calculada para $x_1, \cdots, x_m$ e para um valor de y_j entre y_j e y'_j. Em K_n as fórmulas anteriores condensam-se em

$$f(x,y) - f(x,y') = M_1(y-y'),$$

designando M_1 a matriz de elementos $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)^*$. Pondo $M_1 = M + M_2$ vem

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) - \varphi(x,y') &= y - y' - M^{-1}[f(x,y) - f(x,y')] = \\ &= y - y' - M^{-1}(M+M_2)(y-y') \\ &= -M^{-1}M_2(y-y').\end{aligned}$$

Em virtude de β_2) os elementos da matriz $M_2 = M_1 - M$ podem tomar-se arbitràriamente pequenos desde que se escolham os y'_j suficientemente próximos dos y_j. Fixado um número positivo $q < 1$ pode pois conseguir-se que os elementos da matriz $-M^{-1}M_2$ saiam de valor absoluto inferior a q/n^2 numa vizinhança $X_1 \times Y_1$ definida por

$$|x-a| \leq \alpha \quad , \quad |y-b| \leq \beta_1 \leq \beta.$$

Nesta mesma vizinhança será então

$$|\varphi(x,y) - \varphi(x,y')| < q\,|y-y'| \qquad (0 < q < 1)$$

que é α_3) com lugar em $X_1 \times Y_1$.

Posto isto, o teorema do § 7 garante a existência de uma e uma só função contínua

$$y = \Phi(x) = \begin{bmatrix}\Phi_1(x_1, \cdots, x_m) \\ \cdots \\ \Phi_n(x_1, \cdots, x_m)\end{bmatrix},$$

isto é, de um sistema de funções contínuas

$$y_i = \Phi_i(x_1, \cdots, x_m) \qquad (i = 1, \cdots, n),$$

que numa vizinhança $X_2 \subset X_1$ do ponto a definida por $|x_i - a_i| \leq \alpha' \leq \alpha \quad (i = 1, \cdots, m)$ satisfaz identicamente a equação $y = \varphi(x,y)$ ou seja $f(x,y) = 0$, ou ainda as equações (1). Além disso, $\Phi(a) = b$, que é o mesmo que (2).

O teorema está provado.

Exercício. Indique como se efectua o cálculo aproximado das funções Φ_i e mostre que a convergência das sucessões aproximantes é uniforme.

BIBLIOGRAFIA

G. Aumann, *Reelle Funktionen* (Berlim, 1954)

I. P. Natanson, *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen* (Berlim, 1954)

Máximos e mínimos de algumas funções algébricas

por Manuel Joaquim Sousa Ventura

Desde o primeiro número da sua publicação que a *Gazeta de Matemática* tem incluído nos seus programas uma rubrica cujos fins didáticos se têm distinado a *bem servir* os interesses dos candidatos à admissão ás Escolas Superiores.

A Gazeta procurará desenvolver mais intensamente e alimentar com mais assiduidade uma secção dedicada aos alunos do Ensino Médio, e aos pré-universitários, procurando, assim, diminuir, na medida do possível, a distância que separa o plano liceal do plano universitário.

*

A presente exposição — **Máximos e Mínimos de Algumas Funções Algébricas** — é dirigida em especial aos estudantes do 3.º ciclo e nada de novo apresentará; mas tentaremos imprimir-lhe algo de pessoal na arrumação dos assuntos, do ponto de vista didático.

Antes de levarmos alguns conhecimentos teóricos à aplicação de casos concretos, enunciaremos seis proposições e faremos as respectivas demonstrações.

O aluno deverá ter bem presente a noção de função, de continuidade de função, de máximo e de mínimo.

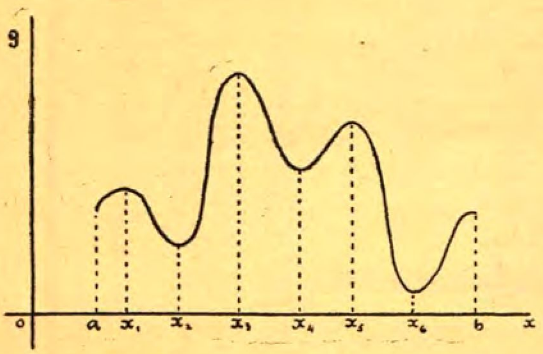
Porém, por conveniência do objectivo a que se destina o presente trabalho, sublinharemos a diferença que existe entre o conceito de *Máximo* e *Mínimo absolutos*, e o conceito de *Máximo* e *Mínimo relativos*.

Chama-se *Máximo absoluto* da função $f(x)$ no intervalo (a, b) ao limite superior dos valores que $f(x)$ assume nesse intervalo.

Anàlogamente, *Mínimo absoluto* de $f(x)$ em (a, b) é o limite inferior dos valores que $f(x)$ assume em (a, b). Diz-se então que *extremos absolutos* são os máximos e os mínimos absolutos.

Sendo $a < x_1 < b$, se o valor $f(x_1)$ é um extremo absoluto (máximo ou mínimo) de $f(x)$ nalguma vizinhança $I(x_1, e)$, diz-se que $f(x_1)$ é um *extremo local* ou *extremo relativo* de $f(x)$ no intervalo (a, b) (máximo ou mínimo, conforme o caso).

Extremo absoluto, assumido num ponto interior do intervalo (a, b), é também extremo relativo, claro. Seja, para exemplo, $y=f(x)$ uma função cuja imagem geométrica é representada pela curva da figura junta: $f(x_1)$ e $f(x_5)$ são máximos relativos; $f(x_2)$ e $f(x_4)$ são mínimos relativos.



Em x_3 apresenta $f(x)$ um *máximo absoluto* (que é também um máximo relativo) e em x_6 um *mínimo absoluto* (que é também um mínimo relativo) pois $f(x_3)$ e $f(x_6)$ são, respectivamente, o maior e o menor dos valores que $f(x)$ assume em (a, b).

Outro exemplo:

A função $f(x) = 2x$ assume no invervalo $(1, 2)$, o mínimo absoluto $f(1) = 2$ e o máximo absoluto $f(2) = 4$.

$f(x) = 2x$ não apresenta extremos relativos em $(1, 2)$; a função é aí *pontualmente crescente*.

No estudo que vai seguir-se, sòmente trataremos de *extremos absolutos*.

α) *O produto de dois factores variáveis, positivos, e de soma constante, atinge o seu valor máximo quando os factores forem iguais.*

(Sendo possível a sua igualdade).

