ANO XVI—N.º 62 GAZETA DE MATEMÁTICA DEZEMBRO—1955

EDITOR: *Gazeta de Matemátiac, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º, Dto.—Telef. 771943—LISBOA-N.

Os espaços métricos e a análise clássica: o método de ponto fixo

Com a publicação do artigo intitulado, *Os espaços métricos e a análise clássica: o método de ponto fixo*, pretende a «Gazeta de Matemática» criar uma secção onde, de maneira tanto quanto possível acessível e completa, sejam expostos certos temas de Matemática que entram no quadro das disciplinas professadas nas nossas Faculdades de Ciências embora, pela extensão dos programas dessas disciplinas, nem sempre nelas possam tomar o desenvolvimento adequado.

A idéia não é estranha aos objectivos que sempre nortearam a «Gazeta de Matemática», pois o leitor pode fàcilmente encontrar em números anteriores da revista trabalhos de M. Zaluar Nunes, A. Sá da Costa e vários outros colaboradores, escritos com essa orientação. Só é novo o projecto de assiduidade com que se pretendem publicar agora essas exposições, — e isso justifica, supomos, que se crie uma secção própria onde hão-de aparecer todos os trabalhos desta índole.

É claro que uma secção com estas características há-de ser dirigida sobretudo (ou exclusivamente) aos estudantes de Matemática das nossas Escolas Superiores. E para que ela, na verdade, lhes interesse, deligenciaremos fazer uma sistematização clara da matéria de cada artigo; oferecer meios de trabalho através duma bibliografia completa e escolhida; e, finalmente, chamar a atenção para problemas que com o assunto da exposição se prendem, dando também, quando for caso disso, algumas das suas aplicações. Este plano não impõe, entretanto, que se reproduzam demonstrações demasiadamente longas, tiradas de obras ou revistas de fácil consulta; em tais casos, será preferível remeter o leitor para esses escritos.

Não há dúvida que uma secção desta natureza vale na medida em que corresponde à curiosidade ou às necessidades dos seus leitores. Por isso, e independetemente dos artigos que estão previstos para serem publicados nos próximos números, e cujos títulos se indicarão mais abaixo, a «Gazeta de Matemá. tica» prestará toda a atenção e procurará atender as sugestões que nesse sentido lhe comuniquem os seus leitores, considerando-as mesmo indispensáveis para garantir a vida da nova secção.

A seguir ao artigo acima citado, que foi propositadamente escrito por J. Dionísio, esperamos poder publicar os seguintes trabalhos: *Equações diferenciais totais e equações de derivadas parciais,* por J. Farinha e L. Albuquerque; *A álgebra abstracta e a teoria das matrizes*, por J. Dionísio; *Principais* *propriedades da transformação de Laplace*, por J. Farinha; *Teoremas fundamentais da teoria da aproximação*, por L. Albuquerque. Mas o enunciado do título destes artigos não significa, porém, que não possa ser dada a preferência a qualquer outro assunto que, de acordo com o que antes dissemos, nos seja sugerido pelos leitores da «Gazeta de Matemática».

L. Albuquerque, J. Dionísio e J. Farinha

---

§ 1. Espaços métricos.

Seja E um conjunto de elementos $x, y, z, \cdots$ em que se encontra definida uma relação de igualdade por virtude da qual dois elementos x e y ou são iguais, $x=y$, ou são diferentes, $x \neq y$, gozando o caso de igualdade das propriedades reflexiva ($x=x$), simétrica ($x=y$ implica $y=x$) e transitiva ($x=y$ e $y=z$ implicam $x=z$).

Consideremos por exemplo o conjunto dos pontos $x, y, \cdots$ de um plano. Seja O um ponto determinado deste plano e digamos que é $x=y$ se e só se x e y são pontos de uma mesma circunferência de centro em O. Esta relação é reflexiva, simétrica e transitiva e é por isso uma relação de igualdade.

A cada par ordenado (x, y) de elementos do conjunto E façamos corresponder um número real $\delta(x, y)$ nas seguintes condições:

δ_1) $\quad \delta(x, y) = 0$ se e só se $x = y$;

δ_2) $\quad \delta(x, y) \leqslant \delta(x, z) + \delta(y, z)$.

Dizemos então que $\delta(x, y)$ é a distância dos elementos ou *pontos* x e y e que E é um *espaço métrico*. δ_1 e δ_2 são propriedades conhecidas da distância de dois pontos em geometria (a segunda é a desigualdade triangular). São os *axiomas de distância* e destes decorrem ainda duas propriedades igualmente conhecidas:

δ_3) $\quad \delta(x, y) \geqslant 0$,

δ_4) $\quad \delta(x, y) = \delta(y, x)$.

