MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DOS EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, Ciências Físico-Químicas e Ciências Geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos. — Ano de 1955.

Ponto N.º 1

ARITMÉTICA

4026 — Provar que, se um número primo p é a diferença entre os quadrados de dois números, estes dois números são $\frac{p-1}{2}$ e $\frac{p+1}{2}$.

R: *Sejam* a *e* b *dois inteiros cuja diferença de quadrados é igual a* p.

Então $a^2 - b^2 = p$ *ou* $(a+b)(a-b) = p$, *por hipótese. Como* p *é primo terá de ser* $a + b = p$ *e* $a - b = 1$, *relações que conduzem a* $a = \frac{p+1}{2}$ *e* $b = \frac{p-1}{2}$.

4027 — Determinar dois números naturais, sabendo que eles estão entre si como 56 e 72 e que o seu máximo divisor comum é 25.

R: $a/b = 56/72$ *ou* $a/b = 7/9$.

Segundo as hipóteses, a *e* b *serão equimúltiplos de* 7 *e* 9, *respectivamente, e ainda múltiplos de* 25.

$$a = (7 \cdot 25)^{\cdot} \quad e \quad b = (9 \cdot 25)^{\cdot}.$$

Dos infinitos valores que a *e* b *podem assumir, indicaremos os menores* $a = 175$ *e* $b = 225$.

4028 — Se 15 divide o produto $77\,n$, qual o resto da divisão de n por 15? Justificar a resposta.

R: *Dividindo* 15 *o produto* $77 \cdot n$ *e sendo primo com* 77 *terá de ser* $n = 15^{\cdot}$: *— se um número divide um produto, divide necessàriamente um deles, pelo menos —. O resto da divisão de* n *por* 15 *é, pois, zero.*

ÁLGEBRA

4029 — Determinar m de modo que as raízes da equação $x^2 + 2(m+1)\,x + 1 = 0$ sejam imaginárias.

R: *Será* $\Delta = (m+1)^2 - 1 < 0$; $m(m+2) < 0$, *donde* $-2 < m < 0$.

4030 — Decompor em factores do 1.º grau o polinómio $x^4 - 5\,x^2 + 4$.

R: $x^4 - 5x^2 + 4 \equiv (x+2)(x-2)(x+1)(x-1)$, *sendo* $x_1 = -2$; $x_2 = -1$; $x_3 = +1$ *e* $x_4 = -2$ *as raízes da equação proposta.*

4031 — Desenvolver, simplificando o mais possível, $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$.

R: $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7 \equiv (\sqrt{x})^7 - 7 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{x})^6 + 21\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \cdot (\sqrt{x})^5 - 35\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3(\sqrt{x})^4 + 35\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4(\sqrt{x})^3 - 21\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5 \cdot (\sqrt{x})^2 + 7\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6(\sqrt{x}) - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7 \equiv (x^3 - x^{-4})\sqrt{x} + 7(x^{-3} - x^2)\sqrt{x} + 21(x - x^{-2})\sqrt{x} + 35(x^{-1} - 1)\sqrt{x}$.

Ponto N.º 2

ARITMÉTICA

4032 — Provar que, se a e b forem primos entre si, também $a+b$ e $a\,b$ são primos entre si.

R: *Seja* $K\ (\neq 1)$ *um factor primo que divida simultâneamente* $(a+b)$ *e* ab.

Sendo $ab = k^{\cdot}$, *ou é* $a = k^{\cdot}$ *ou é* $b = k^{\cdot}$.

Se é $a = k^{\cdot}$, *será também,* $b = k^{\cdot}$ *pois, por hipótese* $a + b = k^{\cdot}$. *Então* a *e* b *admitem um divisor* $k\ (\neq 1)$ *contra a condição inicial de ser* m. d. c. $(a, b) = 1$. *Concluiremos, pois, a não existência de um* $k \neq 1$ *divisor comum:* a *e* b *são primos entre si.*

4033 — Determinar dois números naturais, de todos os modos possíveis, sabendo que a sua soma é 228 e que, dividindo os dois números pelo seu máximo divisor comum, a soma dos quocientes obtidos é 12.

