4046 — Sabe-se que a razão entre o número de arranjos de m objectos distintos n a n e o número de combinações desses m objectos n a n é 120, e que a razão entre o número de arranjos de $m-1$ desses objectos $n-1$ a $n-1$ e o número de combinações dos m objectos n a n é 2. Qual o número m de objectos?
R: $A_n^m : C_n^m = 120$; $A_n^m : (A_n^m/n!) = 120$, $n! = 120$ *e* $n = 5$. $A_{n-1}^{m-1} : C_n^m = 2$; $A_{n-1}^{m-1} : A_n^m/n! = 20$; $\{[(m-1)\cdots(m-n+1)]\cdot n!\} : [m(m-1)\cdots(m-n+1)] = 2$ *ou* $m = 60$.

4047 — Resolver a equação

$$\frac{m}{x} = \frac{x-1}{x-m}$$

e dizer para que valores de m as raízes são reais.

R: $\dfrac{m}{x} = \dfrac{x-1}{x-m}$; $x^2-(1+m)x+m^2=0$.

Será $\Delta > 0$ $\Delta = (1+m)^2 - 4m^2 > 0$; $-3m^2+2m+1\ 0 >$ *com as raízes* 1 *e* $-\dfrac{1}{3}$.

Será $$-\frac{1}{3} < m < 1.$$

4048 — O que entende por função inversa de uma função dada? Exemplifique.

4049 — Divida a importância de 200\$00 por 3 pessoas de forma que a 1.ª receba mais 20\$00 do que a 2.ª e esta menos 30\$00 do que a 3.ª.

R: *Se a primeira recebe* x *a segunda recebe* $(x-20)$ *e* $(x+10)$ *a terceira*.

$$x+(x-20)+(x+10) = 200, \text{ donde } x = 70$$

A primeira recebe 70\$00; a segunda 50\$00 e a terceira 80\$00.

Soluções dos n.os 4026 a 4049 de J. S. Paulo.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Milicianos — Prova prática — 13 de Dezembro de 1954.

4050 — Dada a função $f(x) = \operatorname{arctg} x - \log\sqrt{1+x^2}$ resolva os seguintes problemas:

a) Desenvolva $f(x)$ em série e determine o seu intervalo de convergência.

b) Calcule $Pf(x)$.

R: a) *Como* $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$ integrando vem:

$f'(x) = \operatorname{arctg} x = K\pi + x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots$ e *integrando de novo, observando que* $f(o) = 0$:

$$f(x) = K\pi x + \frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^6}{5\cdot 6} - \cdots.$$

A condição de convergência é $|x| < 1$

b) $Pf(x) = \dfrac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\ x - \dfrac{1}{2}x\log(1+x^2) + C$.

4051 — Há valores racionais de λ para os quais o sistema:

$$\begin{aligned} 4x+2y+z &= \lambda x \\ 2x+4y+2z &= \lambda y \\ x+2y+4z &= \lambda z \end{aligned}$$

tem soluções não nulas?

R: *Para o sistema homogéneo ter soluções não nulas* $\begin{vmatrix} (4-\lambda) & 2 & 1 \\ 2 & (4-\lambda) & 2 \\ 1 & 2 & (4-\lambda) \end{vmatrix}$ *o determinante deve ser nulo. Desenvolvendo o determinante e igualando a zero a expressão obtida obtém-se a equação* $(4-\lambda)^3 - 9(4-\lambda) + 8 = 0$ *que tem as raízes* $\lambda_1 = 1{,}62772$ $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 7{,}37228$. *Portanto o valor racional* $\lambda_2 = 3$ *é o único que satisfaz ao problema.*

4052 — Que superfície é representada por uma equação do tipo $f(x,z) = 0$? Qual será a expressão de $f(x,z) = 0$ se a superfície for de revolução? Deduza a equação do plano tangente a esta superfície no ponto $P(a,b,c)$ e diga qual a posição que ele ocupa em relação aos eixos coordenados. Esse plano tem apenas um ponto de contacto com a superfície? Se ele for da forma $X = a$ a equação $f(x,z) = 0$ define alguma função $Z(x)$ na vinhança de $M(a,c)$ considerado no referencial $x0z$?

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º Exame de Frequência extraordinário — 1 de Abril de 1955.

4053 — Escreva a equação da hipérbole que passa pela origem e cujas assíntotas são as rectas $x = 1$ e $y = 1$. A hipérbole é equilátera? Porquê? Indique o valor da excentricidade, determine as coordenadas dos focos e as equações das directrizes.

