MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Matemáticas Gerais — Exame final — Julho 1956.

4095 — *a*) Verificar que a imagem da função $y = 2x - 1 + \frac{1}{x}$ admite uma assíntota e que esta se pode considerar limite da tangente.

b) Mostrar que os extremantes de $f'(x)$ são abcissas de pontos de inflexão da imagem de $f(x)$.

4096 — Determinar os planos que passam pela recta $x = z = 4$ e que cortam a esfera de centro na origem e raio 2, segundo as circunferências de raio 1. Escrever as equações de uma das circunferências e a equação da superfície cilíndrica que a projecta paralelamente a OX.

4097 — Transforme o polinómio $x^3 + 3x^2 + (3 - \lambda)x + 3 - \lambda$ noutro privado de 2.º termo.

Utilizando o resultado obtido, calcule λ de modo que o polinómio admita raízes iguais.

Calcule as raízes nesta hipótese.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º Exame de frequência (ordinário) — 7-2-1956

4098 — *a*) Determinar a expressão geral dos polinómios $P(x)$ do primeiro grau tais que na decomposição de $\frac{x^2 + P(x)}{(x-1)^2(x^2+1)}$ em elementos simples o numerador da fracção cujo denominador é x^2+1 seja constante.

R: $\mathrm{K}x + 1$

b) Determinar m por forma que a característica da quádrica $xy + yz + xz + x^2 + my^2$ seja igual a 2 e apresentar a sua decomposição em quadrados.

$$\mathrm{R:}\ m = 0\ \left(x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right)^2 - \frac{1}{4}(y - z)^2$$

c) Aplicar a teoria da eliminação ao estudo do sistema

$$x^3 + b\,x^2 - a^2 x - a^2 b = 0$$
$$x^3 - a\,x^2 - b^2 x + a\,b^2 = 0$$

R: *As raízes são* $x = a,\ x = -b$

4099 — Em que termos se põe o problema de interpolação polinomial?

Provar que há apenas um polinómio que satisfaz às condições do problema.

Descrever o processo para a obtenção dos coeficientes do polinómio interpolador de Newton $- f(x) -$ e mostrar que este polinómio é independente da ordem pela qual se dispõe os valores de x. Justificar a regra do «zig-zag» descrevendo a sua utilidade.

Que modificações sofrem os polinómios interpoladores de Newton e Lagrange quando os valores de x estão em progressão aritmética de razão h?

4100 — Enunciar os teoremas de Laplace, escrever as relações que os sintetizam e concluir destas a existência da matriz inversa de $A\,(n \times n)$ (regular). Sendo A^{-1} a inversa de A qual é o valor de $|A|$ se $A^{-1} = A^*$? Justificar a resposta.

Provar que a inversa de uma matriz diagonal é uma matriz diagonal.

Utilizando o conceito de matriz inversa deduzir a solução do sistema $AX = B$ (igualdade matricial).

Relacionar a matriz adjunta de A com a matriz inversa A^{-1}.

Qual é a matriz inversa da adjunta de A? Justificar.

Provar que a transformada de inversa de uma matriz é igual à inversa da transformada dessa matriz.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º Exame de Frequência Extraordinário — 20-3-56.

4101 — Dados $u_0 = 5, u_1 = 10, u_2 = 20$ e $u_3 = -8$ achar o valor de u_4 mediante a formação da correspondente tabela de diferenças. Justificar o processo utilizado.

R: $u_4 = -117$.

4102 — Decompor em quadrados a forma

$$-x^2 - 3y^2 + z^2 + 2yz - 4xz + 8xy$$

Quais são os números característicos e o índice de inércia?

Indicar como se determinam estes elementos sem fazer a decomposição em quadrados.

$$\mathrm{R:}\ -(x - 4y + 2z)^2 + \frac{1}{19}\left(19y - 7z\right)^2 + \frac{46}{19}z^2.$$

4103 — Dados dois polimónios A e B, indicar, justificando, como se determina o seu *m. d. c.*.

Enunciar o teorema de Bezout e deduzi-lo com base na teoria da eliminação. Provar que divisor de AH, primo com A, divide H.

Aplicando a teoria da eliminação, determinar para que valores de m tem raízes comuns o sistema

$$x^3-2x^2-x+2$$
$$x^3-3x^2-x+m+1$$

e calculá-las

R: $m=2$ e $m=5$. *Para* $m-2$ *as raízes comuns são* 1 *e* -1 *e para* $m=5$ *a raiz comum é* 2.

4104 — Provar que um determinante nulo, sendo diferente de zero o complemento de certo elemento, a coluna desse elemento é composição linear das restantes colunas.

Definir matriz simétrica de A e provar que AA^* é simétrica; mostrar que, em geral, o produto de duas matrizes simétricas só é matriz simétrica se os factores são permutáveis.

Antemultiplicando o sistema $AX=B$ por A^* deduzir uma regra para resolver $A^*AX=A^*B$ em função da solução do primeiro.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **Exame final — Milicianos — 17/12/55.**

4105 — O polinómio $f(x)$ de grau inferior a $m+n$ verifica as seguintes condições:

$$f(x_1)=f'(x_1)=\cdots=f^{(m-2)}(x_1)=0\,,\,f^{(m-1)}(x_1)=(m-1)\,!$$
$$f(x_2)=f'(x_2)=\cdots=f^{(n-2)}(x_2)=0\,,\,f^{(n-2)}(x_2)=(n-1)\,!$$

Utilizando a decomposição da fracção $\dfrac{f(x)}{(x-x_1)^m(x-x_2)^n}$ em elementos simples, determine a expressão analítica de $f(x)$. Indique as raízes de $f(x)$ e os respectivos graus de multiplicidade.

R: $$\frac{f(x)}{(x-x_1)^m(x-x_2)^n}=\frac{1}{(x_1-x_2)^n(x-x_1)}+$$
$$+\frac{1}{(x_2-x_1)^m(x-x_2)}$$

e portanto

$$f(x)=(x-x_1)^{m-1}(x-x_2)^{n-1}\left[\frac{x-x_2}{(x_1-x_2)^n}+\frac{x-x_1}{(x_2-x_1)^m}\right].$$

O polinómio tem as raízes x_1 *de multiplicidade* $m-1$, x_2 *de multiplicidade* $n-1$ *e a raiz simples*

$$\frac{x_2(x_2-x_1)^m+x_1(x_1-x_2)^n}{(x_2-x_1)^m+(x_1-x_2)^n}.$$

4106 — Sendo $g(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$ mostre que $f(x,y)=y^3+3y+4g(x)=0$ define uma só função $y(x)$, qualquer que seja x compreendido no intervalo de convergência de $g(x)$.

Determine o sentido da concavidade de $g(x)$ no ponto $P(0,-1)$.

R: $f'_x(x,y)=\dfrac{8}{(1-x)^3}\,|x|<1\,f'_y(x,y)=3(y^2+1)\neq 0$ *portanto* $f(x,y)=0$ *define* $y(x)$ *desde que* $|x|<1$. *Como* $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{(0,-1)}<0$ *a concavidade está voltada para baixo.*

4107 — Dado o determinante $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5$ calcular os elementos da 1.ª linha sabendo que os complementos algébricos da 2.ª e 3.ª são, respectivamente: $1\ -2\ -1,\ -3\ 1\ 3$.

R: $a_1^1=1\quad a_1^2=0\quad a_1^3=1$.

I. S. T. — Matemática Gerais — **1.º Exame de Frequência — 1954-55**

4108 — É dada uma sucessão $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ que tem por limite x. Provar que a sucessão $a_{10^1}, a_{10^2}, a_{10^3}\cdots$ tende para o mesmo limite.