R: $a + b = 228$

Seja m. d. c $(a, b) = d$. *Fazendo* $a/d = x$ *e* $b/d = y$, *será* m. d. c $(x, y) = 1$ *e, como* $x + y = 12$, *teremos para* $x = 1, y = 11$, *para* $x = 5, y = 7$; *ou para* $x = 7, y = 5$, *para* $x = 11, y = 1$.

Ora $d \cdot x + d \cdot y = 228$; $(x+y) \cdot d = 228$; $12\,d = 228$ *e* $d = 19$. *Os possíveis valores de* x *e de* y, *darão, respectivamente, as soluções pretendidas:* $a = 19 \times 1 = 19$; $b = 19 \times 11 = 209$; $a = 19 \times 5 = 95$ *e* $b = 19 \times 7 = 133$ *e* $a = 19 \times 11 = 209$ *e* $b = 19 \times 1 = 19$.

4034 — Quais os números de três algarismos que são simultâneamente múltiplos de 13 e de 14? Justificar a resposta.

R: *Os números divisíveis, simultâneamente, por* 13 *e* 14 *serão múltiplos do seu* m. m. c.

É m. m. c. $(13, 14) = 182$ *e* $100 \leqslant 182\,n < 1000$ (n *inteiro*) *ou* $1 \leqslant n \leqslant 5$.

Para $n=1,2,3,4$ *e* 5 *são* $182\times1=182$; $182\times\times2=364$; $182\times3=546$; $182\times4=728$ *e* $182\times\times5=910$ *as soluções pedidas.*

ALGEBRA

4035 — Determinar m de modo que as raízes da da equação

$$4x^2-(m+1)x+m-2=0$$

sejam reais e desiguais.

R: $\Delta>0$ $\Delta=(m+1)^2-16(m-2)>0$; $m^2-14m+33>0$ *cujas raízes são* $x_1=11$ *e* $x_2=3$. *Então,* $m>11$ *e* $m<3$.

4036 — Decompor em factores do 1.º grau o polinómio x^4+3x^2-4.

R: $x^4+3x^2-4\equiv(x+2i)(x-2i)(x+1)(x-1)$ *onde* $\pm2i$ *e* ±1 *são raízes da equação proposta.*

4037 — Desenvolver, simplicando o mais possível,

$$(x-y\sqrt{2})^5-(x+y\sqrt{2})^5.$$

R: $(x-y\sqrt{2})^5-(x+y\sqrt{2})^5=10\cdot\sqrt{2}\,x^4y-$
$-40\sqrt{2}\,x^2y^3-4\sqrt{2}\,y^5.$

Exames de aptidão para frequência dos preparatórios para a Faculdade de Engenharia — Ano de 1955.

Ponto N.º 1

4038 — Se a razão entre o número de arranjos de m objectos distintos 4 a 4 e o número de arranjos dos mesmos m objectos 3 a 3 é 12, quantos são os objectos?

R: *Sendo* $A_4^m:A_3^m=12$ *é* $[m(m-1)(m-2)(m-3)]:[m(m-1)(m-2)]=12$, *donde* $m=15$.

4039 — Que valores se poderão dar a m na equação

$$8x^2-(m-1)x+m-7=0$$

para que as raízes sejam reais e iguais?

R: $\Delta=0$; $\Delta=(m-1)^2-32(m-7)=0$; $m^2-34m+225=0$ *cujas raízes são* $m_1=25$ *e* $m_2=9$

4040 — Sendo 120 o 4.º termo do desenvolvimento de

$$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{10}$$

determine o termo seguinte sem fazer o desenvolvimento.

