Dem. No espaço métrico completo C das funções contínuas $\varphi(x), \psi(x), \cdots$ no intervalo I a transformação

$$\psi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

define um operador $U(\varphi) = \psi$. Temos

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| = \left|\lambda \int_a^b K(x,t)\,[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]\,dt\right|$$
$$\leqslant |\lambda|\,M \int_a^b |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|\,dt,$$

e por conseguinte

$$\begin{aligned}\delta[U(\varphi_1), U(\varphi_2)] = \delta(\psi_1, \psi_2) &= \sup_{x \in I} |\psi_1(x) - \psi_2(x)| \\ &\leqslant |\lambda|\,M\,(b-a) \sup_{t \in I} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \\ &= |\lambda|\,M\,(b-a)\,\delta(\varphi_1, \varphi_2) \\ &= q\,\delta(\varphi_1, \varphi_2)\end{aligned}$$

com $q = |\lambda|\,M(b-a)$. Se $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ é $q < 1$; U é um operador de contracção e admite por isso, em virtude do teorema de Banach, um ponto fixo $\varphi(x)$, função contínua em I. O teorema está provado.

Cálculo aproximado da solução.

Escolhido para ponto inicial em C a função identicamente nula $\varphi_0(x) = 0$, a sucessão

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi_n(t)\,dt$$

converge uniformemente para a solução $\varphi(x)$. E tomando $\varphi_n(x)$ como aproximação de $\varphi(x)$ um limite excedente do erro cometido será dado pelo segundo membro da desigualdade

$$\sup_{x \in I} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant k\,\frac{q^n}{1-q}$$

onde $q = |\lambda|\,M(b-a)$ e $k = \max_{x \in I} |f(x)|$.

Exemplo. Considere a equação integral

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{120} \int_0^1 e^{xt}\,\varphi(t)\,dt.$$

Verifique que possui uma e uma só solução contínua $\varphi(x)$ no intervalo $[0,1]$. Calcule a segunda iteração $\varphi_2(x)$ e mostre que ela dá a solução da equação com erro inferior a 10^{-3}.

(Continua no próximo número)

O cálculo das probabilidades e a teorização do comportamento económico

por **Gustavo de Castro**

(Continuação do N.º 60-61)

3. Resoluções.

Todas as questões que foram surgindo estão já resolvidas, ou vão ser resolvidas fàcilmente se sòmente admitirmos a teorização anterior. Assim a partilha das 64 pistolas devendo fazer-se segundo os valores actuariais das posições, segundo as expectações dos jogadores, bastará que se calcule a probabilidade que cada tem de ganhar (ou, em rigor, a probabilidade dum deles). O jogador que já tem dois pontos poderia ganhar em duas linhas de acontecimentos, ou na 1ª partida ou na 2ª (neste caso, se o outro jogador fosse ganhar a primeira partida e perder a segunda); a sua probabilidade de ganho, soma das que correspondem às duas modalidades, a segunda das quais é uma sucessão de acontecimentos, é:

$$p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

O jogador que tem um ponto só ganharia se fizesse as duas partidas consecutivas, e a sua probabilidade é

$$p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(que se poderia obter como $1 - p_1$).

As expectações são portanto

$$e_1 = p_1 S = \frac{3}{4} \cdot 64 = 48$$

$$e_2 = p_2 S = \frac{1}{4} \cdot 64 = 16 \; .$$

A solução de PASCAL é evidentemente menos clara, mas não deixa de ter interesse; primeiro porque é engenhosa e depois porque nos permitirá sentir a dificuldade dos primeiros passos, não se vá supor que as regras que vimos enunciando aparecem claras e explítas logo em PASCAL e FERMAT. Na verdade só lentamente foram aparecendo; a regra do produto das probabilidades, por exemplo, só aparece publicada por MOIVRE no século seguinte.

PASCAL, depois de observar que, se o jogador que tem um só ponto ganhasse a partida imediata, o bolo poderia ser então dividido ao meio — porque ambos passariam a estar (com dois pontos) em igualdade de circunstâncias — imagina o que tem dois pontos falando assim: «Por mim, estou sempre seguro de 32 pistolas; quanto às outras 32, talvez as ganhe e talvez não, e as chances são iguais. Dividamos pois igualmente estas 32 pistolas; e dá-me também as 32 de que estou seguro».