4109 — Diga que valor deve ser atribuido à função $\dfrac{\cos x-1}{e^x-1-\operatorname{sen} x}$ no ponto $x=0$ de modo que a função seja continua.

4110 — Dada uma sucessão $a_1\,a_2\,a_3\ldots$ que tende para o limite π mostrar que são iguais o limite superior dos números ε, para os quais há infinidade de *aa* que lhes são superiores e o limite inferior dos números η para os quais há apenas um número finito de *aa* que lhes são superiores.

4111 — Se num grupo de ordem p^n onde p é número primo, C_λ é o número de classes de conjugados com p^λ elementos, em particular C_o o número dos elementos do centro, então é $p^p=C_o+C_{1p}+C_{2p}+\cdot-$.

Prove que o centro dum grupo de ordem p^n não se reduz ao elemento unidade.

4112 — Dados 2 elementos a e b que comutam entre si, pertencentes a um domínio de integridade com elemento um e característica a prove que $(a+b)^{a^7}=a^{a^7}+b^{a^7}$.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — **Exame ordinário — 24-6-1955.**

4113 — Poderá ser convergente a série de termo geral imaginário $\dfrac{1+2i+n}{2+3i+n}$?

4114 — Escreva as equações que resolvem o problema seguinte:

1) dividir 20 em partes tais que o produto do cubo da primeira pelo quadrado da segunda seja máximo ou mínimo.

4115 — Determine a equação do cone de revolução cujo vértice é: $(0,1,0)$ e cuja geratriz faz 45° com o respectivo eixo, este último suposto em OXY.

4116 — Determine a característica da matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 & 9 & 5 \\ -2 & 1 & 7 & 13 & 8 \\ -1 & 0 & 5 & 9 & 5 \\ 3 & -9 & 12 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

4117 — Resolva o sistema

$$\begin{array}{rrrl} 2x & +3y & -z & = 5 \\ x & -y & +z & = 2 \\ x & -2y & +z & = 0 \\ 2x & -y & -z & = -3 \end{array}$$

4118 — Se K é um corpo considere o domínio de $K[x,y]$. Mostre que se tem $(x):(y)=(x)$

4119 — Mostre que os anti-automorfismos e os automorfismos dum anel formam um grupo de transformações no qual os automorfismos são sub-grupo invariante de índice 1 ou 2.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — **1.º Exame de Frequência — 3-3-1956.**

4120 — Faça passar pela recta $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-0}{1}$ um plano que diste 1 da origem. Determine o ângulo desse plano com o plano $x0y$

4121 — Discutir o sistema de equações lineares

$$\begin{array}{rl} x+2y-z & =k \\ 3x+y-2z & =2 \\ -2x+y+z & =k^2 \end{array}$$

em função de k.

Determine as soluções positivas do sistema quando o sistema é compatível. Se as equações do sistema representassem planos, em que condições os planos formavam uma superfície prismática?

4122 — Resolva a equação $x^6-1=0$. Quais as raízes primitivas?

4123 — Mostre que o afixo do complexo $z=a+b.t$, em que a e b são constantes complexas, descreve uma recta quando t varia de $-\infty$ a $+\infty$. Qual a equação cartesiana dessa recta? Que curva descreve o afixo de $\frac{1}{z}$?

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. L. — Geometria Descritiva — **1.º Exame de frequência — 1954-1955.**

4124 — Sejam $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ números reais. Considere o conjunto dos pares (α,β) e defina nesse conjunto uma soma pela lei seguinte

$$(\alpha,\beta)+(\alpha',\beta')=(\alpha+\alpha',\beta+\beta')$$

Mostre que a correspondência $(\alpha,\beta)\to\alpha$, é um homomorfismo, e determine o seu núcleo.

4125 — Determine o grupo dos automorfismos de um grupo cíclico finito.

4126 — Considere um plano oblíquo qualquer. Determine o seu traço no $\beta_{2,4}$ utilizando uma recta de perfil do plano.

4127 — Dadas 3 rectas não complanas duas a duas, mostre, construindo, que é possível haver um recta paralela a uma delas e que encontra as outras duas.

4128 — Dadas 2 rectas, uma paralela ao $\beta_{2,4}$ e outra paralela ao $\beta_{1,3}$ conduzir por um ponto não pertencente a nenhuma das rectas dadas, uma recta parela ao $\beta_{2,4}$ que as encontre.

Observação: Resolver o problema sem recorrer à LT, no caso em que tiver solução.

Enunciar a condição necessária e suficiente para que o problema tenha solução.

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. L. — Álgebra Superior — **1.ª Frequência — 15-3-56.**

4129 — $\mathfrak{G}$ é um grupo -Ω e $\mathfrak{H}$ um invariante -Ω de $\mathfrak{G}$. Suponhamos que $\{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}=\bar{\mathfrak{G}}\supset\bar{\mathfrak{G}}_1\supset\bar{\mathfrak{G}}_2\supset\ldots\supset\bar{\mathfrak{G}}_k=(x)\}$ é uma série de composição de $\bar{\mathfrak{G}}$, e suponhamos que

$$\{\mathfrak{H}\supset\mathfrak{H}_2\supset\cdots\supset\mathfrak{H}_t=(x)\}$$

é uma série de composição para $\mathfrak{H}$.

Diga se $\mathfrak{G}$ tem série de composição e construa uma tal série.

4130 — Seja $\mathfrak{H}$ um invariante em $\mathfrak{G}$ (Ω vazio). Mostre que $\mathfrak{G} \simeq \bar{\mathfrak{G}} \times \mathfrak{H}$ em que $\bar{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, se e só se existe um endomorfismo E, tal que $x E = x$, para todo o $x \in \mathfrak{H}$.

4131 — Seja $\mathfrak{M}$ um módulo com respeito a $\mathfrak{S}$ (anel simples, com elemento um, e completamente redutível). $\mathfrak{M}$ tem um número finito de geradores. Supondo que um é operador unitário em $\mathfrak{M}$, mostrar que $\mathfrak{M}$ é completamente redutível, e cada submódulo é isomorfo de um ideal de $\mathfrak{S}$.

4132 — Diz-se que o ideal $\mathfrak{K}$ é primo, se o facto de $\mathfrak{K} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{L}$, implicar, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{N}$, ou $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{N}$. Mostrar que qualquer ideal impotente está contido em ideal primo.

4133 — Mostrar que se $\mathfrak{a}$ é anel regular com um só idempotente, ele é o elemento um. Mostrar ainda que $\mathfrak{a}$ é simples, e ver se é ou não anel de divisão.

F. C. L. — Álgebra Superior — 2.º Exame de Frequência — 1.ª chamada — 11-6-1955

I

4134 — *a*) Decomponha em quadrados a forma quadrática seguinte:

$$2\,x_1\,x_2 - 2\,x_1\,x_4 + 6\,x_2\,x_3 - 3\,x_3^2 + 2\,x_3\,x_4$$

b) Reduza a quádrica à forma canónica.

II

4135 — Seja $f(x)$ um polinómio real de raízes $r_1, r_2, \cdots r_n$ e designe $F(x)$ o polinómio de raízes $-(r_i - r_k)^2$ $(i \neq k)$. Mostre que $F(x)$ tem também coeficientes reais.

Sendo $F(x)$ completo de coeficientes todos positivos, prove que $f(x)$ não pode admitir raízes imaginárias nem iguais.

Mostre que, reciprocamente, tendo $f(x)$ raízes reais e distintas $F(x)$ é completo e apresenta variações nos coeficientes. Determine a equação $F(x) = 0$, correspondente à equação

$$f(x) = x^3 + p\,x + q$$

exprimindo os coeficientes de $F(x)$ nas funções simétricas fundamentais das raízes de $f(x)$.