Se em δ_2 fizermos $y = x$ vem $\delta(x, x) \leqq \delta(x, z) + \delta(x, z) = 2\,\delta(x, z)$ ou, por δ_1, $0 \leqq 2\,\delta(x, z)$ donde $\delta(x, z) \geqq 0$, que é δ_3 com z em lugar de y.

Para deduzir δ_4 ponha-se $z = x$ em δ_2; usando novamente δ_1 vem $\delta(x, y) \leqq \delta(y, x)$. Trocando x e y nesta desigualdade (o que é possível por serem x e y arbitrários) resulta $\delta(y, x) \leqq \delta(x, y)$. Tem-se portanto $\delta(x, y) \leqq \delta(y, x) \leqq \delta(x, y)$ o que exige $\delta(x, y) = \delta(y, x)$.

No conjunto do exemplo de há pouco defina-se $\delta(x, y) =$ diferença (em valor absoluto) dos raios das circunferências de centro em O em que estão situados os pontos x e y. O leitor verificará que a função $\delta(x, y)$ assim definida é uma distância, isto é, que ela satisfaz os axiomas δ_1 e δ_2.

Consideremos uma sucessão $\{x_n\}$ de pontos $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ de um espaço métrico E. Dado um número $\varepsilon > 0$ e arbitrário, pode acontecer que se tenha $\delta(x_m, x_n) < \varepsilon$ para além de uma certa ordem $N(\varepsilon)$, quer dizer, sempre que $m > N(\varepsilon)$ e $n > N(\varepsilon)$.

Dizemos então que a sucessão $\{x_n\}$ do espaço métrico E verifica a *condição de* Cauchy.

Um caso particular importante de sucessões que verificam a condição de Cauchy é o daquelas que admitem um limite. A sucessão $\{x_n\}$ tem um limite x, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ou $x_n \to x$, quando, dado $\varepsilon > 0$ e arbitrário, existe uma ordem $N(\varepsilon)$ (dependente, como é natural, de ε) a partir da qual, $n > N(\varepsilon)$, se tem $\delta(x, x_n) < \varepsilon$.

Suponhamos que $\{x_n\}$ admite outro limite x'. É então $\delta(x', x_n) < \varepsilon$ a partir de outra ordem $N'(\varepsilon)$. Tomando N'' igual ao maior dos inteiros N e N', vem, usando δ_2, $\delta(x, x') \leqq \delta(x, x_n) + \delta(x', x_n) < 2\,\varepsilon$; mas

$\delta(x, x')$ é um número determinado, ao passo que ε é arbitràriamente pequeno, logo $\delta(x, x')=0$, donde, por $\delta_1, x=x'$. Concluímos que nenhuma sucessão pode ter mais que um limite.

Demonstremos o que dissemos atrás: que sucessão $\{x_n\}$ com limite x satisfaz a condição de CAUCHY. Tomando uma ordem $N(\varepsilon)$ tal que $\delta(x, x_n)<\frac{\varepsilon}{2}$ para $n>N(\varepsilon)$, temos $\delta(x_m, x_n) \leq \delta(x_m, x)+\delta(x_n, x)<\varepsilon$ para $m>N(\varepsilon)$ e $n>N(\varepsilon)$.

Sucessão que satisfaça a condição de CAUCHY pode, porém, não admitir limite. É o que se passa no conjunto dos números racionais $x, y, \cdots$ metrizado com a distância $\delta(x, y)=|x-y|$, sempre que a sucessão considerada tem limite e este é irracional. Mas já no caso dos números reais (com a mesma função de distância) admitir limite é o mesmo que satisfazer a condição de CAUCHY (teorema de CAUCHY-BOLZANO). Sempre que tal aconteça, dir-se-á do espaço E que é um espaço métrico *completo*.

§ 2. Exemplos de espaços métricos completos.

Vamos examinar neste parágrafo alguns exemplos de espaços métricos completos que adiante teremos necessidade de utilizar. Em cada caso indicamos a função de distância que se introduz, deixando ao leitor o cuidado de verificar que ela satisfaz os axiomas δ_1 e δ_2.

(1) *O espaço* K_n *das matrizes-colunas* $n \times 1$. As definições fundamentais relativas às matrizes-colunas

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \qquad y=\begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}, \cdots$$

($x_i, y_i, \cdots$ números reais) são as seguintes. Matriz nula, $x=0$, é aquela em que $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$. As matrizes x e y são iguais se e só se $x_i=y_i (i=1, \cdots, n)$. Soma $x+y$ das matrizes x e y é a nova matriz de elementos $x_1+y_1, \cdots, x_n+y_n$. Produto αx do número real α pela matriz x é a matriz com os elementos $\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n$.