R: *A razão de dois termos consecutivos do desenvolvimento do binómio de* Newton $(x+a)^n$, *é, como fàcilmente se pode verificar:* $T_{p+2}:T_{p+1}=[C_{p+1}^n a^{p+1}\cdot x^{n-(p+1)}]:$

$$:[C_p^n a^p x^{n-p}]=\frac{n-p}{p+1}\cdot a\cdot x^{-1},\ \textit{ou}$$

$$T_{p+2}=T_{p+1}\cdot\frac{n-p}{p+1}\cdot a\cdot x^{-1}.$$

Sendo $T_4=120$ *será* $T_5=120\times\times\frac{10-3}{3+1}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot x^{-1}=210\cdot x^{-3}$.

Nota: *O 4.º termo do desenvolvimento de* $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{10}$ *é* $T_4=120\cdot x$ *e não* $T_4=120$, *como se escreve no enunciado. Assim, será,* $T_5=120\,x\times\frac{10-3}{3+1}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot x^{-1}=$
$=210\cdot x^{-2}$.

4041 — Resolver a equação

$$36x^4-13x^2+1=0$$

R: *A substituição* $y=x^2$ *na equação* $36x^4-13x^2+1=0$ *dá a equação resolvente* $36y^2-13y+1=0$ *com as raízes* $y_1=\frac{1}{4}$ *e* $y_2=\frac{1}{9}$.

Então $x=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}$ *e* $x=\pm\sqrt{\frac{1}{9}}=\pm\frac{1}{3}$.

4042 — Classifique as funções. Dê um exemplo de uma função algébrica irracional.

4043 — Uma mulher está a pôr laranjas em dois cestos e verifica que tem um 30 e o outro tem 20, e ainda estão 15 laranjas fora dos cestos. Como deverá distribuir estas 15 pelos dois cestos para que se mantenha a proporção em que as laranjas neles estavam?

R: *É suficiente dividir* 15 *em partes directamente proporcionais a* 2 *e* 3 *visto ser a proporção em que os laranjas estão distribuídas. Então:* $x:2=(15-x):3$, *donde* $x=6$. R: *O cesto com* 20 *receberá mais* 6 *e o outro mais cesto* 9 *laranjas.*

Ponto N.º 2

4044 — Ache a expressão do desenvolvimento de

$$(1+x)^m+(1-x)^m$$

R: $(1+x)^m=1+m\,x+C_2^m x^2+C_3^m x^3+\cdots+m\,x^{m-1}+x^m$
$(1-x)^m=1-m\,x+C_2^m x^2-C_3^m x^3+\cdots\mp m\,x^{m-1}\pm x^m$
$(1+x)^m+(1-x)^m=$
$=2\left(1+C_2^m x^2+C_4^m x^4+\cdots\begin{matrix}+x^m\\+m\,x^{m-1}\end{matrix}\right)\begin{matrix}\to \textit{ se } m \textit{ for par}\\ \to \textit{ se } m \textit{ for ímpar.}\end{matrix}$

Então $(1+x)^m+(1-x)^m=2\sum_0^k C_{2k}^m x^{2k}$

$$\left(k=0,1,2,\cdots e\,\frac{m}{2}\ \textit{sendo}\ m\ \textit{par}\right)\ e$$

$$\left(k=0,1,2,\cdots e\,\frac{m-1}{2}\ \textit{sendo}\ m\ \textit{ímpar}\right).$$

4045 — Simplifique a fracção

$$\frac{2x^2-50}{x^2-11x+30}$$

R: $\frac{2x^2-50}{x^2-11x+30}=\frac{2(x+5)(x-5)}{(x-6)(x-3)}=\frac{2(x+5)}{(x-6)}$.

4046 — Sabe-se que a razão entre o número de arranjos de m objectos distintos n a n e o número de combinações desses m objectos n a n é 120, e que a razão entre o número de arranjos de $m-1$ desses objectos $n-1$ a $n-1$ e o número de combinações dos m objectos n a n é 2. Qual o número m de objectos?

R: $A_n^m : C_n^m = 120$; $A_n^m : (A_n^m/n!) = 120$, $n! = 120$ *e* $n = 5$. $A_{n-1}^{m-1} : C_n^m = 2$; $A_{n-1}^{m-1} : A_n^m/n! = 20$; $\{[(m-1)\cdots(m-n+1)]\cdot n!\} : [m(m-1)\cdots(m-n+1)] = 2$ *ou* $m = 60$.