PASCAL, nem FERMAT, não apura o conceito de expectação, o que HUYGENS havia de conseguir no seu livro três anos mais tarde. Aqui, outra vez, CARDANO parece ter andado um século antes muito próximo da visão clara das coisas quando no capítulo 14 do seu *Liber de Ludo Aleae* dá a regra das paradas em jogos equitativos nestes termos: «*Existe pois uma regra geral, que é a seguinte: considere-se o total dos casos igualmente possíveis e o número dos que representam resultados favoráveis; compare-se este número com o dos restantes e façam-se as apostas nesta proporção para que se jogue equitativamente*».

Vejamos agora o valor duma posição de x no vermelho. Visto que a probabilidade de ganhar é 18/37 (18 vermelhos contra 18 negros mais o zero da banca), visto que com x no vermelho se ganha $2x$ (saindo o vermelho), então a expectação é

$$e = \frac{36}{37} \cdot x$$

A quebra é pois de 1/37 do que se arrisca e passa a constituir o lucro do banqueiro.

O jogador que aposta 2 num cavalo tem uma expectação de

$$\frac{2}{37} \cdot 36 = \frac{36}{37} \cdot 2$$

porque tem 2 números em 37 e recebe 18 vezes a parada, se ganhar. Se também aposta 3 numa dúzia tem ainda mais a expectação

$$\frac{12}{37} \cdot 9 = \frac{36}{37} \cdot 3 \, ,$$

o que dá à sua posição um valor actuarial que é 36/37 de todo o dinheiro que arriscou

$$\frac{36}{37} \cdot 2 + \frac{36}{37} \cdot 3 = \frac{36}{37} \cdot 5 \quad .$$

Do mesmo modo, um jogador que aposta 3 numa quadra tem daí uma expectação de

$$\frac{4}{37} \cdot 27 = \frac{36}{37} \cdot 3 \quad ;$$

e se também apostou 2 no vermelho a expectação total é

$$\frac{36}{37} \cdot 2 + \frac{36}{37} \cdot 3 = \frac{36}{37} \cdot 5 \, ,$$

os mesmos 35/36 do que apostou ao todo.

Vê-se pois nestes exemplos (e demonstra-se na generalidade mediante uma generalização óbvia das convenções anteriores) que, quando dois jogadores jogam à moeda as suas posições na roleta, o jogo é equitativo se estão apostadas iguais quantias. Qualquer sentimento de que isto não é aceitável deverá chamar a nossa atenção para o princípio de Bernoulli e a definição de jogo equitativo, e não sobre o Cálculo das Probabilidades; este tira aqui as consequências dos princípios que as pessoas aceitam e nada mais.

A probabilidade da menor de 7 no lançamento de dois dados é 15/36 e o valor actuarial de x escudos jogados nela (contra o dobro) é 30/36 dos x escudos; há portanto uma quebra de 1/6. Mais vale pois jogar na cor à roleta do que na menor com dois dados.

Quanto ao que vale mais, se apostar na cor se no pleno, ser ou não um jogador das grandes chances, considere-se (o que é sempre o mesmo com nova forma) que uma quantia jogada à roleta reduz-se a 36/37 do seu valor, qualquer que seja o jogo feito, para quem aceite o princípio de Bernoulli; quando se queira aceitar o princípio de Bernoulli é indiferente a combinação em que se faz uma aposta à roleta.

O quadro seguinte regista as apostas em que um capital é investido numa só parada e num jogo simples.

Prémios, probabilidades e expectações correspondentes a uma aposta simples de x escudos à roleta, conforme o jogo feito

Jogo	Prémio	Probabilidade	Expectação
pleno	$36\,x$	1/37	igual em todos os casos a $36/37 \cdot x$
cavalo	$18\,x$	2/37	
rua	$12\,x$	3/37	
quadra	$9\,x$	4/37	
linha	$6\,x$	6/37	
dúzia	$3\,x$	12/37	
coluna	$3\,x$	12/37	
maior—menor .	$2\,x$	18/37	
cor	$2\,x$	18/37	
par—ímpar . .	$2\,x$	18/37	
cavalo na dúzia.	$3/2\,x$	24/37	
cavalo na coluna	$3/2\,x$	24/37	

Observe-se que estes resultados são independentes da reserva do zero para a casa. É perfeitamente indiferente que o zero seja ou não reservado, se reserve outro número em vez dele ou se não reserve nenhum, enquanto forem 37 os casos possíveis e o prémio seja calculado multiplicando a parada pelo cociente de 36 pelo número de números que constituem a combinação em que se aposta.

Quando há desdobramento duma quantia em diversas paradas, a definição do valor actuarial da aposta e os resultados anteriores arrastam que seja sempre de 36/37 o factor de redução do valor facial ao valor actuarial, no instante a partir do qual se não podem fazer nem desfazer paradas, desde o «nada mais» até que a bola pare.