Deduza dos resultados uma condição necessária e suficiente para que a equação real $f(x) = 0$ tenha um par de raízes imaginárias.

III

4136 — Sejam A e B (reais) 2 matrizes quadradas $(n \times n)$ e designe λ um valor próprio de $A\,B$.

a) Prove que λ é valor próprio de $B\,A$.

b) Mostre que existe uma matriz coluna X não nula satisfazendo à equação matricial

$$B\,X = \lambda\,A^{-1}\,X\,.$$

Considere em particular a hipótese de A e B serem matrizes simétricas, sendo A matriz de forma quadrática definida positiva.

c) Que se pode afirmar dos valores próprios de A? e dos de A^{-1}?

d) Prove que nas condições indicadas, λ é sempre real.

IV

4137 — Seja

T) $\Delta_n(x), \Delta_{n-1}(x), \cdots \Delta_2(x), \Delta_1(x), \Delta_0(x)$

uma cadeia principal própria da matriz $|A + x\,I|$ (A é simétrica real e de ordem n). (Em cadeira própria dois Δ_i consecutivos não são idênticamente nulos).

a) Quantas variações perde a sucessão T) na passagem de $-\infty$ a $+\infty$?

b) Estude o comportamento da sucessão na passagem por um ponto c que não anula $\Delta_n(x)$.

c) Prove que $\Delta_n(x)$ tem exactamente n raízes reais.

d) Mostre que se μ é raíz de multiplicidade α de $\Delta_n(x)$ é de multiplicidade $\alpha - i$ para Δ_{n-i} $(i = 1, 2, \cdots \alpha - 1)$

e) Em que condições pode T) considerar-se como uma sucessão de Sturm?

Comente os resultados para o efeito do estudo dos valores próprios de A.

F. C. L. — Álgebra Superior — 2.º Exame de Frequência — 2.ª chamada — 15-6-1955.

I

4138 — Sejam r_1, r_2, r_3 as 3 raízes de equação $x^3 + p\,x + q = 0$. Construa, utilizando a teoria das funções simétricas a equação cujas raízes são

$$\alpha_1 = (r_1 - r_2)(r_1 - r_3)$$
$$\alpha_2 = (r_2 - r_1)(r_2 - r_3)$$
$$\alpha_3 = (r_3 - r_1)(r_3 - r_2)$$

II

4139 — Seja $f(x)$ um polinómio de grau n, com n raízes reais e distintas:

a) prove que $f(\alpha) \cdot f''(\alpha) < 0$ qualquer que seja a raíz α de $f'(x)$.

b) Designem $g(x)$ e $r(x)$ o cociente e o resto da divisão de $f(x)$ por $f'(x)$. Prove que $r(x)$ é de grau $n-2$ e as suas raizes separam as de $f'(x)$ e que as raízes de $g(x) \cdot r(x)$ separam as de $f(x)$.

c) Prove, pelas condições indicadas, que a sucessão de FOURIER de $f(x)$ relativa ao intervalo $(-\infty, +\infty)$ é uma sucessão de STURM.

d) Faça pelo método de STURM a contagem das raízes reais da equação

$$x^5 + 5\,p\,x^3 + 5\,p^2 x + 1 = 0 .$$

III

4140 — Sejam $H_1, H_2, \cdots H_\mu$ com $\mu = \binom{n}{r}$ os menores de ordem r da matriz $A\,(n \times n)$ contidas nas suas r primeiras linhas e $K_1, K_2, \cdots, K_\mu$ os respectivos complementos algébricos.

a) Por que motivo é

$$|A\,A^*| = \left(\sum_1^{\mu} H_i K_i\right)\left(\sum_1^{\mu} H_j K_i\right)?$$

b) Considere a hipótese das r primeiras linhas, constituindo a sub-matriz B, serem perpendiculares às restantes $r-n$ formando a sub-matriz C.

Justifique as seguintes igualdades:

$$|A\,A^*| = |B\,B^*|\,|C\,C^*| = \left(\sum_1^{\mu} H_i^2\right)\left(\sum_1^{\mu} K_j^2\right).$$

c) Deduza do confronto das relações anteriores que

$$\sum (H_i K_j - H_j K_i)^2 = 0 \qquad (i \neq j)$$

e que, portanto, nas condições indicadas, cada menor H_i é proporcional ao seu complemento algébrico.

d) Comente deste ponto de vista o comportamento de uma matriz A ortogonal.

IV

4141 — a) Prove que $S^*\,C\,S$ é matriz simétrica sempre que C seja matriz simétrica.

b) Mostre que se $A\,(n \times n)$ é decomponível num produto $A = B\,C$ de matrizes simétricas o mesmo acontece com qualquer matriz semelhante a A.

c) Tendo em atenção que

$$\begin{bmatrix} 0 \cdots & 0\,\lambda \\ 0 \cdots & \lambda\,1 \\ 0 \cdots \lambda & 1\,0 \\ \cdots\cdots & \\ \lambda\,1\,0 \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0\,0 \cdots 0\,0\,1 \\ 0\,0 \cdots 0\,1\,0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ 1\,0 \cdots 0\,0\,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\,0 & \cdots 0 \\ 1\,\lambda & \cdots 0 \\ 0\,1\,\lambda & \cdots 0 \\ \cdots\cdots & \\ 0 \cdots & 1\,\lambda \end{bmatrix}$$

demonstre que toda a matriz quadrada é decomponível num produto de matrizes simétricas.

d) Mostre que a matriz simétrica real, definida positiva é congruente com matriz identidade por transformação real. Conclua daqui que na decomposição

$$A = B\,C$$

sendo B e C matrizes simétricas reais, B só é definida positiva se A for semelhante a uma matriz diagonal real.

GEOMETRIA PROJECTIVA

I

F. C. L. — GEOMETRIA PROJECTIVA — **Exame final — 1.ª época — 2.ª chamada — 7-1955.**

4142 — a) Defina elementos conjugados e elementos polares em relação a uma cónica. Indique como uma cónica pode determinar involuções sobre as formas de 1.ª espécie do seu plano. Defina figuras polares recíprocas em relação a uma cónica e diversas auto-polares, enunciando os teoremas que a estes respeitam.

4143 — b) Defina homologia plana, enuncie o teorema que permite definir a sua característa e o respecpectivo corolário. Defina uma homologia especial e uma homologia hormónica. Enuncie as proposições que respeitam às rectas de fuga de uma homologia e defina as homologias particulares que conhece.

4144 — c) Defina quádricas regradas, enumere-as, enuncie os teoremas que respeitam às quádricas duplamente regradas e indique o número de rectas necessárias para definir uma quádrica duplamente regrada e qual a sua posição relativa.

II

4145 — a) Defina uma homologia que converte a circunferência circunscrita ao triângulo rectângulo $[A\,B\,C]$ dado, onde $\hat{A} = 90°$ e $\overline{AB} = \overline{AC}$, numa hipérbole equilátera com eixo paralelo à recta $\overline{BC}$. Eixos, assíntotas e vértices da hipérbole homológica. Tangentes paralelas a uma direcção escolhida.

4146 — b) Considere um $\Delta\,[M\,N\,P]$ isósceles $\overline{MN} = \overline{MP}$ e a parábola passando em N e P, e nesses pontos tangente a $\overline{MN}$ e $\overline{MP}$ respectivamente.

Determine:

a) o eixo e o vértice da parábola.

b) a tangente paralela à recta $\overline{MV}$ sendo V o vértice parábola.