Mediante as definições anteriores as matrizes $n \times 1$ constituem um espaço linear. Introduzindo neste espaço a função de distância

$$\delta(x, y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|,$$

obtemos um espaço métrico K_n.

A distância do ponto (matriz-coluna) x ao ponto zero (matriz nula) é, por definição, a *norma* $|x|$ de x: $\quad |x|=\delta(x, 0)$.

É evidente que

$$\delta(x, y)=|x-y|$$

e que

$$|\alpha x-\alpha y|=|\alpha|\,|x-y|$$

(teorema de THALES em K_n se interpretarmos as matrizes-colunas como vectores).

K_n é um espaço métrico completo.

Se a sucessão

$$x^{(m)}=\begin{bmatrix} x_{m1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{mn} \end{bmatrix}$$

satisfaz a condição de CAUCHY $|x^{(m)}-x^{(p)}|<\varepsilon$, isto é, $\sum_{i=1}^{n}|x_{mi}-x_{pi}|<\varepsilon$ para $m>N(\varepsilon)$ e $p>N(\varepsilon)$, então cada uma das n sucessões de números reais $\{x_{mi}\} (i=1, \cdots, n)$ satisfaz a condição de CAUCHY e tem por isso limite: $x_i=\lim_{m \to \infty} x_{mi} (i=1, \cdots, n)$. Estes n limites x_i são as componentes de uma matriz-coluna x que é limite da sucessão $x^{(m)}$. Com efeito, é

$$|x-x^{(m)}|=\sum_{i=1}^{n}|x_i-x_{mi}|<\varepsilon$$

desde que $|x_i-x_{mi}|<\frac{\varepsilon}{n} (i=1, \cdots, n)$, o que se dá a partir de uma ordem conveniente $N(\varepsilon)$.

(2) *O espaço* m *das sucessões limitadas.* Uma sucessão de números reais $\{\xi_i\}$ diz-se limitada quando existe um número $M>0$ tal que $|\xi_i|<M (i=1,2,\cdots)$.

Designe m o conjunto das sucessões reais limitadas $x=\{\xi_i\}, y=\{\eta_i\}, \cdots$ e metrizemos este conjunto com a função de distância

$$\delta(x,y)=\sup_i|\xi_i-\eta_i|.$$

A distância $\delta(x,0)$ é, por definição, a *norma* $|x|$ da sucessão x: $|x|=\sup_i|\xi_i|$.

O espaço m é completo.

Seja $x^{(n)}=\{\xi_{ni}\}$ uma sucessão do espaço m (isto é, uma sucessão de sucessões limitadas de números reais: $\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1i},\cdots;\ ;\xi_{21},\xi_{22},\cdots,\xi_{2i},\cdots$) e suponhamos que ela satisfaz a condição de CAUCHY

$$\delta(x^{(m)},x^{(n)})=\sup_i|\xi_{mi}-\xi_{ni}|<\varepsilon,$$

para $m>N(\varepsilon)$ e $n>N(\varepsilon)$. Temos então

$$(*)\quad |\xi_{mi}-\xi_{ni}|<\varepsilon\ (i=1,2,\cdots)\ \text{para}\ m,n>N(\varepsilon),$$

logo a sucessão de números reais $\xi_{1i},\xi_{2i},\ ,\cdots,\xi_{mi},\cdots$ satisfaz a condição de CAUCHY. Admite portanto um limite ξ_i. E se fizermos $m\to\infty$ em (*), mantendo n fixo, vem

$$(**)\quad |\xi_i-\xi_{ni}|<\varepsilon\ (i=1,2,\cdots)\ \text{para}\ n>N(\varepsilon).$$

Com os limites ξ_i definimos uma sucessão $x=\{\xi_i\}$. Esta sucessão é limitada, quer dizer, $x\in m$. Na verdade, fixando $n>N(\varepsilon)$, resulta de (**)

$$||\xi_i|-|\xi_{ni}||\leqslant|\xi_i-\xi_{ni}|<\varepsilon,$$

donde

$$|\xi_i|<|\xi_{ni}|+\varepsilon<M_n+\varepsilon,$$

supondo

$$|\xi_{ni}|<M_n\ (i=1,2,\cdots).$$

Só resta mostrar que se tem $x=\lim_{n\to\infty}x_n$. Mas é o que resulta de (**):

$$\delta(x,x^{(n)})=\sup_i|\xi_i-\xi_{ni}|\leqslant\varepsilon\ \text{para}\ n>N(\varepsilon)$$

(3) *O espaço* C *das funções contínuas num conjunto fechado.* Seja t uma variável real com valores num conjunto fechado D e consideremos o conjunto das funções reais de t contínuas em D: $x=x(t),\ y=y(t),\ z= =z(t),\cdots$. Introduzindo a função de distância

$$\delta(x,y)=\sup_{t\in D}|x(t)-y(t)|$$

obtemos um novo espaço métrico C.