Sejam x e y dois factores positivos e tais que $x + y = a$ (constante).

O valor máximo do seu produto $P = x \cdot y$ tem lugar quando $x = y$.

Com efeito, sendo

$$4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2 = a^2 - (x-y)^2$$

verifica-se que o máximo valor do produto $x \cdot y$ é atingido simultâneamente com o mínimo de $(x - y)^2$ ou seja para $x = y$ ($x > 0$ e $y > 0$).

À mesma conclusão se poderá chegar utilizando as propriedades do trinómio do 2.º grau:

Para isso considere-se ainda $x + y = a$ (constante) e $x \cdot y = P$; teremos, pois, x e y como raízes da equação

$$X^2 - aX + P = 0 \tag{1}$$

cujo binómio discriminante (Δ) deverá ser positivo ou nulo para se atender à positividade obrigatória de x e de y (x e y reais). Então é

$$\Delta = a^2 - 4P \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad 4P \leqslant a^2 \quad \text{ou, ainda,} \quad P \leqslant \frac{a^2}{4}.$$

$\dfrac{a^2}{4}$ é o valor máximo do produto $P = x \cdot y$

e, com $P = \dfrac{a^2}{4}$ a equação (1) apresenta, pois, a raiz dupla $x = y$.

Exemplo I: Calcular o valor máximo de

$$f(x) = (1+x)(2-x), \text{ sendo } [0 < x < 2]$$

Como é $(1+x)+(2-x)=3=$ constante, $f(x)$ atinge o seu valor máximo para

$$1+x=2-x \text{ ou } 2x=1 \text{ ou } x=1/2;$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$$

é o máximo procurado.

β) *O produto de vários factores variáveis, positivos, e de soma constante, atinge o seu valor máximo quando esses factores forem iguais entre si.*

Se é
$x+y+z+\cdots+t=c$ (constante)
e se $(x, y, z, \cdots, t > 0)$
então é

(1) $P = x\cdot y\cdot z\cdots t$ máximo com $x=y=z=\cdots=t$

Se no produto $P=x\cdot y\cdot z\cdots t$ existirem factores desiguais, é fácil aumentar o seu produto parcial conservando constante a sua respectiva soma.

Com efeito, seja $y \neq z$, por exemplo. Substitua-se o factor y por $\frac{y+z}{2}$ e o factor z por $\frac{y+z}{2}$. A soma $y+z$ não é alterada por esta substituição, pois $\frac{y+z}{2}+\frac{y+z}{2}=y+z$ e o produto $y\cdot z$ atinge, desta maneira, o seu valor máximo, que é

$$\frac{(y+z)}{2}\cdot\frac{(y+z)}{2}=\frac{(y+z)^2}{4}\text{*}$$

Com a igualdade dos possíveis pares de factores desiguais de (1), e sem alterar a soma desses mesmos factores, consegue levar-se o produto $P=x\cdot y\cdot z\cdots t$ a atingir o seu valor máximo e, portanto, a concluir-se a afirmação da proposição β).

* Veja a demonstração da proposição α), segundo as propriedades do trinómio do 2.º grau.

γ) *Se a soma de vários factores positivos, é contante o produto destes factores afectados de expoentes racionais positivos é máximo quando estes factores forem proporcionais aos seus respectivos expoentes.*

Seja $x+y+z=c$ (constante)
Pretende-se demonstrar que o valor máximo do produto $P=x^{r/d}\cdot y^{s/d}\cdot z^{t/d}$
é atingido quando

$$\frac{x}{\frac{r}{d}}=\frac{y}{\frac{s}{d}}=\frac{z}{\frac{t}{d}}$$

$(r, s, t, d > 0,$ inteiros$)$

(1) Sendo $P=x^{r/d}\cdot y^{s/d}\cdot z^{t/d}$ é, também, $P=\sqrt[d]{x^r\cdot y^s\cdot z^t}$. O valor máximo de P verificar-se-á simultâneamente com o valor máximo do produto

(2) $P_1 = x^r y^s z^t$ (x, y e z factores positivos).

Determinemos em que condições se verificará o máximo de (2):

O máximo de $P_1=x^r y^s z^t$ verificar-se-á com o máximo de $P_2=k\,x^r y^s z^t$, se k for uma constante.

Fazendo $k=r^{-r}\cdot s^{-s}\cdot t^{-t}$, vem

(3) $$P_2=(r^{-r}s^{-s}t^{-t})\cdot x^r y^s z^t=\left(\frac{x}{r}\right)^r\left(\frac{y}{s}\right)^s\left(\frac{z}{t}\right)^t=$$
$$=\frac{x}{r}\cdot\frac{x}{r}\cdots\frac{x}{r}\cdot\frac{y}{s}\cdot\frac{y}{s}\cdots\frac{y}{s}\cdot\frac{z}{t}\cdot\frac{z}{t}\cdots\frac{z}{t},$$

produto de factores cuja soma

$$\frac{x}{r}+\frac{x}{r}+\cdots+\frac{x}{r}+\frac{y}{s}+\frac{y}{s}+\cdots+\frac{y}{s}+\frac{z}{t}+$$
$$+\frac{z}{t}+\cdots+\frac{z}{t}=\frac{rx}{r}+\frac{sy}{s}+\frac{tz}{t}=x+y+z$$

é constante, por hipótese.

Mas, segundo β), o valor máximo do produto (3), [ou de (2) ou de (1) portanto], será atingido quando

$$\frac{x}{r}=\frac{y}{s}=\frac{z}{t}$$

Multiplicando as igualdades anteriores por d, vem

$$\frac{dx}{r}=\frac{dy}{s}=\frac{dz}{t}$$

ou

$$\frac{\frac{x}{r}}{d}=\frac{\frac{y}{s}}{d}=\frac{\frac{z}{t}}{d}$$

c. d. d.

Exemplo II: Determinar o valor máximo da função

$$f(x)=x^2(2-x) \quad \text{com} \quad (0<x<2)$$

Tendo em consideração que $x+(2-x)=2=$ constante, $f(x)$ atinge o seu valor máximo para

$$\frac{x}{2}=2-x \quad \text{donde se deduz} \quad x=4/3\,;$$

$$f(4/3)=(4/3)^2\left(2-\frac{4}{3}\right)=\frac{16}{9}\cdot\frac{2}{3}=\frac{32}{27}$$

é o máximo de $f(x)$.

α_1) *O mínimo da soma de dois termos variáveis, positivos, e de produto constante, verifica-se com a igualdade desses termos* (caso possam ser iguais).