Tudo isto leva a considerar que um certo capital que se decidiu apostar à roleta, num ou mais jogos, numa ou mais paradas, qualquer que seja o sistema de jogo, ou sem sistema ao sabor da inspiração, tem um valor em numerário de 36/37 do seu valor nominal. Se o meu devedor tivesse, por extravagante disposição testamentária, que apostar um legado x, eu poderia aceitar o ganho aleatório das suas apostas como uma prestação de $36/37 \cdot x$ a abater à dívida; como disse Poisson «uma pessoa deve considerar uma expectação como um bem que é seu e incluí-la no inventário da fortuna própria».

É esta afirmação, propositadamente peremptória, que não seria aceitável como regra de conduta por muitas pessoas. Quero dizer que muitas pessoas não aceitariam a combinação anterior, ou no lugar do devedor ou no lugar do credor. Há quem pense que vale sempre mais um pássaro na mão do que dois a voar; há quem pense que quem não arrisca não petisca. Há reacções diferentes à realidade de que quem não apostou não perdeu nem ganhou; uns pensando no sossego de quem não perde, outros na alegria de quem ganha.

Uns creem na possibilidade dum sistema

de jogo susceptível de aumentar o valor aleatório do dinheiro que vão apostar, surpreendendo a incúria dos industriais ou os humores do Acaso. Outros acham que, nas suas circunstâncias, uma probabilidade de 1 para 1.000 de ganhar mil contos não é equivalente à probabilidade de 1 para 10 de ganhar dez contos, ou mesmo uma nota de conto na mão. Para outros ainda o jogo não é só um investimento mas um aspecto valioso do seu sistema de vida e preferem ou ganhar depressa ou perder devagar; e não entendem guiar-se por princípios abstractos que não olhem ao seu sistema de valores.

Postas assim as coisas, só os que querem surpreender o Acaso ou os industriais não tem razão, porque a roleta «se não tem consciência também não tem memória», e as coisas são efectivamente tão simples e tão claras que nenhum industrial se engana. Onde se ouviu que algum dono duma mesa de jogo explorasse outro sistema de jogo se não o que se funda na indiferença de todos os sistemas? Nem os industriais são incautos nem o Acaso perscrutável no caso individual.

4. A discussão do princípio de Bernoulli.

Como foi repetido, quando se precise de mais esclarecimentos porque nos pareça que as regras deduzidas nos não convenham, a nossa atenção deve recaír sobre o princípio de Bernoulli, que deve ser entendido em si e julgado pelas suas consequências. Algumas das suas consequências são teòricamente previsíveis; destas nos vamos ocupar no seguimento.

Punhamos pois a questão: que promessas, que garantias arrasta a aceitação da estrutura teórica relativa ao domínio do aleatório e das normas de acção que lhe junta o princípio de Bernoulli?

É aqui que o Cálculo das Probabilidades tem um novo surto para seguir o qual teremos que fazer algumas definições.

Chamemos *jogo de conta* um jogo de azar em que, pela sua definição, os jogadores se obrigam a um número certo N de partidas e aceitam que os pagamentos se façam pelo saldo final. Chamemos *jogo favorável a um jogador* um jogo de conta tal que, por fixação conveniente do número N de partidas, o jogador tem uma probabilidade igual ou maior que p_0 de ganhar uma fortuna igual ou maior que F_0, sendo estes valores prèviamente arbitrados por ele para o conveniente cálculo de N.

Isto quer dizer que, se um jogo me é favorável e eu pretendo ter uma probabilidade de 9.999 em 10.000 de ganhar 200 contos, é possível calcular o número de partidas que me garante o que pretendo, se as contas forem feitas no fim. Se aceitarmos pois, a que uma probabilidade de 9.999 em 10.000 pode ser uma certeza suficiente na situação em que decorre o jogo, posso eu ter a certeza (prática) de alcançar a fortuna que procuro entrando no jogo; posso desprezar a possibilidade de perder, por graves que sejam as consequências, desde que a consideração destas tenha intervido na fixação da certeza (prática) indispensável.

Quando duma urna com 9.999 bolas brancas e 1 preta, bem misturadas, eu afirmo que vou tirar a bola branca, faço uma afirmação cuja certeza prática é de 9.999 por 10.000. A fixação do número de partidas num jogo favorável pode dar-me a mesma certeza de obter o que quero, e o modelo da urna pode ajudar-me a fixar a certeza que exijo — tudo isto admitindo ser possível jogar o tal número de partidas.