ANÁLISE INFINITESIMAL

F. C. L. — CÁLCULO INFINITÉSIMAL — **2.° Exame de Frequência — 2.ª Chamada — 30-4-56.**

4147 — 1. Determine os extremos da função

$$u = x\,y\,z\,[1-(x+y+z)].$$

4148 — 2. Estude os pontos singulares e a envolvente da família de curvas $x(x-1)^2=(2-x)(y-\lambda)^2$.

4149 — 3. Considere a equação

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=n\,u$$

onde u é função de x, y e z e sejam ξ, η, ζ novas variáveis dadas por $\xi=\frac{x}{z}, \eta=\frac{y}{z}, \zeta=z$. Exprimindo du nas variáveis x, y e z e depois em ξ, η e ζ, aproveite os resultados para achar a transformada da equação dada quando x, y, z se substituem por ξ, η, ζ.

4150 — 4. Enuncie o teorema relativo à existência e derivabilidade dum sistema de funções implícitas e deduza as expressões das suas derivadas de primeira ordem em relação às variáveis de que dependem.

4151 — 5. Defina indicatrizes esféricas relativas a uma curva torsa e os vectores que considera para as suas definições; escreva a expressão das componentes de tais vectores relativas a um ponto de uma curva torsa definida por equações paramétricas em coordenadas cartesianas.

4152 — 6. Escreva a equação vectorial das superfícies regradas. Indique o significado das grandezas que nela figuram; defina superfícies empenadas e sua linha de estricção e enuncie a lei de CHASLES que respeita a tais superfícies.

I. S. C. E. F. — ANÁLISE MATEMÁTICA — **2.ª Prova prática — 3-5-1955.**

4153 — Máximos e mínimos da superfície de equação $z=x^3+y^3-3xy$.

R: *O sistema das duas primeiras derivadas parciais* $3x^2-3y=0, 3y^2-3x=0$ *tem as soluções* A (0,0), B (1,1). *Escreveram-se os resultados a formar o seguinte quadro*

		A (0,0)	B (1,1)
$p=\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y$	$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x$	$=0$	$=6$
$q=\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x$	$s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-3$	$=-3$	$=-3$
	$t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y$	$=0$	$=6$
	s^2-rt	>0	<0

No ponto A (0,0) *não há extremo e no ponto* B (0,0) *há um extremo; por serem* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}>0$ *há um mínimo igual a* $f(1,1)=-1$

4154 — Em que se transforma $b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$ quando se faz a mudança de variáveis $u=y+bx$, $v=y-bx$?

R: *A função* $f(x,y)$ *transforma-se em* $F(u,v)$ *e vem*

$$dz=\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv=\frac{\partial F}{\partial u}(dy+b\,dx)+\frac{\partial F}{\partial v}(dy-b\,dx)=$$
$$=\left(b\frac{\partial F}{\partial u}-b\frac{\partial F}{\partial v}\right)dx+\left(\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}\right)dy=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

donde resulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}=b\frac{\partial F}{\partial u}-b\frac{\partial F}{\partial v} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}$$

Calculando as diferenciais de $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ *temos*

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=b\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}du+b\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}dv-b\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}du-$$
$$-b\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}du=\left(b\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}-b\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}\right)(dy+b\,dx)+$$
$$+\left(b\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}-b\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)(dy-b\,dx)=$$
$$=\left(b^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}-b^2\frac{\partial^2 F}{dv\partial u}-b^2\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}+b^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)dx+$$
$$+\left(b\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}-b\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}+b\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}-b\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}\right)dy=$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dy$$

donde resulta

$$\frac{\partial^2 f}{dx^2}=b^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)$$

Anàlogamente

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}du+\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}dv+\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}du+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}dv=$$
$$=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}\right)(dy+b\,dx)+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)(dy-$$
$$-b\,dx)=\left(b\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+b\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}-b\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}-b\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)dx+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)dy=$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy$$

donde resulta

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

Agora, vem imediatamente com os valores achados:

$$b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2b^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}\right).$$

4155 — Calcular o volume do cilindroide cuja base em XOY é o segmento determinado na parábola $y^2=8x$ pela recta $x=2$, e cuja tampa é o plano $y+z=3$.

R: *O volume do cilindroide é dado por*

$$V=\iint_\Delta z\,dx\,dy$$

onde Δ *é a base e* $z=f(x,y)$ *é a equação da tampa; mas no caso que se está a considerar, a equação da tampa,* $z=3-y$, *muda de sinal nos pontos de* Δ *e deve decompor-se o segmento de parábola em duas partes por meio da recta* $y=3$ *traço da tampa no plano da base.*

Fixando então y *entre* -4 *e* 3, *as rectas paralelas a* OX *cortam a fronteira da base em pontos de abcissa* $\frac{y^2}{8}$ *e* 2. *Logo, o integral duplo relativo à parte* Δ_1 *da base onde* $z\geqslant 0$, *será*

$$V_1=\iint_{\Delta_1} z\,dx\,dy=\int_{-4}^{3}dy\int_{\frac{y^2}{8}}^{2}(3-y)\,dx=$$
$$=\int_{-4}^{3}\left(6-2y-\frac{3}{8}y^2+\frac{1}{8}y^3\right)dy=$$
$$=18-9-\frac{27}{8}+\frac{81}{32}+24+16-\frac{4^3}{8}-\frac{4^4}{32}$$

e vem
$$V_1=\frac{1029}{32}$$

O integral duplo relativo à parte Δ_2 *da base onde* $z\leqslant 0$, *será*

$$V_2=\iint_{\Delta_2}-z\,dx\,dy=-\int_3^4 dy\int_{\frac{y^2}{8}}^{2}(3-y)\,dx=$$
$$=-\int_3^4\left(6-2y-\frac{3}{8}y^2+\frac{1}{8}y^3\right)dy=\frac{5}{32}$$

Então, $$V=V_1+V_2=\frac{1034}{32}$$

Fixando x *entre* 0 *e* 2, *devido à natureza da fronteira da parte* Δ_1, *as rectas pararelas a* $\overrightarrow{OY}$ *cortam a fronteira de* Δ_1 *em pontos de ordenadas* $-\sqrt{8x}$ *e* $+\sqrt{8x}$, *sempre que* x *estiver entre* 0 *e* $\frac{9}{8}$; *as rectas paralelas a* $\overline{OY}$ *cortam a frontiirà de* Δ_1 *em pontos de ordenadas* $-\sqrt{8x}$ *e* 3, *quando* x *se conservar entre* $\frac{9}{8}$ *e* 2. *Portanto,*

$$V_1=\iint_{\Delta_1} z\,dx\,dy=\int_0^{\frac{9}{8}}dx\int_{-\sqrt{8x}}^{\sqrt{8x}}(3-y)\,dy+$$
$$+\int_{\frac{9}{8}}^{2}dx\int_{-\sqrt{8x}}^{3}(3-y)\,dx=\frac{1029}{32}$$

Para a parte Δ_2 *da base onde* $z\leqslant 0$, *vem*

$$V_2=\iint_{\Delta_2}-z\,dx\,dy=-\int_{\frac{9}{8}}^{2}dx\int_3^{\sqrt{8x}}(3-y)\,dy=\frac{5}{32}.$$

I. S. C. E. F. — ANÁLISE MATEMÁTICA — **2.ª prova prática — 4-5-1955.**

4156 — Em que se transforma a soma $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ quando se faz a mudança de variáveis $x=u\cdot\cos\theta-v\operatorname{sen}\theta$, $y=u\cdot\operatorname{sen}\theta+v\cos\theta$?