Se $P=x\cdot y$ é constante, será $(x+y)$ mínimo para $x=y$ (x e $y>0$).

Com efeito, sendo $P=x\cdot y$ e $x+y=s$, o trinómio

(1) $$X^2-sX+P$$

terá x e y como zeros; e dada a natureza real de x e y, terá de ser o binómio discriminante (Δ) de (1) positivo ou nulo:

$$\Delta=s^2-4P\geqslant 0 \quad \text{ou} \quad s\geqslant 2\sqrt{P}$$

Com $s=2\sqrt{P}$ (mínimo de s), o trinómio é quadrado perfeito, e apresenta o zero duplo

$$x=y.$$

Vejamos outro caminho:

É

$$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$$

ou

$$(x+y)^2=(x-y)^2+4P \quad (P=x\cdot y, \text{ por hipótese})$$

O mínimo de $(x+y)$, ou o de $(x+y)^2$, aparece com o mínimo de $(x-y)^2$, isto é, para

$$x=y$$

visto que $x>0\,,y>0$, também por hipótese.

Exemplo III: Calcular o valor mínimo de

$$f(x)=\frac{1}{x}+x \quad (x>0).$$

Sendo $\frac{1}{x}\cdot x=1=$ constante, o mínimo será atingido para

$$\frac{1}{x}=x, \text{ donde}$$

$$x^2=1 \quad \text{ou} \quad x=\pm 1$$

$$f(1)=\frac{1}{1}+1=2 \quad \text{é o mínimo.}$$

β_1) *Se o produto de vários termos variáveis, positivos, é constante, o mínimo da sua soma verifica-se quando esses termos forem iguais entre si.*

Se é $x\cdot y\cdot z\cdots t=c$ (constante) e se $(x\,,y\,,z\,,\cdots t>0)$ será

(1) $S=x+y+z+\cdots+t$ mínimo para $x=y=z=\cdots=t$.

Com efeito, enquanto existirem parcelas distintas é fácil diminuir a sua soma (conservando constante o seu produto parcial), por meio de substituição adequada: Consideremos, então $x\neq y$, por exemplo, e substituam-se x e y pela média geométrica entre x e y, isto é, por $\sqrt{x\cdot y}$.

Temos, $x\to\sqrt{x\cdot y}$ e $y\to\sqrt{x\cdot y}$.

O produto mantém-se inalterado, pois

$$\sqrt{x\cdot y}\cdot\sqrt{x\cdot y}=x\cdot y$$

e a soma atinge, assim, o seu valor mínimo

$$2\sqrt{x\cdot y}\,*$$

Deste modo, com a igualdade das possíveis parcelas distintas de (1), conseguiu levar-se a referida soma, $x+y+z+\cdots+t$, a atingir o valor mínimo e, portanto, a concluir-se a afirmação expressa em β_1).

Por outra via se pode ver que é

(2) $$x+y\geqslant 2\sqrt{x\cdot y}.$$

De facto, se é

$$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$$

* Veja a demonstração de α_1), segundo as propriedades do trinómio do 2.º grau.

é, também,

$$(x+y)^2 \geqslant 4\,x \cdot y$$

ou

$$(x-y)^2 \geqslant 0 \quad (x>0 \text{ e } y>0)$$

cuja evidência impõe a veracidade de (2)

γ_1) *Se é constante o produto das potências de expoente racional e positivo de vários factores variáveis, positivos, o valor mínimo da soma desses factores tem lugar quando os factores forem proporcionais aos seus respectivos expoentes.*

Seja o produto

$$P = x^{r/d} \cdot y^{s/d} \cdot z^{t/d} = c \quad \text{(constante).}$$

O valor mínimo da soma

$$x+y+z$$

é atingido para

$$\frac{x}{\frac{r}{d}} = \frac{y}{\frac{s}{d}} = \frac{z}{\frac{t}{d}} \quad (r, s, t, d > 0, \text{ inteiros}).$$

Sendo

(1) $P = x^{r/d} \cdot y^{s/d} \cdot z^{t/d} =$ constante é, também $P = \sqrt[d]{x^r \cdot y^s \cdot z^t} = c^{te}$ e, consequentemente, é

(2) $P_1 = x^r \cdot y^s \cdot z^t =$ constante (x, y e z factores variáveis, positivos).

Se o produto (2) é constante também é constante

(3) $P_2 = k\, x^r\, y^s\, z^t$ se k for uma constante.

Fazendo $k = r^{-r}\, s^{-s}\, t^{-t}$, vem

$$P_2 = (r^{-r}\, s^{-s}\, t^{-t})\, x^r\, y^s\, z^t = \left(\frac{x}{r}\right)^r \cdot \left(\frac{y}{s}\right)^s \cdot \left(\frac{z}{t}\right)^t =$$

$$= \frac{x}{r} \cdot \frac{x}{r} \cdots \frac{x}{r} \cdot \frac{y}{s} \cdot \frac{y}{s} \cdots \frac{y}{s} \cdot \frac{z}{t} \cdot \frac{z}{t} \cdots \frac{z}{t} = C^{te}.$$

Mas, segundo β_1), sendo o produto constante, o mínimo da soma dos factores

$$\frac{x}{r} + \frac{x}{r} + \cdots + \frac{x}{r} + \frac{y}{s} + \frac{y}{s} + \cdots + \frac{y}{s} + \frac{z}{t} +$$

$$+ \frac{z}{t} + \cdots + \frac{z}{t}$$

verifica-se para

$$\frac{x}{r} = \frac{y}{s} = \frac{z}{t};$$

multiplicando as igualdades anteriores por d, vem

$$\frac{dx}{r} = \frac{dy}{s} = \frac{dz}{t},$$

ou

$$\frac{x}{\frac{r}{d}} = \frac{y}{\frac{s}{d}} = \frac{z}{\frac{t}{d}}$$

c. d. d.

Exemplo IV: Calcular para que valor de x a função

$$f(x) = x^2 + x^{-1}$$

tem valor mínimo

Tendo em conta que o produto

$$(x^2)^1 \cdot (x^{-1})^2 = 1 = \text{constante},$$

teremos

$$x^2 = \frac{x^{-1}}{2} \quad \text{ou} \quad 2\,x^2 = x^{-1} \quad \text{donde se deduz}$$

$$x = \sqrt[3]{1/2}\,.$$

Outros exemplos práticos, indicados a seguir, poderão ilustrar as proposições expostas e esclarecer com mais eficiência o espírito do aluno.