Só resta ter uma regra para reconhecer os jogos favoráveis para o problema de viabilidade da exploração industrial estar resolvido, em princípio, visto que os jogos aceitáveis são evidentemente exploráveis industrialmente quando certos pormenores se possam resolver a contento, sobretudo os relativos à duração das partidas e portanto à previsão de rendimentos. A regra é dada pelo seguinte teorema:

Se num jogo de conta o valor actuarial da parada dum jogador é superior ao seu valor facial, se a expectação é superior à parada, o jogo é favorável ao jogador.

Esta proposição, consequência da lei dos grandes números que BERNOULLI estabeleceu, é a chave da discusão do princípio de BERNOULLI. É por força dela que a introdução do conceito de expectação se revela fecunda e é à luz dela que alguns dos celebrados paradoxos do Cálculo das Probabilidades se resolvem.

Estes paradoxos agrupam-se em torno de dois centros: para um lado os que fazem pesar a «utilidade», ou põem em causa a probabilidade como grau de convencimento, para outro os que fazem intervir problemas de «duração» e de «ruína». Assim, se num jogo favorável, o número de partidas que calculo para me garantir não pode realizar-se num lapso conveniente, tudo o que dissemos está prejudicado, e a vantagem que vem do jogo ser teòricamente favorável pode ser anulada por outras feições. Por outro lado, se num jogo em que a minha expectação é superior à parada eu pago no fim de cada partida, pode acontecer que seja considerável a probabilidade de que me arruíne antes de fazer valer a vantagem.

Ainda: quando só se tem dinheiro para comprar um pão nem sempre se está disposto a jogá-lo, num jogo aliás vantajoso, contra o preço dum Cadillac; e se só vou jogar uma partida, toda esta especulação tem de começar do princípio e é controverso que guarde um grande sentido, que seja razoável falar-se de probabilidade.

Voltando à «utilidade». Se, tendo 20 escudos, jogo 1 escudo contra 2 num jogo equitativo, é igualmente provável que perca o 20º escudo ou ganhe o 21º — ora estes escudos as mais das vezes não têm para mim o mesmo *valor* e o jogo não se me afigura equitativo. Se o mesmo acontece ao meu adversário não se vê como possam existir jogos equitativos.

Diz BERTRAND: «*Poisson vai longe demais. O homem que numa questão tem nove chances em dez de perder mas que, em caso de ganho, receberia um milhão, mentiria se dissesse que tem 100.000 francos. Um homem prudente recusar-se-ia a emprestar-lhe 500 sobre essa garantia. A sua expectação* vale *100.000 francos, mas verosìmilmente não encontrará comprador*».

Percebe-se pois que se introduzam os jogos de conta para afastar os problemas de ruína. Quando a grande fortuna do jogador diminua a probabilidade da ruína no sentido que indicámos ou quando certas precauções, limitando a velocidade do ganho, possam diminuir essa probabilidade para a duração que se prevê, pode a limitação ser afastada. Somos sempre porém de opinião que a teoria dos jogos de azar, que toma o conceito de expectação e o princípio de BERNOULLI como fulcro, supõe jogos suficientemente repetidos em que duma maneira ou doutra se minimiza a probabilidade de ruína; e jogos a dinheiro no sentido habitual. Os rios de tinta que continuam a correr sobre os méritos e deméritos, num sentido absoluto, do princípio de BERNOULLI secarão um dia da maneira do costume; pelo esclarecimento dos seus méritos e deméritos relativos às situações concretas que interesse teorizar.

O princípio de BERNOULLI continuará todavia a gizar as acções de quem quizer fazer fortuna ao jogo de azar desde que:

(*i*) as contas se façam no fim;

(*ii*) seja permitido e viável fixar o número de partidas;

(*iii*) se calcule esse número por forma a garantir, com certeza considerada suficiente (em face dos possíveis revezes), uma fortuna suficiente; uma e outra sendo números que se arbitram, uma probabilidade e um montante.

Como se vai ver com mais clareza na discussão do paradoxo de S. PETERSBURGO, não é razoável, *dum ponto de vista económico*, que alguém tenha dificuldade em apostar até a própria cabeça segundo o que estabelece o princípio de BERNOULLI nos casos que constituem o domínio deste princípio. Outro tanto poderá não acontecer fora deles, mas isso não deve espantar ninguém: a mesma sorte tem todos os princípios, que nunca dispensam o descernimento de quem os utiliza.

De resto, nem tudo são jogos de azar e o «ponto de vista económico» não é felizmente o único ponto de vista; sobre certos valores não se pode discorrer como sobre a moeda batida, eis o que nos lembra BERTRAND no caso que contrapõe ao paradoxo que iremos considerar.