Deduza a equação do diâmetro conjugado com a direcção m e conclua que $m + m' = 0$. (Utilize eixos coordenados rectângulares).

R: *Utilizando o sistema* $x'0'y'$ *onde os eixos são os assíntotas a equação é* $x'y' = k$ *e desfazendo a translacção é* $(x-1)(y-1)=1$ *ou* $xy=x+y$. *A hipérbole é equilátera porque as assíntotas são perpendiculares; a sua excentricidade é pois* $e=\sqrt{2}$. *Para determinar as coordenadas dos focos determine-se a intersecção de* $xy = x + y$ *com* $y = x$: *obtém-se os pontos* $O(0,0)$ *e* $A(2,2)$ *e* $\overline{OA}=2a$ *ou* $a=\sqrt{2}$. *Como* $c=ae$, *vem* $c=2$ *e por os focos estarem em* $y=x$ *virá* $F(1\pm\sqrt{2}, 1\pm\sqrt{2})$.

Como $d = \frac{a}{e} = 1$ *vem* $y = -x \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Considerando a corda $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$ *onde* (x_0, y_0) *é o seu ponto médio virá* $(x_0+\alpha t)(y_0+\beta t) = x_0 + \alpha t + y_0 + \beta t$ *e, como o termo em* t *tem de ser nulo, virá* $x_0 m + y_0 - 1 - m = 0$ *onde* $m=\beta/\alpha$ *e a equação do diâmetro conjugado com* m *é* $mx + y - 1 - m = 0$ *cujo coeficiente angular é* $m' = -m$ *e daqui* $m + m' = 0$.

4054 — Conduza pelo ponto $P(1,1,1)$ uma recta que se apoie na recta $\begin{cases} x = z - 1 \\ y = z + 2 \end{cases}$ e seja paralela ao plano $x + y + z + 1 = 0$.

R: *A recta pedida será a intersecção do plano* $\pi \equiv 2x + y - 3z = 0$ *definido pelo ponto* $P(1,1,1)$ *e pela recta dada com o plano* $\pi' \equiv x + y + z - 3 = 0$ *conduzido por* $P(1,1,1)$ *paralelamente ao plano* $x + y + z + 1 = 0$.

4055 — *a*) Sejam u_n e v_n duas sucessões monótonas, a primeira crescente e a segunda decrescente, tais que $\lim_{n=\infty}(u_n - v_n) = 0$. Mostre que é sempre $u_n \leqslant v_n$ e que um só número k satisfaz à condição $u_n \leqslant k \leqslant v_n$. Que é k em relação ao conjuntos u_n e v_n?

b) Quando se diz que a série S) é uniformemente convergente num conjunto X? Domonstre que a série $\sum a_n x^n$ é uniformemente convergente em $(0, a)$ quando convirja para $x = a$.

c) Prove que as séries de Bertrand $\sum \frac{1}{n(\log n)^\beta}$ convergem se $\beta > 1$ e divergem se $\beta \leqslant 1$. O princípio geral que serviu de base à demonstração anterior pode também aplicar-se ao estabelecimento da convergência de $\sum \frac{1}{n^\beta}$ quando $\beta > 1$?

4056 — *a*) Defina função localmente limitada num conjunto X. Uma função contínua num conjunto fechado é localmente limitada nesse conjunto? Porquê?

b) Baseie-se no teorema de Cantor para concluir que se $f(x)$ é contínua no intervalo fechado (a, b) então este pode ser dividido num número finito de sub-intervalos em cada um dos quais a oscilação de $f(x)$ é menor do que um número positivo δ prèviamente escolhido.

4057 — *c*) Sendo $f(x)$ definida e crescente em (a, b) com um ponto de descontinuidade c interior a (a, b) índique o valor de $w(c)$.

Poder-se-á modificar a definição de $f(x)$ em $x=c$ por forma a torná-la contínua lateralmente nesse ponto? Porquê?

A função poderá tornar-se contínua em $x = c$?

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º Exame de Frequência — Ordinário — 2 de Março de 1955.

4058 — Considere a cónica de centro $P(1,1)$ onde $x = k + 1$ $(k > 0)$ é uma das directrizes e $F(2,1)$ o foco associado. Indique os valores de k para os quais a cónica é uma hipérbole e escreva as equações das assíntotas.

Para que valores de k a hipérbole é equilátera? Escreva neste caso a sua equação.

Mostre que o diâmetro conjugado da cónica (elipse ou hipérbole) com a direcção $k - 1$ é perpendícular à recta que passa por P e por $Q(2, k+1)$.