O espaço C é completo.

Com efeito, seja $\{x_m(t)\}$ uma sucessão de CAUCHY em C. Dado $\varepsilon>0$, existe uma ordem $N(\varepsilon)$ a partir da qual se tem

$$\delta(x_m(t),x_n(t))=\sup_{t\in D}|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon$$

e portanto

$$(*)\qquad |x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon\qquad (t\in D),$$

o que mostra que a sucessão de funções contínuas em $D, x_1(t), x_2(t),\cdots,x_n(t),\cdots$, é uniformemente convergente em D. Existe pois (no sentido do Cálculo) $\lim_{n\to\infty}x_n(t)=x(t)$, e a função $x(t)$ é contínua em D. Fazendo $m\to\infty$ em (*), com n fixo, vem

$$|x(t)-x_n(t)|\leqslant\varepsilon,$$

logo (sendo $n>N(\varepsilon)$),

$$\delta(x(t),x_n(t))=\sup_{t\in D}|x(t)-x_n(t)|\leqslant\varepsilon,$$

e isto mostra que a função $x=x(t)$ é no espaço C limite da sucessão $\{x_n(t)\}$.

§ 3. Teorema de Banach

A cada ponto x de um espaço métrico E façamos corresponder um e um só ponto x' do mesmo espaço. Fica assim definida uma função $x'=U(x)$ de domínio E e contradomínio em E, que se designa por *transformação* ou *operador* U no espaço E.

Diremos que U é um *operador de contracção* quando se tem

$$\delta(x',y')\leqslant q\,\delta(x,y)\ \text{com}\ 0\leqslant q<1,$$

quaisquer que sejam $x\in E$ e $y\in E$.

TEOREMA DE BANACH. *Se* U *é um operador de contracção num espaço métrico completo* E, *existe um e um só ponto* $x^* \in E$ *tal que* $U(x^*) = x^*$.

Por outras palavras. todo o operador de contracção num espaço métrico completo possui um e um só *ponto fixo* x^*.

Dem. Tome-se um ponto x_0 arbitrário e construa-se a sucessão

(1) $x_1 = U(x_0)\,,\ x_2 = U(x_1)\,,\cdots,\ x_n = U(x_{n-1})\,,\cdots$

Vamos mostrar que é uma sucessão de CAUCHY. Em primeiro lugar verifiquemos por recorrência que é

(2) $$\delta(x_n, x_{n-1}) \leqslant q^{n-1}\,\delta(x_1, x_0)\,.$$

Para $n=1$, (2) é trivial. E partindo da veracidade de (2) deduzimos

$$\delta(x_{n+1}, x_n) = \delta[U(x_n), U(x_{n-1})] \leqslant$$
$$\leqslant q\,\delta(x_n, x_{n-1}) \leqslant q^n\,\delta(x_1, x_0)\,,$$

que é (2) com $n+1$ em vez de n.

Em segundo lugar, resulta da desigualdade triangular (§ 1, δ_2) que, sendo $n > m$,

$$\delta(x_n, x_m) \leqslant \delta(x_n, x_{n-1}) +$$
$$+\,\delta(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + \delta(x_{m+1}, x_m)\,,$$

donde, usando (2),

$$\delta(x_n, x_m) \leqslant (q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^m)\,\delta(x_1, x_0)\,.$$

Atendendo a que $0 \leqq q < 1$, temos $q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^m \leqq \dfrac{q^m}{1-q}$,

logo

(3) $$\delta(x_n, x_m) \leqslant k\,\frac{q^m}{1-q} \quad \text{com} \quad k = \delta(x_1, x_0)\,.$$

Quando $m \to \infty$, o segundo membro de (3) tende para zero. Por consequência, a sucessão (1) satisfaz a condição de CAUCHY.

O ponto limite da sucessão (1), $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, que existe por ser E um espaço completo, é ponto fixo de U. Com efeito, temos

$$\delta[x_n, U(x^*)] \leqslant q\,\delta(x_{n-1}, x^*)\,,$$

donde

$$\lim_{n\to\infty} \delta[x_n, U(x^*)] = 0\,,$$

quer dizer,

$$U(x^*) = \lim_{n\to\infty} x_n = x^*\,.$$

Finalmente, se y^* é outro ponto fixo de U, temos

$$\delta(x^*, y^*) = \delta[U(x^*), U(y^*)] \leqslant q\,\delta(x^*, y^*)\,,$$

o que só é possível, por ser $q < 1$, se $\delta(x^*, y^*) = 0$ e portanto $x^* = y^*$: o ponto fixo é único.