«*Num problema mais célebre e mais grave o que estava em jogo era a vida humana. A inoculação era, antes da vacina, o melhor partido que se podia tomar contra a varíola, mas um inoculado em 200 morria das sequelas da operação. Alguns hesitavam; Daniel Bernoulli, geómetra impassível, calculava doutamente a vida média, encontrava-a acrescida de três anos e declarava silogisticamente a inoculação benfazeja. D'Alembert, sempre hostil à teoria do jogo que nunca compreendeu, repelia, com muita razão desta vez, a aplicação que se lhe queria dar: 'Suponhamos — dizia ele — que a vida média de um homem de trinta anos seja outros trinta anos, e que ele possa razoàvelmente esperar viver ainda trinta anos abandonando-se à natureza e deixando de se inocular. Suponho ainda que, submetendo-se à operação, a vida média seja de trinta e quatro anos... Não será patente que para julgar da vantagem da inoculação não bastará comparar a vida média de trinta e quatro anos à vida média de trinta, mas será necessário comparar o risco de 1 para 200, a que se expõem de morrer num mês pela inoculação, à vantagem longínqua de viver mais quatro anos ao fim de sessenta?'*

Argumenta-se mal para esgotar questões destas: suponhamos que se possa, com uma operação, aumentar a vida humana de quarenta anos em vez de quatro, com a condição de que uma morte imediata ameaça um quarto dos operados; com um quarto das vidas sacrificado para dobrar os três outros o lucro é grande. Quem o quererá colher? Que médico fará a operação? Quem se encarregará, aliciando para isso 4.000 habitantes robustos e saudáveis duma mesma comuna, de encomendar para o dia seguinte os 1.000 caixões? Que director de colégio ousaria anunciar a 50 mães, que decidido a duplicar a vida média dos seus 200 alunos, jogou por eles este jogo vantajoso em que os seus filhos perderam? Os pais mais prudentes aceitariam 1 chance em 200; nenhum, sobre a fé de nenhum cálculo, se exporia a 1 chance em 4».

5. O Paradoxo de S. Petersburgo.

Suponhamos o jogo seguinte. Um jogador J compra com uma entrada e' o direito a jogar uma partida com o banqueiro B. A partida consiste em sucessivos lançamentos duma moeda boa até que finalmente apareça uma face C («cara» ou «caravela», por exemplo). O banqueiro B no fim duma partida que teve n lançamentos paga 2^{n-1} escudos ao jogador J.

Assim, por exemplo, J paga 1.000 escudos a B como entrada. B lança a moeda e se sai C, logo à primeira, paga 1 escudo a J; se à primeira sai X («escudo» ou «cruz», por exemplo), B lança de novo a moeda e saindo agora C, à segunda, paga 2 escudos; se na 2ª como na 1ª sai X, B lança 3ª vez a moeda para pagar $2^2 = 4$ se finalmente sair C, ou continuar se não; se é à 4ª vez que sai C, então J recebe $2^3 = 8$ escudos. E assim por aí fora, indicando-se no quadro seguinte os ganhos de J conforme o número de lançamentos da partida e as probabilidades correspondentes para os primeiros casos.

Lançamentos	Ganhos	Probabilidades	Expectações
1	1	1/2	1/2
2	2	1/4	1/2
3	4	1/8	1/2
4	8	1/16	1/2
5	16	1/32	1/2
6	32	1/64	1/2
7	64	1/128	1/2
8	128	1/256	1/2
9	256	1/512	1/2
10	512	1/1024	1/2
11	1024	1/2048	1/2

Olhando para este quadro parece a algumas pessoas que se paga demais para jogar uma partida, visto que, para se não perder dinheiro, seria preciso que saíssem 10 cruzes seguidas, o que é uma série com a probabilidade de 1/1.000 (mais precisamente, 1/1.024). A pessoa que tendo 1.000 contos fosse jogar 1.000 partidas poderia temer ganhar 24 escudos numa delas e perder os restantes 999 contos, sem ter de que se queixar.

Também é verdade que saídas 10 cruzes e a moeda não tendo memória, poderiam sair mais algumas, e os ganhos serem então muito grandes. É o que se observa no quadro seguinte.