Calcular os máximos das seguintes funções:

I) $\quad y = x\,(a^2 - x^2) \qquad (0 < x < a)$

II) $\quad y = \frac{2\pi}{3} \cdot x^2 \sqrt{x\,(2\,R - x)} \qquad (0 < x < 2\,R)$

III) $\quad y = \frac{x - 2\,a}{x^3} \qquad (0 < 2\,a < x)$

I

(1) $\quad y = x\,(a^2 - x^2)$ ou $y = (x^2)^{\frac{1}{2}}\,(a^2 - x^2)$.

Os factores x^2 e $(a^2 - x^2)$, de soma constante, terão produto máximo, segundo γ), quando

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} = a^2 - x^2 \quad \text{ou} \quad 3\,x^2 = a^2, \quad \text{ou ainda,}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a$$

Este valor de x, substituído na expressão analítica da função proposta (1), dará

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot a\left(a^2-\frac{a^2}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3,$$

como valor máximo

II

Como

$$y=\frac{2\pi}{3}\cdot x^2\cdot\sqrt{x(2R-x)},$$

ou

$$y=\frac{2\pi}{3}\cdot x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot(2R-x)^{\frac{1}{2}}$$

ou

$$y=\frac{2\pi}{3}\cdot x^{\frac{5}{2}}\cdot(2R-x)^{\frac{1}{2}}$$

e, além disso, é contante a soma

$$x+(2R-x)=2R,$$

deverá ser, segundo γ),

$$\frac{\frac{x}{5}}{2}=\frac{\frac{2R-x}{1}}{2}$$

donde se deduz

$$x=\frac{5}{3}\cdot R$$

para valor maximizante de $y=f(x)$.

O máximo é, pois,

$$f\left(\frac{5}{3}R\right)=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{25}{9}\cdot R^2\sqrt{\frac{5}{3}R\left(2R-\frac{5}{3}R\right)}=$$
$$=\frac{50}{81}\cdot\sqrt{5}\cdot\pi\cdot R^3.$$

III

A função

$$y=\frac{x-2a}{x^3}\text{ pode escrever-se:}$$

$$y=\frac{1}{x^3}(x-2a)=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{2a}{x}\right)=$$
$$=\frac{1}{4a^2}\cdot\left(\frac{2a}{x}\right)^2\left(1-\frac{2a}{x}\right).$$

Tem-se, então, dois factores de soma constante:

$$\frac{2a}{x}+\left(1-\frac{2a}{x}\right).$$

Assim, segundo γ), será

$$\frac{\frac{2a}{x}}{2}=\frac{1-\frac{2a}{x}}{1},$$

donde vem

$$x=3a.$$

Então

$$y=f(3a)=\frac{3a-2a}{(3a)^3}=\frac{1}{27\cdot a^2}$$

é o máximo procurado.

Determinar os mínimos das funções.

IV) $$y=\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}\qquad[-a<x<a]$$

V) $$y=\frac{a^8+b^2x^6}{x^2}\qquad[x>0\text{ e }a>0]$$

IV) $$y=\frac{x^3}{(x-a)^2}\qquad[0<a<x]$$

IV

$$y=f(x)=\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}$$

e tem-se

$$\left(\frac{a+x}{a-x}\right)\cdot\left(\frac{a-x}{a+x}\right)=1.$$

Então, segundo a proposição α_1), o mínimo de $f(x)$ terá lugar para

$$\frac{a+x}{a-x}=\frac{a-x}{a+x}\text{ ou }(a+x)^2=(a-x)^2\text{ ou para }x=0.$$

$$f(0)=\frac{a}{a}+\frac{a}{a}=2$$

é o valor mínimo

V

$$y=f(x)=\frac{a^8+b^2x^6}{x^2}\text{ ou }f(x)=\frac{a^8}{x^2}+b^2x^4.$$

Tendo em conta a constância do produto

(1) $$\left(\frac{a^8}{x^2}\right)\cdot(b^2x^4)^{\frac{1}{2}}=a^8b^2,$$

concluimos, segundo γ_1), que $f(x)$ é mínima quando os factores entre parêntesis, de (1) forem proporcionais aos respectivos expoentes.

O valor de x minimizante de $f(x)$ sairá, pois, de

$$\frac{\frac{a^8}{x^2}}{1}=\frac{b^2\,x^4}{\frac{1}{2}}\,;\quad x=\sqrt[6]{\frac{a^8}{2\,b^2}}=a\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{2}\,b}}.$$

Então,

$$f\left(a\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{2}\,b}}\right)=\frac{a^8+b^2\,a^6\sqrt[3]{\left(\frac{a}{\sqrt{2}\,b}\right)^6}}{a^2\sqrt[3]{\frac{a^2}{2\,b^2}}}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot a^6\sqrt[3]{\frac{2\,b^2}{a^2}}$$

é o mínimo de $f(x)$.

VI

O mínimo de $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-a)^2}$ deve dar-se com o máximo do seu inverso aritmético (*)

$$\frac{1}{f(x)}=[f(x)]^{-1}=\frac{(x-a)^2}{x^3}$$

Determine-se, então, o máximo de

$$[f(x)]^{-1}=\frac{(x-a)^2}{x^3}=\frac{1}{x^3}(x-a)^2=\frac{1}{x}\left(1-\frac{a}{x}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{x}\left(1-\frac{a}{x}\right)^2.$$

Sendo $\dfrac{a}{x}+\left(1-\dfrac{a}{x}\right)=1$ (constante), poderemos, segundo γ), afirmar que o valor de x maximizante de $[f(x)]^{-1}$ será dado pela igualdade

$$\frac{\frac{a}{x}}{1}=\frac{1-\frac{a}{x}}{2},\ \text{donde se deduz } x=3\,a.$$

O máximo de $[f(x)]^{-1}$, ou o mínimo de $f(x)$, é, pois,

$$f(3\,a)=\frac{(3\,a)^3}{(3\,a-a)^2}=\frac{27}{4}\,a.$$

A Geometria oferece campo vastíssimo à aplicação das proposições indicadas e destas vamos fazer uso em alguns problemas geométricos.

Seguir-se-á um conjunto de exercícios com as respectivas resoluções. Porém, aconselha-se ao estudante a tentativa de chegar ao fim *Só por Si,* sem recorrer às trajectórias indicadas, ou a terceiros:
— ganhará, assim, mais confiança em *Si Mesmo,* com benefício para o desenvolvimento do próprio autodomínio; poderá até descobrir caminho mais directo ou mais elegante se se alhear das nossas sugestões.