Cálculo aproximado do ponto fixo.

Se na desigualdade (3) fizermos $n \to \infty$ e se trocarmos depois m por n obteremos

(4) $$\delta(x_n, x^*) \leqslant k\,\frac{q^n}{1-q}\,.$$

Esta desigualdade é importante. Com efeito, construamos a sucessão (1) a partir de um ponto arbitrário x_0. Se tomarmos x_n como aproximação do ponto fixo x^* o segundo membro de (4) dar-nos-á um limite excedente do erro cometido, avaliado este erro pela distância $\delta(x_n, x^*)$.

§ 4. Equações integrais lineares.

A equação funcional

(1) $$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt\,,$$

em que $\varphi(x)$ representa a função desconhecida, é a *equação integral linear*. O termo livre $f(x)$ e o núcleo $K(x, t)$ supõem-se funções contínuas no intervalo $I = [a, b]$ e no rectângulo $R = [a \leqq x \leqq b\,,\ a \leqq t \leqq b]$, respectivamente.

TEOREMA. *A equação* (1) *admite uma e uma só solução contínua* $\varphi(x)$ *em* I *sempre que*

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}\,, \qquad M = \max_R |K(x, t)|\,.$$

Dem. No espaço métrico completo C das funções contínuas $\varphi(x), \psi(x), \cdots$ no intervalo I a transformação

$$\psi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

define um operador $U(\varphi) = \psi$. Temos

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| = \left|\lambda \int_a^b K(x,t)\,[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]\,dt\right|$$
$$\leqslant |\lambda|\, M \int_a^b |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|\,dt,$$

e por conseguinte

$$\begin{aligned}\delta[U(\varphi_1), U(\varphi_2)] = \delta(\psi_1, \psi_2) &= \sup_{x \in I} |\psi_1(x) - \psi_2(x)| \\ &\leqslant |\lambda|\, M(b-a) \sup_{t \in I} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \\ &= |\lambda|\, M(b-a)\, \delta(\varphi_1, \varphi_2) \\ &= q\, \delta(\varphi_1, \varphi_2)\end{aligned}$$

com $q = |\lambda|\, M(b-a)$. Se $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ é $q < 1$; U é um operador de contracção e admite por isso, em virtude do teorema de BANACH, um ponto fixo $\varphi(x)$, função contínua em I. O teorema está provado.

Cálculo aproximado da solução.

Escolhido para ponto inicial em C a função identicamente nula $\varphi_0(x) = 0$, a sucessão

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi_n(t)\,dt$$

converge uniformemente para a solução $\varphi(x)$. E tomando $\varphi_n(x)$ como aproximação de $\varphi(x)$ um limite excedente do erro cometido será dado pelo segundo membro da desigualdade

$$\sup_{x \in I} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant k \frac{q^n}{1-q}$$

onde $q = |\lambda|\, M(b-a)$ e $k = \max_{x \in I} |f(x)|$.

Exemplo. Considere a equação integral

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{120} \int_0^1 e^{xt}\,\varphi(t)\,dt.$$

Verifique que possui uma e uma só solução contínua $\varphi(x)$ no intervalo $[0, 1]$. Calcule a segunda iteração $\varphi_2(x)$ e mostre que ela dá a solução da equação com erro inferior a 10^{-3}.

(Continua no próximo número)

O cálculo das probabilidades e a teorização do comportamento económico

por **Gustavo de Castro**

(Continuação do N.º 60-61)

3. Resoluções.

Todas as questões que foram surgindo estão já resolvidas, ou vão ser resolvidas fàcilmente se sòmente admitirmos a teorização anterior. Assim a partilha das 64 pistolas devendo fazer-se segundo os valores actuariais das posições, segundo as expectações dos jogadores, bastará que se calcule a probabilidade que cada tem de ganhar (ou, em rigor, a probabilidade dum deles). O jogador que já tem dois pontos poderia ganhar em duas linhas de acontecimentos, ou na 1ª partida ou na 2ª (neste caso, se o outro jogador fosse ganhar a primeira partida e perder a segunda); a sua probabilidade de ganho, soma das que correspondem às duas modalidades, a segunda das quais é uma sucessão de acontecimentos, é:

$$p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

O jogador que tem um ponto só ganharia se