«Cruzes» além das primeiras 10	Probabilidades (supondo saídas as 10 primeiras)	Ganhos líquidos (em contos)
1	1/2	1
2	1/4	3
3	1/8	7
4	1/16	15
5	1/32	32
6	1/64	65
7	1/128	130
8	1/256	261
9	1/512	523
10	1/1024	1048

Vê-se pois que, com outra série de 10 cruzes,o jogador estaria seguro de ficar em casa e teria à sua frente a possibilidade dum bom ganho; de novo se dirá aqui que, tendo saído 20 cruzes, a probabilidade de mais uma é 1/2. Ora se saísse mais uma dobrava-se o capital inicial; e se saísse só mais uma (e porque não, chegados ali?) quadruplicava-se. Etc.

Em pouco os lucros tornam-se fabulosos: recorde-se como, segundo a lenda, o inventor do xadrês esgotou as possibilidades dum Xá inacreditàvelmente rico pedindo 1 grão de trigo na primeira casa do tabuleiro, 2 na segunda, 4 na terceira, e assim por aí fora — duplicando sempre. Outros tantos escudos, menos um só, deveria pagar o banqueiro se saíssem 64 «cruzes» antes da «cara».

Tudo isto supondo que o jogador tinha 1.000 contos para arriscar. A perspectiva seria menos brilhante para um jogador que só tivesse 100.

Parece então, dir-se-á, que chegou o momento de experimentar a «teoria matemática dos jogos de azar». O que diz ela que se faça?

Segundo o que vimos deverá calcular-se a expectação de J quando entra na partida; esta expectação, sendo a soma dos produtos das quantias que pode ganhar pelas probabilidades respectivas, produtos todos iguais a 1/2 , é infinita portanto.

A interpretação deste resultado sempre pareceu evidente: a teoria dos jogos de azar indica a J que aceite jogar por qualquer preço — a sua expectação, infinita, fará com que o jogo lhe seja vantajoso, pois que compra por uma qualquer quantia uma fortuna sem limites.

O paradoxo está em que o senso comum se ergue contra a regra da Ciência: se esta nos diz que as pessoas devem comprar sempre a entrada, parece que nenhum homem prudente estará disposto a arriscar uma quantia elevada, a pagar a entrada por quantia de qualquer vulto. A verdade parece mentira e o sentimento do homem opõe-se à própria razão.

Este paradoxo estava destinado a uma enorme celebridade, não só pelo vigor com que aponta para a relatividade do princípio de BERNOULLI, mas até por um ou outro pormenor, essencialmente insignificante, que destrai a análise do seu fim útil; certamente também porque sobrevindo, sugestivo, nos primeiros passos duma disciplina um tanto subtil (cuja legitimidade era posta em dúvida por espíritos, justamente famosos, mesmo em passagens mais elementares), não deixaria de avolumar as discussões. O inevitável D'ALEMBERT dele diria, em 1768, para sublinhar as incongruências dum Cálculo em que não acreditava: «*Conheço pelo menos cinco ou seis soluções nenhuma das quais está de acordo com as outras e das quais nenhuma me parece satisfatória*».

Para começar, vejamos a mais superficial das perplexidades, a que assaltaria o leitor menos conhecedor da história das matemáticas quando deparasse com o seguinte sumário, traçado descuidadamente por um matemático distraído: «O paradoxo de S. Petersburgo, em que assenta a mais popular das críticas ao princípio de BERNOULLI, deve a sua celebridade a BERNOULLI; já porém teria sido discutido por BERNOULLI e talvez mesmo por BERNOULLI».

O matemático distraído estaria, assaz justamente, a atribuir o princípio que nos ocupa a JACOB BERNOULLI (1654-1705), o mais velho da ilustre família de matemáticos suiços(3). É o autor do primeiro grande tratado, o «*Ars coniectandi*», tratado que publica postumamente, em 1713, o sobrinho NICOLAU BERNOULLI (1687-1759), onde aparece descoberta a lei dos grandes números. Estaria também a recordar-se da correspondência entre este NICOLAU e MONTMORT, onde se propõe vários jogos em que a expectação é a soma duma série; e a correspondência entre CRAMER e NICOLAU, em que CRAMER propõe duas explicações para o paradoxo. Estaria ainda a pensar que, dada a atenção devotada por NICOLAU à obra de seu tio JACOB, e à amplidão desta obra, não seria impossível que deste viesse tudo. Finalmente, reconheceria que é a DANIEL BERNOULLI, outro sobrinho de JACOB, e primo de NICOLAU, que se deve o alargamento da discussão com a publicação em 1738, nos *Comentarii Academiae Scientiaram Imperialis Petropolitanae*, da memória onde expõe a sua teoria da esperança moral que LAPLACE haveria de adoptar, com exclusão da expectação de HUYGENS. A teoria é aplicada à explicação do paradoxo que fica com o nome que o vincula à Academia de S. Petersburgo.

