y)$ a matriz, em K_n, das n funções f_i.

Definamos a função de domínio em $K_m \times K_n$ e contradomínio em K_n

$$(3) \qquad \varphi(x, y) = y - M^{-1} f(x, y)$$

e mostremos que ela satisfaz as condições α_1), α_2) e α_3) do teorema do § 7 numa vizinhança conveniente do ponto $(a, b) \in K_m \times K_n$.

Da continuidade das funções f_i, garantida por β_2), resulta, como fàcilmente se verifica, a continuidade da função $\varphi(x, y)$ para $|x - a| \leq \alpha$, $|y - b| \leq \beta$.

De β_1), ou seja de $f(a, b) = 0$, resulta $\varphi(a, b) = b$, que é a condição α_2).

Abordemos a condição de Lipschitz α_3).

Pelo teorema da média do cálculo diferencial,

$$f_i(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n) - f_i(x_1, \cdots, x_m, y_1', \cdots, y_n') = $$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)^* (y_j - y_j') \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

indicando o asterisco que cada derivada é

[1] e deriváveis; mas omitimos a demonstração da derivabilidade, que pode ver-se na primeira das obras adiante indicadas.

calculada para $x_1, \cdots, x_m$ e para um valor de y_j entre y_j e y'_j. Em K_n as fórmulas anteriores condensam-se em

$$f(x,y) - f(x,y') = M_1(y-y'),$$

designando M_1 a matriz de elementos $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)^*$. Pondo $M_1 = M + M_2$ vem

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) - \varphi(x,y') &= y - y' - M^{-1}[f(x,y) - f(x,y')] = \\ &= y - y' - M^{-1}(M+M_2)(y-y') \\ &= -M^{-1}M_2(y-y').\end{aligned}$$

Em virtude de β_2) os elementos da matriz $M_2 = M_1 - M$ podem tomar-se arbitràriamente pequenos desde que se escolham os y'_j suficientemente próximos dos y_j. Fixado um número positivo $q<1$ pode pois conseguir-se que os elementos da matriz $-M^{-1}M_2$ saiam de valor absoluto inferior a q/n^2 numa vizinhança $X_1 \times Y_1$ definida por

$$|x-a| \leq \alpha \quad , \quad |y-b| \leq \beta_1 \leq \beta .$$

Nesta mesma vizinhança será então

$$|\varphi(x,y) - \varphi(x,y')| < q\,|y-y'| \qquad (0<q<1)$$

que é α_3) com lugar em $X_1 \times Y_1$.

Posto isto, o teorema do § 7 garante a existência de uma e uma só função contínua

$$y = \Phi(x) = \begin{bmatrix} \Phi_1(x_1, \cdots, x_m) \\ \cdots \\ \Phi_n(x_1, \cdots, x_m) \end{bmatrix},$$

isto é, de um sistema de funções contínuas

$$y_i = \Phi_i(x_1, \cdots, x_m) \qquad (i = 1, \cdots, n),$$

que numa vizinhança $X_2 \subset X_1$ do ponto a definida por $|x_i - a_i| \leq \alpha' \leq \alpha \quad (i = 1, \cdots, m)$ satisfaz identicamente a equação $y = \varphi(x,y)$ ou seja $f(x,y) = 0$, ou ainda as equações (1). Além disso, $\Phi(a) = b$, que é o mesmo que (2).

O teorema está provado.

Exercício. Indique como se efectua o cálculo aproximado das funções Φ_i e mostre que a convergência das sucessões aproximantes é uniforme.

BIBLIOGRAFIA

G. Aumann, *Reelle Funktionen* (Berlim, 1954)

I. P. Natanson, *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen* (Berlim, 1954)

Máximos e mínimos de algumas funções algébricas

por *Manuel Joaquim Sousa Ventura*

Desde o primeiro número da sua publicação que a *Gazeta de Matemática* tem incluído nos seus programas uma rubrica cujos fins didáticos se têm distinado a *bem servir* os interesses dos candidatos à admissão ás Escolas Superiores.

A Gazeta procurará desenvolver mais intensamente e alimentar com mais assiduidade uma secção dedicada aos alunos do Ensino Médio, e aos pré-universitários, procurando, assim, diminuir, na medida do possível, a distância que separa o plano liceal do plano universitário.

*

A presente exposição — **Máximos e Mínimos de Algumas Funções Algébricas** — é dirigida em especial aos estudantes do 3.º ciclo e nada de novo apresentará; mas tentaremos imprimir-lhe algo de pessoal na arrumação dos assuntos, do ponto de vista didático.

Antes de levarmos alguns conhecimentos teóricos à aplicação de casos concretos, enunciaremos seis proposições e faremos as respectivas demonstrações.