VII

De todos os pontos interiores a uma circunferência de raio R, *qual é aquele cuja potência em relação à circunferência é máxima?*

Sabe-se que qualquer ponto A do interior de uma circunferência divide as cordas que por ele passam em duas partes cujo produto é constante (para cada ponto). A essa constante chama-se *potência do* ponto A em relação à circunferência.

A circunferência de centro O, diâmetro $\overline{CD}$, raio R, representado na Fig. 1, deixa

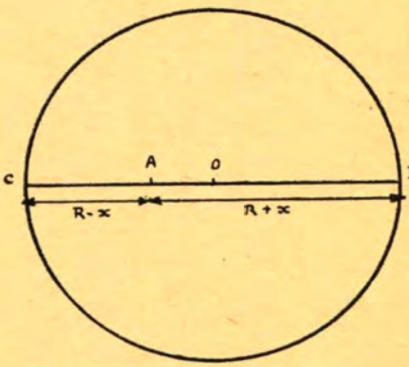


Fig. 1

ver que a potência do ponto A, em relação à circunferência referida, é

$$f(x)=(R-x)\,(R+x)$$

onde x representa a distância do ponto A ao centro da circunferência.

(*) O aluno não deve confundir as funções $y=f(x)$ e $x=f^{-1}(y)$ — funções inversas — com funções $f(x)$ e $[f(x)]^{-1}$ — inversos aritméticos — .

Ora,

$$(R-x)+(R+x)=2R$$

é constante.

Então, segundo α), o maximizante de $f(x)$ é raiz da equação

$$R-x=R+x$$

ou

$$x=0$$

o que nos leva a concluir que o máximo da potência

$$f(0)=R^2$$

se verifica quando $A \equiv O$; A é o próprio centro da circunferência.

VIII

De todos os triângulos rectângulos com a mesma hipotenuza, qual é aquele cuja área é máxima?

Questão equivalente à seguinte:

Inscrever num círculo dado o rectângulo de área máxima.

Representem-se os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ por x e y, respectivamente; a hipotenuza por

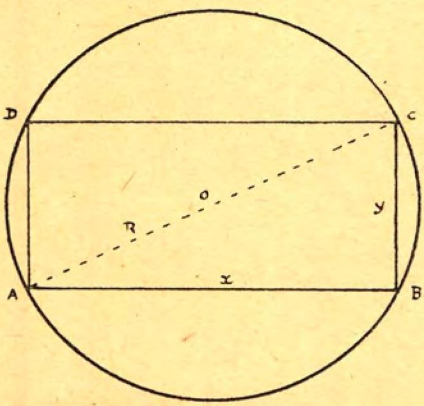


Fig. 2

$2R$ (constante) — diâmetro do círculo de centro O e raio R (Fig. 2).

Assim, será

$$(1) \qquad x^2+y^2=4R^2$$

e

$$(2) \qquad 2s=x\cdot y$$

onde s representa a área da superfície do triângulo $[ABC]$, rectângulo em B.

A eliminação da variável y entre (1) e (2) dá

$$(3) \qquad 2s=x\sqrt{4R^2-x^2}=(x^2)^{\frac{1}{2}}(4R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Como é constante a soma

$$x^2+(4R^2-x^2)=4R^2$$

teremos, conforme γ):

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}}=\frac{4R^2-x^2}{\frac{1}{2}}$$

que nos fornece o maximizante

$$x=\sqrt{2}\,R$$

da função (3).

O valor $\sqrt{2}\,R$ mostra já que o quadrilátero $[ABCD]$ é *quadrado* e que o triângulo rectângulo $[ABC]$ é *isósceles*.

A confirmação pode sair de (1), pois é

$$(\sqrt{2}\,R)^2+y^2=4R^2 \quad \text{ou} \quad x=y=\sqrt{2}\,R$$

Então, o máximo da área do triângulo rectângulo de hipotenuza constante $2R$ é

$$s=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,R\cdot\sqrt{2}\,R=R^2.$$

IX

De todos os triângulos de perímetro dado, qual é o de maior área?

Sejam x, y e z os valores das medidas dos lados de um triângulo de perímetro

$$2p=x+y+z$$

A área S de qualquer triângulo, em função do seu perímetro, exprime-se mediante a conhecida expressão (de Herão de Alexandria).

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} \, (*)$$

Tendo em consideração que a soma

$$(p-x)+(p-y)+(p-z) = 3p - 2p = p$$

é constante e, em obediência à proposição β), poderemos afirmar que $S = f(p)$ é máxima para

$$p - x = p - y = p - z$$

ou para

$$x = y = z.$$

O triângulo é, pois, o equilátero, de área

$$S = \sqrt{p(p-x)^3} = \sqrt{p\left(p - \frac{2}{3}p\right)^3} = \frac{p^2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{p^2}{9}\sqrt{3}$$

X

a) *Inscrever num círculo de raio* R *um rectângulo de perímetro máximo*

e

b) *Circunscrever ao mesmo círculo um losango de área mínima*

a)

Na figura 3, $[ABCD]$ é um rectângulo inscrito no círculo de centro O e de diâmetro $\overline{AC} = 2R$.

Faça-se $\overline{AB} = \overline{CD} = x$ e $\overline{BC} = \overline{AD} = y$; teremos para perímetro desse rectângulo

(1) $$2p = 2(x+y) \quad \text{ou} \quad p = x + y$$

e

(2) $$x^2 + y^2 = 4R^2.$$

(*) O Matemático português Pedro Nunes (primeira metade do século XVI) foi autor de uma demonstração do teorema que é traduzido pela *fórmula de Herão de Alexandria*. A demonstração de Pedro Nunes é fundada em outra proposição segundo a qual a área do triângulo é igual ao semi-produto do seu perímetro pelo raio do círculo inscrito.

Vem a propósito dizer, também, que o eminente cientista português foi dos primeiros matemáticos a estudar, por via geométrica, questões de máximos e mínimos, antes que a luz do século XVII iluminasse o Cálculo diferencial.