Agora ao jogo. Uma circunstância que se tem analisado na esperança de se esclarecerem as coisas é a de ser infinita a expectação de J. Se a sua interpretação para quem queira obter do princípio de BERNOULLI uma regra para J não parece oferecer dificuldades, o mesmo não acontece quando se olha a questão do ponto de vista da solvência do banqueiro. Na realidade, uma expectação infinita para J significa que B assume compromissos para além das suas possibilidades; como o Xá da Pérsia não poude recompensar o inventor, assim o banqueiro deixará de poder pagar nos casos em que se realizaria a vantagem de J.

Suponhamos, por exemplo, que a fortuna de B é de um milhão de contos; o maior pagamento que B pode fazer será então de 2^{29} escudos, e o jogo que pode honestamente abrir não deve ter mais de 30 lançamentos e será, por exemplo, o seguinte: B lança 30 vezes um dado e paga a J a soma de 2^{n-1} escudos se a primeira «cara» aparece no lançamento n, e 2^{29} escudos se não aparecer «cara».

A expectação de J neste jogo é

$$\frac{1}{2}\underset{(30\text{ vezes})}{+\cdots+}\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{30}}\times 2^{29}$$

e o jogo é-lhe desfavorável se a entrada for superior a 15$50.

Dir-se-á que o banqueiro não é suficiente-

(3) Com igual justiça o atribuiria a HUYGENS ou a LEIBNIZ. Uma forma mais geral, cuja discussão prossegue acesamente em nossos dias, vem de JACOB BERNOULLI; para simplificar podemo-nos ficar por este.

mente rico. Imaginêmo-lo pois com a fortuna de 100 milhões de contos, o que o coloca entre os homens mais ricos do planeta: em vez de ter de limitar o jogo a 30 lançamentos, poderá honestamente alargá-lo a 37; a expectação de J subirá de 15$50 para 19$00.

Estamos pois na mesma; o jogador que aceitasse pagar um conto de entrada seria muito imprudente. Suponhamos mesmo que J joga contra toda a humanidade e que cada um dos 2,4 biliões era tão rico como o banqueiro de há pouco; poderíamos então fixar para a partida um máximo de 68 lançamentos e a expectação de J seria quase de 40$00...e ficaria ainda muito longe do conto.

Vê-se pois que a insolvência do banqueiro é um aspecto essencial que interfere com o princípio de Bernoulli; em vez porém de o invalidar só o enriquece com a evidenciação das condições que o validam.

Este resultado, contudo, embora concorra nas apreensões dos que não aceitavam jogar por um preço elevado, não justifica essas apreensões; estas provêm mais do tipo de considerações que fizemos no início em que pesa a improbabilidade de qualquer lucro, a previsão duma ruína sobrevindo antes de se poder verificar o improvável ganho e ainda, talvez, a lentidão do jogo que (mesmo excluída a hipótese da ruína) não deixa lugar a esperanças. O jogo parece inaceitável mesmo que por detrás do banqueiro estivessem todas as riquezas concebíveis; como observa Bertrand, a dificuldade que vem da limitação da fortuna do banqueiro não é essencial: «*Quelle que soit la dette...la plume peut l'écrire, on réglera les comptes sur le papier; la théorie triomphera s'ils confirment ses prescriptions*».

Para arrumar definitivamente este aspecto nada nos impede de inventar um novo jogo que, guardando todo o essencial, se defenda daquele lado: J aposta com B uma quantia elevada que ganhará se, jogando o jogo de S. Petersburgo com uma entrada fictícia e (qualquer mas fixada), o seu ganho líquido fictício ultrapasse uma quantia Q (qualquer mas fixada).

Nestas condições o jogo é favorável a J no sentido que utilizámos atrás: impondo o número de partidas que vai jogar, J ficará seguro (com a segurança que quizer e para a qual calculou aquele número) de ganhar a aposta. O princípio de Bernoulli deu-lhe a boa indicação; não há que pleitar o desinteresse como fez Bertrand dizendo: «*La théorie pourtant est irréprochable; il n'est pas juste de lui opposer l'absurdité de ses conseils: elle n'en donne pas*».

Para nos convencermos do que fica dito, suponha-se que se vão fazer 2^N partidas. O nosso jogador «esperará» que em metade das partidas sai a «cara» logo à primeira, pois que é 1/2 a probabilidade de que isso aconteça; que em metade das restantes sai a «cara» à segunda, pela mesma razão; e em metade das outras, «cara» à terceira; etc. Por cada uma das primeiras receberá 1 escudo; por cada das segundas, 2; por cada das terceiras, 2^2: etc.; o que lhe dá um ganho esperado de 2^{N-1} em cada caso. O quadro seguinte ordena o que acaba de dizer-se.