R: *Fazendo uma translacção de eixos tome-se a nova origem em* $P(1,1)$. *No novo sistema* $x'0y'$ *é* $F(1,0)$ *ou seja* $c = 1$ *e* $x = k + 1$ *é transformada em* $x' = k$.

Então as relações $\begin{cases} e = \frac{c}{a} \\ d = \frac{a^2}{c} \end{cases}$ *dão imediatamente* $a^2 = k$ *e* $e = \frac{1}{\sqrt{k}}$. *Para que a cónica seja uma hipérbole é preciso que* $e > 1$ *ou* $0 < k < 1$. *As assíntotas sãa as rectas* $y - 1 = \pm\sqrt{\frac{1-k}{k}}(x-1)$. *A hipérbole é equilátera quando* $e = \sqrt{2}$ *ou* $k = \frac{1}{2}$ *e a sua equação será* $(x-1)^2 - (y-1)^2 = \frac{1}{2}$.

Considerando a hipérbole $\frac{x'^2}{k} - \frac{y'^2}{1-k} = 1$ *é* $m m' = \frac{1-k}{k}$ *e com* $m = k - 1$ *vem* $m' = -\frac{1}{k}$; *o coeficiente angular de* PQ *é* K *e por isso está verificada a perpendicularidade. Idêntico raciocínio se faz para a elipse*

4059 — Escreva a equação do plano π definido por $P(0, -1, 1)$ e $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - z = 0. \end{cases}$ Determine os cosenos directores de r e as equações da sua projecção sobre o plano $\pi' \equiv 2x + y - z + 1 = 0$. É π perpendicular a π'? Justifique.

Mostre que a recta perpendicular a r, conduzida no plano π' pelo seu traço é perpendicular à projecção de r sobre o mesmo plano.

R: *O feixe de planos que passa por* r *é* $(1+m)x - y + (1-m)z = 0$ *e o que passa por* $P(0,-1,1)$ *é aquele em que* $m=2$ *ou seja* $\pi \equiv 3x - y - z = 0$. *Determinados os parâmetros directores* $h=1, k=1, l=1$ *será* $\cos \alpha, \beta, \gamma = \frac{h,k,l}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}} = \pm \frac{1,2,1}{\sqrt{6}}$.

Para determinar a projecção de r *sobre* π' *escreva-se o feixe de planos que passam por* $r: (1+m)x - y + (1-m)z = 0$ *e escolha-se o que é perpendicular a* $\pi': x - y + z = 0$. *A projecção será a recta* $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0. \end{cases}$ π *não é perpendicular a* π' *pois não se verifica a relação* $AA' + BB' + CC' = 0$.

O traço de r *em* π' *determina-se resolvendo o sistema:*

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{que tem por solução} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

O feixe de planos que passam por π' *é* $A\left(x + \frac{1}{3}\right) + B\left(y + \frac{2}{3}\right) + C\left(z + \frac{1}{3}\right) = 0$ *e o que é perpendicular a* r *é* $x + 2y + z + 2 = 0$. *A recta perpendicular a* r *conduzida em* π' *vem a ser então* $\begin{cases} x + 2y + z + 2 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$ *cujos parâmetros directores são* $h_1 = -9, k_1 = 12$ *e* $l_1 = -12$. *Os parâmetros directores da projecção são* $h_2 = 0, k_2 = 3$ *e* $l_2 = 3$ *e como* $h_1 h_2 + k_1 k_2 + l_1 l_2 = 0$ *as rectas são perpendiculares*.

4060 — *a*) Supondo limitado o conjunto dos distintos valores u_n, prove que o conjunto dos sublimites de u_n é fechado e o seu limite superior é $\overline{\lim}\, u_n$.

b) Enuncie a condição necessária e suficiente para a convergência de u_n e mostre que uma sucessão monótona limitada verifica essa condição.

c) Demonstre que sendo a_n uma sucessão monótona decrescente de números positivos e se A_n é limitada então $\Sigma A_n (a_n - a_{n+1})$ é absolutamente convergente.

4061 — Seja $f(x)$ definida e contínua no interior de (a, b). Supondo que se tem $|f(x') - f(x'')| \leqslant K |x' - x''|$, mostre que é possível definir a função em a e b por forma que fique contínua nesses pontos. Em que condições o primitivo campo de existência é transformado por $f(x)$ num conjunto fechado? A função verificava a desigualdade condicionada de CANTOR antes do prolongamento do campo de existência? Porquê?