4047 — Resolver a equação

$$\frac{m}{x} = \frac{x-1}{x-m}$$

e dizer para que valores de m as raízes são reais.

R: $\quad \dfrac{m}{x} = \dfrac{x-1}{x-m}$; $x^2-(1+m)\,x+m^2=0$.

Será $\quad \Delta > 0 \quad \Delta = (1+m)^2 - 4\,m^2 > 0$; $-3\,m^2+2\,m+1\,0 >$ *com as raízes* 1 *e* $-\dfrac{1}{3}$.

Será $\qquad -\dfrac{1}{3} < m < 1$.

4048 — O que entende por função inversa de uma função dada? Exemplifique.

4049 — Divida a importância de 200$00 por 3 pessoas de forma que a 1.ª receba mais 20$00 do que a 2.ª e esta menos 30$00 do que a 3.ª.

R: *Se a primeira recebe* x *a segunda recebe* $(x-20)$ *e* $(x+10)$ *a terceira.*

$$x+(x-20)+(x+10)=200, \text{ donde } x=70$$

A primeira recebe 70$00; a segunda 50$00 e a terceira 80$00.

Soluções dos n.os 4026 a 4049 de J. S. Paulo.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **Exame final — Milicianos — Prova prática — 13 de Dezembro de 1954.**

4050 — Dada a função $f(x) = \operatorname{arctg} x - \log\sqrt{1+x^2}$ resolva os seguintes problemas:

a) Desenvolva $f(x)$ em série e determine o seu intervalo de convergência.

b) Calcule $Pf(x)$.

R: a) *Como* $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$ integrando vem:

$f'(x) = \operatorname{arctg} x = K\pi + x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots$ e *integrando de novo, observando que* $f(o) = 0$:

$$f(x) = K\pi x + \frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^6}{5\cdot 6} - \cdots.$$

A condição de convergência é $|x| < 1$

b) $Pf(x) = \dfrac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\ x - \dfrac{1}{2}x\log(1+x^2) + C$.

4051 — Há valores racionais de λ para os quais o sistema:

$$\begin{aligned} 4x+2y+z &= \lambda x \\ 2x+4y+2z &= \lambda y \\ x+2y+4z &= \lambda z \end{aligned}$$

tem soluções não nulas?

R: *Para o sistema homogéneo ter soluções não nulas* $\begin{vmatrix} (4-\lambda) & 2 & 1 \\ 2 & (4-\lambda) & 2 \\ 1 & 2 & (4-\lambda) \end{vmatrix}$ *o determinante deve ser nulo. Desenvolvendo o determinante e igualando a zero a expressão obtida obtém-se a equação* $(4-\lambda)^3 - 9(4-\lambda) + 8 = 0$ *que tem as raízes* $\lambda_1 = 1{,}62772$ $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 7{,}37228$. *Portanto o valor racional* $\lambda_2 = 3$ *é o único que satisfaz ao problema.*

4052 — Que superfície é representada por uma equação do tipo $f(x,z)=0$? Qual será a expressão de $f(x,z)=0$ se a superfície for de revolução? Deduza a equação do plano tangente a esta superfície no ponto $P(a,b,c)$ e diga qual a posição que ele ocupa em relação aos eixos coordenados. Esse plano tem apenas um ponto de contacto com a superfície? Se ele for da forma $X=a$ a equação $f(x,z)=0$ define alguma função $Z(x)$ na vinhança de $M(a,c)$ considerado no referencial $x0z$?

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **1.º Exame de Frequência extraordinário — 1 de Abril de 1955.**

4053 — Escreva a equação da hipérbole que passa pela origem e cujas assíntotas são as rectas $x=1$ e $y=1$. A hipérbole é equilátera? Porquê? Indique o valor da excentricidade, determine as coordenadas dos focos e as equações das directrizes.

Deduza a equação do diâmetro conjugado com a direcção m e conclua que $m+m'=0$. (Utilize eixos coordenados rectângulares).