Mas

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

ou

$$p^2 = 4R^2 + 2x\sqrt{4R^2 - x^2}$$

É evidente que o máximo de p, ou de p^2, dar-se-à com o máximo de

$$f_1(x) = 2x\sqrt{4R^2 - x^2} = 2(x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (4R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

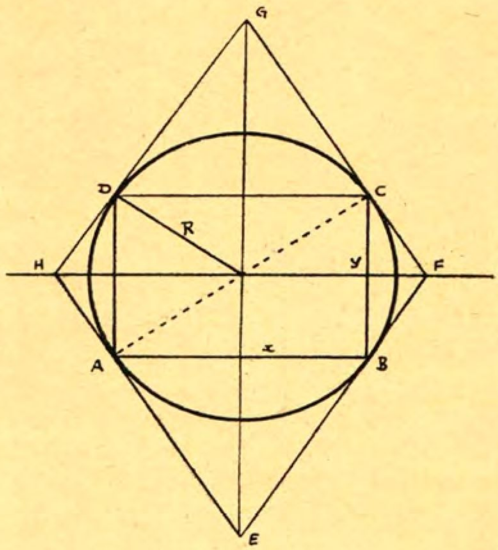


Fig. 3

Ora, sendo

$$x^2 + (4R^2 - x^2) = 4R^2 \quad \text{(constante)}$$

podemos afirmar que

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} = \frac{4R^2 - x^2}{\frac{1}{2}}$$

donde

$$x = \sqrt{2}\,R \quad (x = y = \sqrt{2}\,R, \ \text{segundo (2)})$$

como valor maximizante de $f_1(x)$, conforme γ).

O rectângulo é, pois, um quadrado de perímetro

$$2p = 2(x+y) = 2(\sqrt{2}\,R + \sqrt{2}\,R) = 4\sqrt{2}\,R$$

b)

Na mesma figura 3, é $[E\,F\,G\,H]$ um losango circunscrito ao mesmo círcula da *a*).

A área do losango é

$$(1) \qquad S = 2\,R \cdot \overline{HG} = 2\,R\left(\overline{HD} + \frac{R^2}{\overline{HD}}\right)$$

visto ser

$$R^2 = \overline{HD}\,(\overline{HG} - \overline{HD})$$

Como o produto

$$\overline{HD} \cdot \frac{R^2}{\overline{HD}} = R^2 \qquad \text{(constante),}$$

o mínimo tem lugar para $\overline{HD} = \dfrac{R^2}{\overline{HD}}$, ou seja, $\overline{HD} = R$.

Podemos então afirmar que o losango $[E\,F\,G\,H]$ de área mínima é um quadrado tal que a sua área é, segundo 1)

$$S = 2\,R\left(R + \frac{R^2}{R}\right) = R^2 .$$

XI

Qual é o paralelipípedo de volume máximo inscrito numa esfera de raio R*?*

Sejam x, y e z os valores das medidas das três arestas do paralelipípedo, concorrentes num mesmo vértice. Como um paralelipípedo inscrito numa esfera é necessàriamente rectângulo, o seu volume V será dado por

$$(1) \qquad V = x \cdot y \cdot z .$$

O máximo de V tem lugar ao mesmo tempo que o máximo de

$$(2) \qquad V^2 = x^2 \cdot y^2 \cdot z^2$$

e como é

$$(3) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 4\,R^2 \qquad \text{(constante)}$$

pode, pois, afirmar-se que o máximo de V^2 é atingido com

$$x^2 = y^2 = z^2 \qquad \text{(conforme } \beta))$$

Tem-se, portanto,

$$x = y = z = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,R ,$$

isto é, o paralelipípedo de volume máximo é o cubo de volume

$$V = \frac{8}{9}\sqrt{3} \cdot R^3$$

XII

De todos os cilindros com o mesmo volume $2\,\pi\,a^3$, *qual é aquele que pode ser inscrito na superfície esférica do menor raio?*

Na fig. 4 tem-se:

R: raio da superfície esférica de centro 0;

r: raio da base do cilindro inscrito.

x: altura do cilindro.

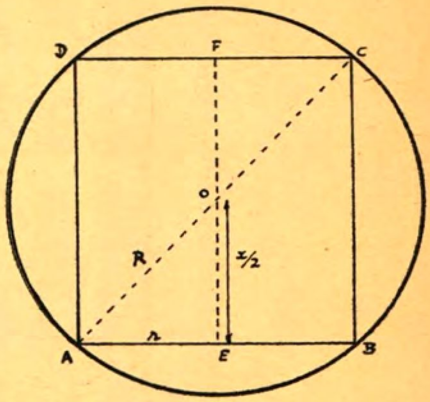


Fig. 4

O volume do cilindro será:

$$V = 2\,\pi\,a^3 = \pi\,r^2\,x$$

ou

$$(1) \qquad V = 2\,\pi\,a^3 = \pi\left(R^2 - \frac{x^2}{4}\right) \cdot x$$

donde se deduz

$$2\,a^3 = R^2\,x - \frac{x^3}{4}$$

e

$$(2) \qquad R^2 = \frac{8\,a^3 + x^3}{4\,x} = 2 \cdot \frac{a^3}{x} + \frac{x^2}{4} .$$

Sendo constante o produto

$$\left(\frac{2\,a^3}{x}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = a^3 ,$$

pode recorrer-se a γ_1) para afirmar que o minimizante da função (2) — $R(x)$ — sai de

$$\frac{2a^3}{x} = \frac{\frac{x^2}{4}}{\frac{1}{2}}$$

ou

$$x = \sqrt[3]{4} \cdot a \,.$$

O cilindro, nas condições do enunciado, é inscrito na superfície esférica de raio

$$R^2 = \frac{8a^3 + 4 \cdot a^3}{4\sqrt[3]{4}\,a} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{4^2} \cdot a^2$$

ou

$$R = \sqrt[6]{\frac{27}{4}} \cdot a \,.$$

XIII

Inscrever numa esfera de raio R *um tronco de cone cuja base maior seja um círculo máximo da esfera e tal que seja máxima a sua área lateral.*

Sejam $\overline{AB} = 2R$ e $\overline{DC} = 2x$ os diâmetros das bases maior e menor, respectivamente, do tronco cuja geratriz $\overline{AD} = \overline{BC}$ é representada por g.

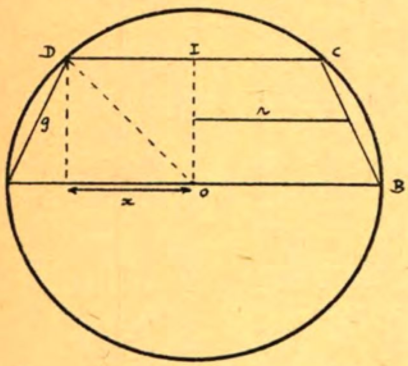


Fig. 5

A geometria elementar fornece a fórmula

(1) $$S = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot g$$

para cálculo da área lateral de um tronco de cone de revolução onde r é a *mediana* do trapézio rectângulo $[OBCI]$ cuja rotação completa em torno do eixo $\overline{OI}$ gera o tronco referido.