R: *Diferenciando temos* $\begin{cases} dx=du\cos\theta-dv\operatorname{sen} \\ dy=du\operatorname{sen}\theta+dv\cos\theta\end{cases}$

e resolvendo $\begin{cases} du=dx\cos\theta+dy\operatorname{sen}\theta \\ dv=-dx\operatorname{sen}\theta+dy\cos\theta.\end{cases}$

Como a função $z=f(x,y)$ *se transforma em* $F(u,v)$, *temos*

$$dz=\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv=\frac{\partial F}{\partial u}(dx\cdot\cos\theta+dy\operatorname{sen}\theta)+$$
$$+\frac{\partial F}{\partial v}(-dx\operatorname{sen}\theta+dy\cos\theta)=\left(\frac{\partial F}{\partial u}\cos\theta-\frac{\partial F}{d v}\operatorname{sen}\theta\right)dx+$$
$$+\left(\frac{\partial F}{\partial u}\operatorname{sen}\theta+\frac{\partial F}{\partial v}\cos\theta\right)dy=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

donde se conclui

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\cos\theta-\frac{\partial F}{\partial v}\operatorname{sen}\theta \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\operatorname{sen}\theta+\frac{\partial F}{\partial v}\cos\theta\,.$$

Portanto

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\cos^2\theta-2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}\operatorname{sen}\theta\cos\theta+$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2\operatorname{sen}^2\theta+\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\operatorname{sen}^2\theta+2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}\operatorname{sen}\theta\cos\theta+$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2\cos^2\theta=\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2.$$

4157 — Máximos e mínimos da superfície de equação $z=\frac{y^3}{3}+\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-4\right)y-x^2\left(\frac{2}{3}x+1\right)+1$.

R: *O sistema das duas derivadas parciais* $x(x+1)(y-2)=0\,,\; y^2+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-4=0$ *tem as soluções* $A(0,2)\,B(0-2)\,C\left(-1,\sqrt{\frac{23}{6}}\right)\,D\left(-1,-\sqrt{\frac{23}{6}}\right)\,E\left(-\frac{3}{2},2\right)$. *Os resultados encontram-se no seguinte quadro:*

$p=\frac{\partial z}{\partial x}=x^2y+xy-2x^2-2x$	$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2xy+y-4x-2$
$q=\frac{\partial z}{\partial y}=y^2+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-4$	$s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x^2+x$
	$t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2y$

	$A(0,2)$	$B(0,-2)$	$C\left(-1,\sqrt{\frac{23}{6}}\right)$
r	$=0$	$=-4$	$=2-\sqrt{\frac{23}{6}}>0$
s	$=0$	$=0$	$=0$
t	$=4$	$=-4$	$=2\sqrt{\frac{23}{6}}$
s^2-rt	$=0$	$=-16$	<0

	$D\left(-1,-\sqrt{\frac{23}{6}}\right)$	$E\left(-\frac{3}{2},2\right)$
r	$=2+\sqrt{\frac{23}{6}}$	$=0$
s	$=0$	$=\frac{3}{4}$
t	$=-2\sqrt{\frac{23}{6}}$	$=4$
s^2-rt	>0	>0

Nos pontos D *e* E *não há extremos. No ponto* C *há extremo e como* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ *e* $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ *são positivos o extremo é um mínimo* $z=f\left(-1,\sqrt{\frac{23}{6}}\right)$. *No ponto* B *há um máximo de valor* $z=f(0,-2)$. *A forma quadrática correspondente à segunda derivada no ponto* A, *reduz-se a* $\varphi(\lambda_1,\lambda_2)=4\lambda_2^2$ *e, vem sempre positiva para todos os pares* $(\lambda_1,\lambda_2\neq 0)$ *e só se anula para* $\lambda_2=0$. *A superfície tem secções com* mínimos *nos planos* $\frac{x}{\lambda_1}=\frac{y-2}{\lambda_2}\;(\lambda_2\neq 0)$. *O estudo prossegue apenas com o plano* $y=2\;(\lambda_2=0)$. *Tem-se:* $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\lambda_1^3\equiv 0$ *e* $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}\lambda_1^4\equiv 0$ *e todas as outras formas são identicamente nulas em* λ_1, *com* $\lambda_2=0$. *A secção que a superfície tem no plano* $y=2$ *reduz-se a uma recta. Portanto, a superfície tem no ponto* $A(0,2)$ *um* mínimo no sentido lato *ou largo, com o valor* $z=f(0,2)$. *Os mínimos da superfície dispõem-se ao longo da recta:* $y=2\,,\,z=f(0,2)$.

4158 — Calcular o volume determinado pelo plano $x=0$ na superfície de revolução gerada pela revolução da curva $y^2+2p(x-a)=0\,,z=0$ em torno de $\overrightarrow{OX}$.

R: *A superfície é um paraboloide de revolução e o volume do sólido é*

$$V=\int_0^a dx\iint_{S(x)}dy\,dz=\int_0^a dx\left[\pi\left(\sqrt{-2p(x-a)}\right)^2\right]$$

onde S(x) *representa o círculo determinado no paraboloide pelo plano* $x=K$ *com* K *entre* 0 *e* a. *Tem-se*

$$\iint_{S(x)}dy\,dz=\pi\left(\sqrt{-2p(x-a)}\right)^2$$

visto que esses círculos têm raio $\sqrt{-2p(x-2)}$; *este raio é real visto que* $0\leqslant x\leqslant a$. *Resulta*

$$V=\pi\int_0^a-2p(x-a)\,dx=-2p\pi\left[\frac{x^2}{2}-ax\right]_0^a=a^2p\pi.$$

I. S. C. E. F. — Análise Matemática — 2.º Exame de frequência — 1-6-1955.

4159 — Dado um sistema de m equações a $m+n$ incógnitas

$$F_i(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n)=0 \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

enuncie as condições em que ele se pode resolver nas incógnitas $x_1,x_2,\cdots,x_m$, expressas cada uma nos $y_1,y_2,\cdots,y_n$.

Considere-se o caso particular

$$F_i=y_i-f_i(x_1,x_2,\cdots,x_m)=0 \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

e demonstre, à luz da proposição anterior, a relação que há entre os iacobianos

$$\frac{\partial\,(y_1\,y_2\cdots y_m)}{\partial\,(x_1\,x_2\cdots x_m)}\,,\;\frac{\partial\,(x_1\,x_2\cdots x_m)}{\partial\,(y_1\,y_2\cdots y_m)}$$

Em que condições o sistema

$$\begin{cases}x^2-a^2\,y-z^3=0\\x^2+y^3+a\,z=0\end{cases}\quad (a \text{ é um parâmetro real})$$

define uma curva em torno da origem? Considere a família de cilindros que projectam aquelas curvas sobre o plano YOZ e determine o cilindro envolvente.

R: *As condições enunciam-se assim:*

Dado o sistema de m *equações a* m + n *incógnitas*

$$F_i\,(x_1\,,x_2\,,\cdots,x_m\,,y_1\,,y_2\,,\cdots,y_n)=0\qquad(i=1\,,2\,,\cdots)$$

1.º) *se o sistema é verificado no ponto* $P_0\,(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0\,,\ y_1^0,y_2^0,\cdots,y_n^0)$ *de* R_{m+n}

2.º) *se as funções* F_i *são contínuas no rectângulo centrado em* P_0

$$|y_q-y_q^0|<b\,,\;|x_r-x_r^0|<a\quad q=1,2,\cdots,n\quad r=1,2\cdots,m$$

e neste rectângulo, admitem derivadas parciais contínuas

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_r}\;\cdot\;(i=1\,,2\,,\cdots,m)\quad(r=1\,,2\,,\cdots,m)$$

3.º) *se o determinante funcional*

$$\frac{\partial\,(F_1\,,F_2\,,\cdots,F_m)}{\partial\,(x_1\,,x_2\,,\cdots,x_m)}$$

é diferente de zero no ponto $P_0\,(x_1^0\,,x_2^0\,,\cdots x_m^0\,,y_1^0\,,\cdots y_n^0)$

Nestas condições existem m *funções*

$$x_r=\varphi_r\,(y_1\,,y_2\,,\cdots,y_n)\qquad(r=1\,,2\,,\cdots m)$$

definidas, finitas e contínuas, em certo rectângulo de R_n *centrado em* $Q_0\,(y_1^0\,,y_2^0\,,\cdots y_n^0)$ *e definido pelas desigualdades*

$$|\,y_q-y_q^0\,|<a'\qquad(q=1\,,2\,,\cdots,n)$$

A solução indicada é única, e toma em Q_0 *os valores* x_r^0.