Ordem da jogada em que aparece a «cara»	Número esperado das partidas correspondentes	Ganhos em cada partida	Ganho total esperado
1	2^{N-1}	1	2^{N-1}
2	2^{N-2}	2	2^{N-1}
3	2^{N-3}	2^2	2^{N-1}
...			
k	2^{N-k}	2^{k-1}	2^{N-1}
...			
$N-1$	$2^{N-(N-1)}$	2^{N-2}	2^{N-1}
N	2^{N-N}	2^{N-1}	2^{N-1}

O jogador espera então receber $2^{N-1}N$ e, tendo pago $2^N e$, o seu ganho líquido será

$$2^{N-1}N-2^N e=2^{N-1}(N-2e).$$

Trata-se dum ganho líquido esperado. Entende-se que se J fixar N por forma que

$$2^{N-1}(N-2e)=Q$$

a probabilidade dum ganho líquido inferior a Q ande à volta de $1/2$; entende-se, todavia, também que escolhendo o N suficientemente grande para que seja assaz grande a diferença

$$2^{N-1}(N-2e)-Q$$

se consiga que, a menos duma oscilação da amostragem assaz improvável, se tenha um ganho líquido superior a Q.

Restará ainda perguntar se o número de jogos indispensáveis não é demasiado grande? Em qualquer caso o ponto não é essencial; se a não aceitação do jogo vier daí, só haverá que explicitar essa razão e não criticar o princípio de BERNOULLI. Este princípio de BERNOULLI rege os casos em que a expectação é superior à entrada e os problemas de solvência do banqueiro, da ruína do jogador e da duração do jogo se supõem resolvidos; bem como quaisquer outros não essenciais, como é de rigor em ciência.

Tínhamos esperado que ao cabo desta jornada o paradoxo estivesse definitivamente arrumado e parece-nos que, pelo menos, alguma clareza se terá conseguido no que respeita o princípio de BERNOULLI e o que se deve entender por uma teoria matemática de comportamento económico — de mistura com um pouco de Cálculo de Probabilidades. Não resta porém dúvida que a formulação do jogo de S. PETERSBURGO foi tão astuciosa que resta sempre um sentimento suspeito de que alguma coisa ficou por dizer. E ainda bem, para que não seque o prazer de se discorrer sobre estas coisas; porque nem só de pão vive o homem e até porque, na parte em que vive de pão, as matemáticas tem sido e continuarão a ser um excelente auxílio.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA — RIO DE JANEIRO

Actividades em 1954

Sob a orientação do matemático Dr. LÉLIO I. GAMA, Director do IMPA e tendo a Dra. MARIA LAURA MOUSINHO como Secretário-Geral, o Instituto continuou suas actividades de pesquisa, tendo funcionado na sede do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, à Av. Wenceslau Braz, 71.

Conferências — O Prof. L. COLLATZ, do Technische Hochschule, Hannover, Alemanha, realizou no IMPA, em Maio de 1954, uma conferência sobre Matemática Aplicada subordinada ao tema «Métodos de Cálculo Numérico».

Prof. J. HORVATH, da Universidade de Los Andes, Bogotá, Colômbia, fez uma conferência sobre «Teoria da Aproximação», no mês de Julho de 1954.

No mês de Outubro de 1954, o IMPA recebeu a visita do matemático francês Prof. A. DENJOY, do Instituto de França, Paris, que pronunciou entre nós, três conferências sobre o tema «Aplicações dos conjuntos perfeitos totalmente descontínuos à teoria das funções de variável real e complexa».

Cursos — O Prof. G. MOSTOW, da Johns Hopkins University, Baltimore, U. S. A., realizou no IMPA os seguintes cursos:

1. *Topologia Algébrica* (Março-Agosto de 1954).
2. *Álgebras de Lie* (Março-Agosto de 1954).

O Prof. A. GROTHENDIECK, do Instituto Elie Cartan, Nancy, França, realizou, em São Paulo, sob os auspícios do IMPA, os seguintes cursos:

3. *Cálculo Diferencial nos espaços vectoriais topológicos* (Abril-Novembro de 1954).
4. *Grupos topológicos* (Abril-Setembro de 1954).
5. *Álgebra topológica* (Abril-Setembro de 1954).
6. *Espaços vectoriais topológicos* (Abril-Agosto de 1954, continuação do curso de 1953).