Sabe-se que a medida da mediana é igual à semi-soma das medidas das bases do trapézio

(2) $$r = \frac{x + R}{2}.$$

Ora, da observação da figura, sai:

(3) $$g = \sqrt{2R(R-x)} \,.$$

Substituindo (2) e (3) na fórmula (1), vem

(4) $$S = 2\pi \cdot \frac{x+R}{2} \cdot \sqrt{2R(R-x)} =$$

$$= \pi\sqrt{2R}\,(x+R)\,(R-x)^{\frac{1}{2}}$$

O maximizante da função $S = f(x)$ é raiz da equação

(5) $$(x+R) = \frac{R-x}{\frac{1}{2}}.$$

Note-se que

$$(x+R) + (R-x) = 2R \quad \text{é constante}$$

Sendo $x = \dfrac{R}{3}$ a raiz da equação (5), é, pois,

$$S\left(\frac{R}{9}\right) = \frac{8}{9} \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \cdot R^2$$

o máximo procurado.

XIV

Considere uma esfera de raio R *e seccione-a por meio de dois planos paralelos* $\overline{AB}$ *e* $\overline{A'B'}$ *equidistantes do centro.*

Seja CC′ *o diâmetro perpendicular a estes planos.*

Qual é o máximo do volume do sólido constituído pelo cilindro A B A′ B′ *e pelos dois cones* A B C *e* A′ B′ C′*?*

Volume do cilindro A B A′ B′:

$$V_1 = \pi \cdot \overline{E'B'}^2 \cdot \overline{BB'}.$$

Volume dos dois cones ABC e $A'B'C'$, respectivamente,

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi\,\overline{EB}^2\cdot\overline{EC}$$

e

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi\cdot\overline{E'B'}^2\cdot\overline{E'C'}\,.$$

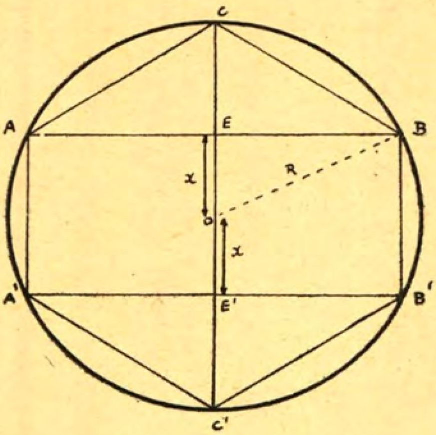


Fig. 6

Volume dos três solidos, em conjunto:

$$(1)\qquad V = V_1 + V_2 + V_3 = \pi\,\overline{E'B'}^2\cdot\overline{BB'} + $$
$$+\frac{1}{3}\pi\,(\overline{EB}^2\cdot\overline{EC} + \overline{E'B'}^2\cdot\overline{E'C'}).$$

Faça-se

$$\overline{OE} = \overline{OE'} = x.$$

Será, pois, segundo a figura 6:

$$(2)\qquad \begin{cases} \overline{EB} = \overline{E'B'} = \sqrt{R^2 - x^2} \\ \overline{EC} = \overline{E'C'} = R - x \\ \overline{BB'} = 2x \end{cases}$$

A substituição destas relações (2) na fórmula (1) de $V(x)$ conduz a

$$V = \pi\,(R^2 - x^2)\cdot 2x + \frac{2}{3}\pi\,[(R^2 - x^2)\,(R - x)]$$

ou a

$$(3)\qquad V = \frac{2\pi}{3}(R + x)\,(R - x)\,(R + 2x)\,.$$

Com base na proposição γ), diríamos que o volume $V(x)$ seria máximo quando

$$R + x = R - x = R + 2x\,,$$

se a soma destes três factores fosse constante Porém, em virtude de

$$(R + x) + (R - x) + (R + 2x) = 3R + 2x$$

não ser constante, tentaremos a pesquisa de duas constantes k e λ, tais que a função

$$F = k\,(R - x) + \lambda\,(R + x) + (R + 2x)$$

não seja variável, ou, por outras palavras, seja independente de x.

Terá de ser, portanto,

$$k\,(R - x) + \lambda\,(R + x) + (R + 2x) = \text{constante}$$

ou

$$(4)\qquad (\lambda - k + 2)\,x + (k + \lambda + 1)\,R = \text{constante}$$

e, segundo o método dos coeficientes indeterminados, na aplicação à identidade de polinómios, deverá ser

$$(5)\qquad \lambda - k + 2 = 0$$

cuja verificação impõe o máximo de $V(x)$, para

$$(6)\qquad k\,(R - x) = \lambda\,(R + x) = R + 2x \qquad \text{(proposição } \beta))$$

donde se deduz

$$(7)\quad k = \frac{R + 2x}{R - x}\ \text{e}\ \lambda = \frac{R + 2x}{R + x}\,(R - x \neq 0\ \text{e}\ R + x \neq 0,$$
quando $V(x)$ é máximo)

A sua substituição em (5) conduz à equação

$$\frac{R + 2x}{R + x} - \frac{R + 2x}{R - x} + 2 = 0\,,$$

ou seja,

$$3x^2 + Rx - R^2 = 0\,,$$

com as raízes $x = \dfrac{-R \pm \sqrt{13}\,R}{6}$, das quais só a positiva é útil.

Então, $x = \dfrac{-R \pm \sqrt{13}\,R}{6}$ — maximizante de $V(x)$ — substituído em (3), dá

$$V = \frac{2\pi}{3}\left[\frac{(22 + 2\sqrt{13})\,R^2}{36}\right]\left[\frac{(2 + \sqrt{13})\,R}{3}\right] =$$
$$= \frac{\pi}{81}(35 + 13\sqrt{13})\cdot R^3.$$

Damos a seguir os enunciados de alguns problemas do tipo dos anteriores para que o aluno possa aferir dos seus conhecimentos e sedimentar ideias.

XV

a) Será possível generalizar o Teorema β) substituindo a soma dos factores por combinações lineares?

b) Existirá *mínimo* do produto de dois números positivos de soma dada? E *máximo* da soma de dois números positivos de produto dado?

XVI

Dá-se um rectângulo de perímetro constante $4p$. Sobre os quatro lados, tomados como diâmetros, descrevem-se semi-circunferências exteriores ao rectângulo. Determinar o mínimo da área da superfície assim formada.