Para aplicar esta proposição ao sistema particular

$$F_i=y_i-f_i\,(x_1\,,x_2\,,\cdots,x_m)=0\quad(i=1\,,2,\cdots,m)$$

supomos que em certo ponto $P_0\,(y_1^0\,,y_2^0\,,\cdots,y_m^0\,,x_1^0\,,x_2^0\,,\cdots,x_m^0)$ *se tem*

$$\frac{\partial\,(F_1\,,F_2\,,\cdots,F_m)}{\partial\,(x_1\,,x_2\,,\cdots,x_m)}=\frac{\partial\,(y_1\,,y_2\,,\cdots y_m)}{\partial\,(x_1\,,x_2\,,\cdots x_m)}\neq 0$$

e ainda as outras condições indicadas; então, existem funções

$$x_r=\varphi_r\,(y_1\,,y_2\,,\cdots,y_m)\quad(r=1\,,2\,.\cdots m)$$

Ora, entre os iacobianos há a relação seguinte

$$\frac{\partial\,(F_1\,,F_2\,,\cdots,F_m)}{\partial\,(y_1\,,y_2,\cdots,y_m)}=\frac{\partial\,(F_1\,F_2,\cdots,F_m)}{\partial x_1,(x_2\cdots,x_m)}\times\frac{\partial\,(x_1\,,x_2\,,\cdots,x_m)}{\partial\,(y_1\,,y_2\,,\cdots,y_m)}$$

donde resulta imediatamente, na vizinhança do ponto $Q_0\,(y_1\,,y_2\,,\cdots y_m)$, *a relação*

$$1=\frac{\partial\,(y_1 y_2,\cdots,y_m)}{\partial\,(x_1\,x_2,\cdots,x_m)}\times\frac{\partial\,(x_1\,x_2\,,\cdots,x_m)}{\partial\,(y_1\,y_2,\cdots,y_m)}$$

O sistema

$$\begin{cases}x^2-a^2\,y-z^3=0\\x^2+y^3+a\,z=0\end{cases}$$

é satisfeito pelas coordenadas da origem, e a matriz funcional

$$\left\|\begin{matrix}2x & -a^2 & -3z^2\\2x & 3y^2 & a\end{matrix}\right\|$$

tem característica dois, visto que: $\begin{vmatrix}-a^2 & -3z^2\\3y^2 & a\end{vmatrix}\neq 0$

na origem, se $a\neq 0$

Então existem duas funções

$$\begin{cases}y=y\,(x)\\z=z\,(x)\end{cases}$$

que são equações paramétricas da curva, intersecção das duas superfícies nas vizinhanças da origem.

Os cilindros projectantes são os que têm a equação obtida eliminando x, *isto é:* $a^2\,y+z^2+y^3+a\,z=0$

Derivando esta equação em ordem ao parâmetro a; $2\,ay+z=0$ *e a eliminação do parâmetro conduz ao cilindro envolvente*

$$\frac{z^2}{4\,y}+z^2+y^3-\frac{z^2}{2\,y}=0$$

ou

$$z^2\,(y-1)+y^4=0$$

4160 — Diga o que se entende por cilindroide de base quadrável Δ determinado por $z=f\,(x\,,y)$.

Quando é que este cilindroide é cubável, e qual é o seu volume expresso como limite dos volumes de poliedros?

Demonstre que a condição necessária e suficiente para o referido cilindroide ser cubável, é que $f\,(x\,,y)$ seja integral em Δ.

Se a fronteira Γ do domínio Δ é a curva formada pelo arco $\widehat{AB}$ da parábola $y^2=x$, e o segmento de recta $\overline{AB}$ onde $A\,[4\,,2]$ e $B\,[4\,,-2]$; se a função é $z=x\,y^2+y^4$; justifique o facto de se poder exprimir o volume do cilindroide com o integral curvilíneo

$$\int_\Gamma\left(\frac{x^2}{2}\,y^2+x\,y^4\right)dy$$

Calcule o volume do cilindroide.

R: *O cilindroide* C *é cubável, se e só se, existe uma sucessão de poliedros contendo* C *e de volumes* P_n, *e uma sucessão de poliedros contidos em* C *e de volumes* p_n, *de tal modo que a todo o* $\delta>0$ *arbitrário, se pode fazer corresponder* N *tal que*

$$P_n-p_n<\delta\quad para\quad n\geq N$$

O volume de cilindroide é então $V = \lim P_n = \lim p_n$

O volume pode exprimir-se com aquele integral curvilíneo devido à formula de RIEMANN: $\iint_\Delta \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy = \int_\Gamma Q(x, y)\, dy$.

Tem-se:

$$\int_\Gamma \left(\frac{x^2}{2} y^2 + x y^4\right) dy = \iint_\Delta (x y^2 + y^4)\, dx\, dy =$$

$$\int_0^4 dx \int_{-\sqrt{x}}^{+\sqrt{x}} (x y^2 + y^4)\, dy = 2\int_0^4 dx \left(x \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)_0^{\sqrt{x}} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) \int_0^4 x^{5/2}\, dx = 2 \cdot \frac{2^3}{3 \cdot 5} \cdot \frac{2}{7} \cdot 2^7 =$$

$$= \frac{2^{16} \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 2^{16}}{7\,!}$$

4161 — Defina ponto ordinário e ponto singular duma curva plana; diga como se estuda a curva na vizinhança dum seu ponto singular e classifique as singularidades.

Indique a natureza dos pontos singulares da curva

$$x(x^2 + y^2) = a(y^2 + 3x^2)$$

R: *Se* $f(x, y) = 0$ *é a equação da curva, as condições* $f(x_0, y_0) = 0$ e $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \neq 0$ *ou* $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \neq 0$ *permitem afirmar a existência dum arco de curva contínua passando por* $P(x_0, y_0)$ *e admitindo uma tangente ordinária nesse ponto que será um ponto ordinário da curva.*

Se $f(x, y) = 0, \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ *simultâneamente num mesmo ponto, o ponto é singular.*

A fórmula de TAYLOR, *na vizinhança dum ponto singular*

$$f(x + h, y + k) = \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right)^{(2)} + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right)^{(n)} + R_{n+1}(x)$$

permite estudar a vizinhança da ponto e determinar as tangentes.

A curva tem um ponto isolado na origem.

4162 — Defina curvatura duma curva, tanto no caso da curva plana como da curva torsa. Diga o que é a circunferência de curvatura e deduza as expressões mais correntes do raio de curvatura.

Como determina a evoluta duma curva plana e que relação tem ela com os conceitos anteriores?

I. S. C. E. F. — ANÁLISE MATEMÁTICA — **Exame final escrito — 15-10-1955.**

4163 — Prove que o integral indefinido de RIEMANN é função contínua e estude as condições de existência da derivada.