XVII

Considere dois pontos A e O; descreva uma circunferência de raio R, variável, com centro em O e pelo ponto A tire tangentes a essa circunferência.

Pergunta-se:

1.º) O máximo da área do triângulo isósceles formado pelas tangentes e pela corda definida pelos pontos de tangência.

2.º) O máximo da área do quadrilátero formado pelas mesmas tangentes e pelos raios que são dirigidos para os pontos de tangência.

XVIII

São dadas duas rectas paralelas r_1 e r_2 e uma terceira recta que as intersecta em dois pontos B e C, respectivamente.
Por um ponto fixo D, tomado sobre r_1 (por exemplo), passa uma recta variável que intersecta $\overline{BC}$ em I e r_2 no ponto A.

Se se designar por x o comprimento de $\overline{BI}$, para que valor de x a soma das áreas dos triângulos $[AIC]$ e $[BID]$ é mínima?

XIX

Um triângulo rectângulo roda em torno da sua hipotenuza. Dá-se o perímetro $2p$ e a hipotenuza a deste triângulo.

Pretende-se:

1.º Calcular o volume do sólido gerado;

2.º Determinar o mínimo deste volume quando a hipotenuza a varia e o perímetro $2p$ é constante.

XX

Determinar sobre a linha dos centros de duas esferas com o mesmo raio, um ponto tal que a soma das zonas esféricas vistas deste ponto seja máxima.

XXI

Determinar o máximo e o mínimo da função

$$\frac{x^2-2x+2}{x^2-4x+2}.$$

XXII

Com o esquema representado na Figura 7, pretende-se o seguinte:

Um carteiro, morador em C, sai duas vezes por dia de sua casa para vir à estrada $\overline{EE'}$ («*recta*» naquela região) tomar posse das malas de correio que um autocarro ali deixa para o carteiro as transportar ao Posto P dos Correios.

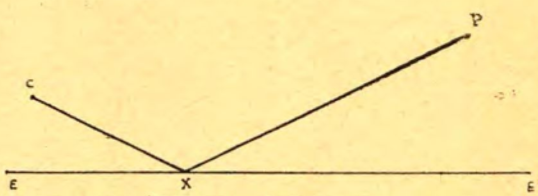


Fig. 7

a) Em que ponto X da estrada deve o autocarro largar as malas para que, naquelas condições, o carteiro percorra a mínima distância?

b) Confirme a solução por via geométrica.

Represente por m o valor mínimo da distância calculada em *a*) e responda à pergunta seguinte:

c) No plano em que se situam $C, P, \overline{EE'}$ qual será o lugar geométrico das posições de X tais que a soma das suas distâncias aos pontos fixos C e P seja m?

d) Qual a posição de $\overline{EE'}$ relativamente ao lugar geométrico de *c*)?

*

Estamos dispostos a esclarecer quaisquer dúvidas que porventura possam surgir e prontos a receber sugestões ou críticas construtivas.

Os estudantes poderão, assim, prestar a sua valiosa colaboração ao autor a quem se deverão dirigir por intermédio de «*Gazeta de Matemática*».

MOVIMENTO CIENTÍFICO

SOBRE A INVESTIGAÇÃO NA TEORIA DOS NÚMEROS

Em ligação com a 36.ª reunião anual da Divisão do Pacífico da Associação Americana para o Progresso da Ciência teve lugar em Pasadena no Instituto Tecnológico da California, de 22 a 24 de Junho de 1955, uma conferência sobre a investigação na teoria dos números. Participaram 75 matemáticos. Foram apresentadas as comunicações seguintes: Ernst G. Straus: The arithmetic of analytic functions, Olga Taussky Todd: Matrix methods in algebraic number theory, Morgan Ward: Divisibility sequences, Emma Lehmer: On the location of Gauss'sums, Albert Leon Whitemam: A sum connected with the partition function, Tom M. Apostol: The approximate functional equation of Hecke's Dirichlet series, Richard Bellman: The generalised theta-functions of Hecke, Siegel and Mass, Joseph Lehner: Partial-fraction decompositions and expansions of zero, Lowell Schoenfeld: On the order of the zeta function near the line $\sigma=1$, Atle Selberg. Discontinuous groups and harmonic analysis with applications to Dirichlet series and modular forms, D. H. Lehmer: New results about Ramanujan's tau function, P. T. Bateman: General properties of partition functions, Richard Brauer: Number-theoretical investigations on groups of finite order, J. T. Tate: Cohomology and class-field theory, N. C. Ankeny: Universal zeta functions, H S. Vandiver: Fermat's last theorem, Gordon Pall: Simultaneous representation by adjoint quadratic forms, Marshal Hall, Jr.: The minima of binary quadratic forms, Harvey Cohn: Accessibility of algebraic numbers with rounded norms, Emil Artin: The classical finite simple groups and their orders, J. Barkley Rosser: Some new extensions of Brun's method, Sarvadam Chowla: Remarks on Bernouilli numbers, Ivan Niven: Normal numbers, Alfred T. Brauer: The Schnirelman density of the sum of two sequences of which one has positive density.

M. Z.

CONGRESSO INTERNACIONAL SOBRE A APLICAÇÃO DA TEORIA DAS PROBABILIDADES À ENGENHARIA E ADMINISTRAÇÃO DE TELEFONES

Teve lugar em Copenhague de 20 a 23 de Junho de 1955, o primeiro congresso internacional. O comité de honra era constituído pelos cientistas: Th. C. Fry, G. J. O'Dell, F. Pollaczeck e E. Vaulot. Foram feitas as seguintes comunicações:

R. I. Wilkinson: The beginnings of the switching theory in the United States. Leon Kosten: The historical development of the theory of probability in telephone traffic engineering in Europe. R. Fortet: Probabilité de perte en sélection conjugée. A. Elldin: On equations of state for a two-stage link system. J. W. Cohen: Certain delay problems for a full-availability trunk loaded by two traffic sources. L. von Sydow: Some aspects on the variations in traffic intensity. R. I. Wilkinson: Theories for toll traffic engineering in the U.S.A. Niels Ivar Bech: Deduction of a simple relationship between traffic offered and loss probabilities for the separate traffic sources. F. I. Tânge: Optimal use of both-way circuits in cases of unlimited availability. J. Chauveau: Utilisation des formules d'Erlang dans le cas où le nombre de sources d'appel est limité. Applications au calcul des groupes