Calcule a derivada da função

$$F(z) = \int_{a(z)}^{b(z)} f(x)\, dx$$

Qual é o valor da constante a qne torna racional a primitiva de

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-a)}{(x^2-1)^2}?$$

R: *No caso de* $f(x)$ *ser contínua para* $x = a$ *e* $x = b$, *tem-se*

$$F'(z) = f[b(z)] \cdot b'(z) - f[a(z)] \cdot a'(z)$$

Pondo

$$\frac{(x-2)(x-a)}{(x^2-1)^2} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}$$

vem

$$x^2 - (a+2)x + 2a = (B+D)x^3 + (A - B + C + D)x^2 + (-2A - B + 2C - D)x + (A + B + C - D)$$

eliminando A *e* C *entre o segundo e quarto coeficientes vem*

$$B - D = a - \frac{1}{2}$$

e com

$$B + D = 0$$

vem

$$B = -D = \frac{a}{2} - \frac{1}{4}$$

Vê-se pois que a primitiva é racional para $a = \frac{1}{2}$.

4164 — Diga quando existem os integrais

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \qquad \int_b^a \varphi(x)\, dx$$

sendo $\varphi(x)$ infinitamente grande na vizinhança esquerda de $x = b$ $(a < b)$.

Enuncie e demonstre condições suficientes de existência daqueles integrais: utilize essas condições para definir as funções $\beta(a, b)$ e $\Gamma(a)$.

4165 — Defina envolvente duma família de curvas planas: diga como se determina a equação discutindo o sistema a que se chega.

A determinação da envolvente de $f(x, y, a) = 0$ não se pode fazer quando esta equação está resolvida relativamente ao parâmetro a: porque?

Determine a envolvente da família das rectas cada uma das quais, com duas rectas dadas, forma um triângulo de área dada $2K$.

R: *A determinação da envolvente de* $f(x, y, a) = 0$ *conduz ao sistema*

$$\begin{cases} f(x, y, a) = 0 \\ f'_a(x, y, a) = 0 \end{cases}$$

Para deste sistema passarmos a outro, equivalente, onde

$$\begin{cases} a = \varphi(x, y) \\ f'_a(x, y, a) = 0 \end{cases}$$

a primeira equação deste último sistema deverá ser a função de x, y *implicitamente definida pela primeira equação do outro sistema,* $f(x, y, a) = 0$, *e é precisamenté o que sucederá quando a resolvermos em ordem ao parâmetro* a.

Mas, a existência dessa função implícita só ficará assegurada nos pontos (x, y) *onde for* $f'_a(x, y, a) \neq 0$ *(teorema da função implícita)*

Daqui resulta geralmente a não equivalência dos dois sistemas.

Tomemos as duas rectas dadas para sistema de eixos e seja w *o ângulo dessas duas rectas.*

A equação da recta variável será $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ *e a área do triângulo formado pelas três rectas*

$$2K = \frac{1}{2} a b \operatorname{sen} w$$

onde a *é o parâmetro variável*

Eliminando o parâmetro entre as duas equações

$$\begin{cases} a^2 \cdot y \cdot \operatorname{sen} w - a \cdot 4K + 4Kx = 0 \\ -\dfrac{x}{a^2} + \dfrac{y \operatorname{sen} w}{4K} = 1 \end{cases}$$

resulta, por ser $a^2 = \dfrac{4Kx}{y \operatorname{sen} w}$ *e* $a = \pm\sqrt{\dfrac{4Kx}{y \operatorname{sen} w}}$

$$\mp\sqrt{\frac{4Kx}{y \operatorname{sen} w}} + 2x = 0$$

ou $\dfrac{4Kx}{y \operatorname{sen} w} = 4x^2$ *ou* $xy = \dfrac{K}{\operatorname{sen} w}$

A envolvente é uma hipérbole que tem por assíntotas as duas rectas dadas.

4166 — O que é uma equação diferencial linear e homogénea?

Enuncie algumas propriedades devídas à lineariedade e homogeneidade da equação.

Demonstre que, se

$$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$$

são integrais da equação $p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p^{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$ linearmente independentes na vizinhaça de $x = x_0$, onde $p_0(x_0) \neq 0$, aqueles mesmos integrais serão linearmente independentes em todo e qualquer intervalo onde $p_0(x) \neq 0$.

Resolva a equação $y''' - 4y'' + 9y' - 10y = 0$ sabendo que e^{2x} é um integral.

R: *A demonstração pedida obtem-se a partir da fórmula de Liouville, que se pede para estabelecer.*

A equação característica $p^3 - 4p^2 + 9p - 10 = 0$ *deverá admitir a raiz* $p = 2$ *e com efeito:* $p^3 - 4p^2 + 9p - 10 = (p-2)(p^2 - 2p + 5)$

As outras raízes da equação característica são: $1 \pm 2i$

O integral geral é: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x \cos 2x + c_3 e^x \operatorname{sen} 2x$

MECÂNICA RACIONAL

F. C. P. — Mecânica Racional — **1.º Exame de frequência — 2.ª chamada — 3-1956**

4167 — 1) Um movimento rígido plano resulta, por composição, das rotações

$\mathbf{w}_1(0, 0, (1-4t); 0, 0, 0)$ $\mathbf{w}_2(0, 0, 4t; 12t^2, 0, 0)$

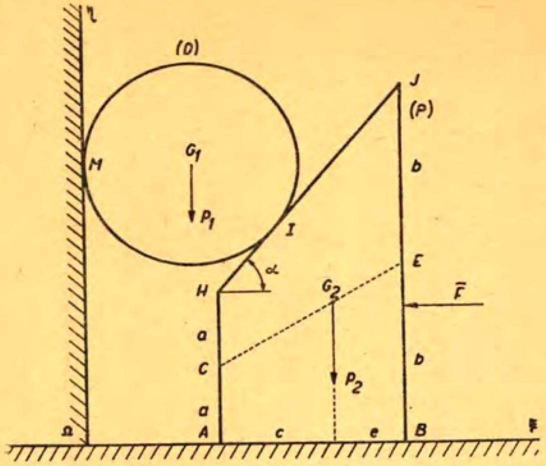
e da translação $\tau = 24t \cdot \mathbf{J}$. (Unidades: metro e segundo).

1*a*) Exprima em $f(t)$ a rotação intantânea $\mathbf{w}$ do movimento, as coordenadas do centro instantâneo de rotação $I(\xi_1, \eta_1)$, as componentes da velocidade de permutação V deste centro instantâneo e as componentes da aceleração do ponto que momentâneamente coincide com ele.

1*b*) Exprima em $f(t, \xi, \eta)$ as componentes da aceleraçãode um ponto $M(\xi, \eta)$ qualquer da figura móvel e, por integração, tire das expressões obtidas as leis do movimento desse ponto sob forma paramétrica. Mostre acessòriamente que existe um ponto na figura móvel que descreve no plano fixo o eixo $\Omega\eta$. Eixos de referência do movimento: $\Omega\xi\eta$.

1*c*) Deduza as equações das curvas polares: a da base em coordenadas cartesianas, a da rolante em coordenadas polares.

4168 — 2) Um sistema é constituído como a figura mostra. Disco circular e trapézio são homogéneos e pesam respectivamente p_1 e p_2. Conhecidos estes pesos, as dimensões do sistema e as posições dos centros de massa G_1 e G_2, calcular a força F que deve ser aplicada horizontalmente ao trapézio à altura de G_2,



para equilibrar o sistema na configuração representada. O cálculo deverá ser feito

2a) pelo teorema do trabalho virtual

2b) pelo método das reacções, analítica ou geomètricamente.

2c) Exprima em função dos pesos p_1, p_2, das dimensões do sistema e dos parâmetros de que a sua configuração depende, todas as reacções que intervem no estudo do seu equilibrio, indicando para cada uma delas grandeza, direcção e sentido.

Não há atrito.

4169—3) Examine se a mediana do trapézio considerado no problema de estática pode ser eixo principal de inércia nalgum dos seus pontos. (Assinala-se que é nulo o integral $\int x_1 y_1 \, dS$ estendido á área do trapézio, em que x_1 e y_1 são coordenadas obliquas referidas á mediana e a uma paralela às bases).

4170—4) Mostre que há pontos M de um sólido em movimento cujas velocidades contemporâneas tem suportes concorrentes. Prove que estes suportes pertencem a um cone de segunda ordem e que o lugar dos pontos M considerados é geralmente uma cúbica de dupla curvatura. (Lembra-se que os eixos coordenados para tratar o problema posto podem ser escolhidos em posição particular que simplifica os cálculos e põe mais em evidência as conclusões a estabelecer; e acrescenta-se que uma cúbica de dupla curvatura resulta da intersecção de duas quádricas com uma geratriz rectilinea comum).

NOTA: O aluno deve procurar responder às preguntas 1a), 1b), 2a), 2b) e 2c). As preguntas 3) e 4) são facultativas.

F. C. P. — Mecânica Racional — 1.º Exame de Frequência (1.ª chamada) — 2-1956.

4171 — A) Dado o estado cinético definido pela expressão

$$\mathbf{v}_m = [(-4 + Y + 3Z)\,\mathbf{I} + (-14 - X - 2Z)\,\mathbf{J} + \\ + (6 - 3X + 2Y)\,\mathbf{K}] \cdot f(t) \quad \text{(unidades } m, s\text{)},$$

em que X, Y, Z representam as coordenadas de um ponto M num referencial $OXYZ$ fixo no espaço e $f(t)$ uma função de t a determinar:

1) mostre que corresponde a um movimento rígido;

2) calcule as componentes da rotação instantânea do movimento;

3) escreva as equações do eixo helicoidal tangente, calcule as suas coordenadas vectoriais, determine o passo do movimento e mostre que o estado cinético considerado corresponde a um movimento permanentemente helicoidal;

4) examine se o movimento é dextrorsum ou sinistrorsum;

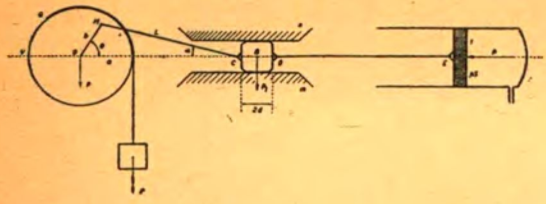
5) calcule, em módulo, a velocidade, a aceleração tangencial e a acelaração normal dos pontos distantes $3\,m$ do eixo helicoidal;

6) fixe a função $f(t)$ de modo que o movimento seja uniformemente retardado a partir do instante $t = 0$ e cesse de sê-lo no instante $t = 5\,s$;

7) suponha que o referencial $OXYZ$ do movimento considerado nas alíneas anteriores — agora movimento relativo — está animado de um movimento de transporte, em relação a $O_1 X_1 Y_1 Z_1$, composto de uma rotação $\Omega = \Omega(t)\,\mathbf{K}$ em volta do eixo $O_1 Z_1$, com o qual OZ a todo o momento coincide, e de uma translação $\tau = \tau(t)\,\mathbf{K}$ (paralela a este eixo), e deduza uma expressão vectorial da acelaração complementar de um ponto H situado sobre o eixo do movimento relativo;

8) supondo $\Omega(t)$ dada, poderá determinar $\tau(t)$ de modo que o movimento absoluto implícito na alínea anterior seja constantemente tangente a uma rotação? No caso afirmativo que valor deve atribuir a $\tau(t)$?

4172—B) Um sistema plano é constituido como a figura indica. Um embolo transmite o efeito pS da pressão p, que se exerce sobre a sua face 1, ao botão da manivela OM solidaria com o volante V móvel em volta do seu eixo. Num ponto Q de V está fixo um cabo que se apoia contra a sua períferia e pende verticalmente sob a acção de um peso P. Peso do volante p; peso da placa rígida $B:p_1$; despreze os pesos próprios do cabo, das barras MO, MC, DE;



volante e placa B são homógeneos; não há atrito entre a placa e as guias m e n, nem em nenhuma das articulações, nem no eixo de V. As articulações são pontuais.

9) Para a configuração desenhada, determine o valor da pressão sobre o êmbolo que equilibra um peso dado P, pelo método das reacções;

10) Determine completamente as reacções que se desenvolvem em O e em M e entre a placa B e as guias m (ou n);

11) Partindo de P como um dado determine gràficamente as reacções exteriores e interiores e o valor da força pS, correspondentes à configuração de equilíbrio considerada em 9);

12) Determine pS pela aplicação do teorema do trabalho virtual.

4173 — C) O centro das acelerações de um movimento rígido paralelo a um plano fixo poderá coincidir momentâneamente com o centro instantâneo de rotação? Se a resposta for afirmativa caracterize um caso em que aquela coincidência se verifique.

4174 — D) Deduza as condições analíticas a que devem satisfazer as coordenadas vectoriais $(\mathbf{u}, \mu)$ de quatro rectas para ser possível localizar sobre elas:

D1) um sistema de forças em equilíbrio.

D2) dois sistemas de forças, linearmente independentes, separadamente também em equilíbrio.

NOTA — O aluno deve procurar responder às preguntas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12.

As preguntas 8, 11, C e D são facultativas.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

108 — Premier colloque sur les équations aux dérivées partielles; Second colloque sur les équations aux dérivées partielles — Centre Belge de Recherches Mathématiques — Georges Thone, Liège et Masson & Cie., Paris — 1954.

O Centro Belga de Investigação Matemática consagrou à teoria das equações às derivadas parciais dois colóquios que se realizaram em Lovaina e Bruxelas, em Dezembro de 1953 e Maio de 1954, respectivamente. Participaram nestas reuniões além de matemáticos belgas vários especialistas estrangeiros convidados pelo Centro. As comunicações foram publicadas em dois fascículos, de que a seguir publicamos a relação.

Primeiro colóquio: A. Lichnerowicz, Equations de Laplace et espaces harmoniques — Y. Fourès, Résolution du problème de Cauchy pour les équations hyperboliques du second ordre non linéaires — J. Delsarte, Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles à une seule fonction inconnue, et sur une généralisation de la théorie des fonctions de Bessel et des fonctions hypergéométriques — G. Doetsch, L'application de la transformation bidimensionnelle de Laplace dans la théorie des équations aux dérivées partielles — Th. Lepage, Equations du second ordre et transformations symplectiques — P. Gillis, Sur certaines classes d'équations aux dérivées partielles du second ordre, non linéaires — R. Sauer, Remarques géométriques sur les équations aux dérivées partielles du second ordre quasilinéaires et homogènes.

Segundo colóquio: Mauro Picone, Sur un problème nouveau pour l'équation linéaire aux dérivées partielles de la théorie mathématique classique de l'élasticité — Laurent Schwartz, Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles elliptiques — J. L. Lions, Problèmes aux limites de type mixte, Jean Leray, Intégrales abéliennes et solutions élémentaires des équations hyperboliques — M. Brelot et G. Choquet, Polynômes harmoniques et polyharmoniques — G. de Rham, Sur certaines équations de la théorie des formes différentielles harmoniques — H. G. Garnir — «Fonctions» de Green pour les problèmes aux limites de l'équation des ondes — L. Fantappiè, Les nouvelles méthodes d'intégration, en termes finis, des équations aux dérivées partielles.

M. Z.