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 2.º exame de frequência (ordinário) — 30 de Junho de 1955.

4062 — *a*) Calcule a primitiva de $f(x) = e^x \cdot \operatorname{sen}^2 x + \frac{3x+1}{x(x^2-1)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$

b) Exponha a utilização da fórmula de TAYLOR no estudo dos máximos e mínimos de $f(x)$. Aplique esses conhecimentos para averiguar se $x = 0$ é extremante de $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}$

R: a) $Pf(x) = e^x \cdot \operatorname{sen}^2 x - \frac{e^x}{5}(\operatorname{sen} 2x - 2\cos 2x) + \log \frac{(x-1)^2}{x(x+1)} + \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2} + C$

b) *Como* $f^{(IV)}(x) = e^x$ *é a primeira derivada que não se anula para* $x = 0$ *e* $f^{(IV)}(0) = 1 > 0$, *estamos em presença dum mínimo.*

4063 — *a*) Enuncie alguma proposição que garanta a diferenciabilidade de $f(x, y)$ em $P(a, b)$ e demonstre a sua suficiência.

b) Dadas as funções $z = f(x, y)$, $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$ a que condições devem satisfazer para que exista $\left(\frac{dF}{dt}\right)_{t_0}$ onde $F(t) = f(\varphi, \psi)$?

c) Enuncie o teorema de existência das funções implícitas e mostre que $f(x, y) = xy + x + y + 1 = 0$ define na vizinhança de $P(1, -1)$ uma função $y(x)$. Nesse ponto $y(x)$ será crescente? Porquê?

4064 — *a*) Deduza as fórmulas de GIRARD. Pela análise da equação $z^n - a = 0$ (a complexo) diga quais são os valores da soma e do produto das raízes índice n do complexo a.

b) Em que consiste a transposição da matriz A? Designando por A^* a transposta de A, prove que $(A + B)^* = A^* + B^*$. Sendo A do tipo $(n \times n)$ que relação existe entre $|A|$ e $|A^*|$? Justifique.

c) Sendo A_i^k o complemento algébrico do elemento a_i^k, prove que as matrizes

$$A = \begin{Vmatrix} a_1^1 \; a_1^2 \cdots a_1^n \\ a_2^1 \; a_2^2 \cdots a_2^n \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_n^1 \; a_n^2 \cdots a_n^n \end{Vmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{A} = \begin{Vmatrix} A_1^1 \; A_2^1 \cdots A_n^1 \\ A_1^2 \; A_2^2 \cdots A_n^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_1^n \; A_2^n \cdots A_n^n \end{Vmatrix}$$

estão relacionadas do seguinte modo:

$$A\hat{A} = \hat{A}A = |A| \cdot I$$

d) Quando é que as colunas duma matriz são linearmente dependentes? Prove que a matriz quadrada de colunas linearmente dependentes é singular.

e) Utilize a teoria das matrizes para estudar o sistema:

$$\begin{aligned} x+y+z+u&=0\\ x-y+z\quad &=1\\ y-z+u&=1\\ x\qquad\quad +u&=0\end{aligned}$$

R: e) *O sistema é indeterminado* (*grau de indeterminação* 1).

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência (extraordinário) — 6 de Julho de 1955.

4065 — *a*) Calcule a primitiva de $f(x)=x^2\cdot\log x+ +\operatorname{sen}2x\cdot\sec^4 x+\dfrac{x+1}{(x^2+2x+1)^2}$.

b) Enuncie e demonstre alguma proposição que garanta o desenvolvimento de $f(x)$ em série de Taylor para certo intervalo $(a, a\pm k)$.

Desenvolva em sèrie de Mac-Laurin a função $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x-2}$ e indique o seu intervalo de convergência.

R: a) $\mathrm{P}\,f(x)=\dfrac{x^3}{3}\left(\log x-\dfrac{1}{3}\right)+\sec^2 x-$

$$-\frac{1}{2(x^2+2x+1)}+C.$$

b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x-2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{x-2}\right)=$

$$=\frac{1}{3}\left[(1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots)-\right.$$

$$\left.-\left(1-\frac{x}{2}-\left(\frac{x}{2}\right)^2-\cdots-\left(\frac{x}{2}\right)^n-\cdots\right)\right]=-$$

$$-\frac{x}{2}+\frac{5x^2}{4}-\frac{7x^3}{8}+\cdots+\left[(-1)^n x^n+\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]+\cdots\quad |x|<1$$

4066 — *a*) Mostre que $f(x,y)$ é contínua em $P(a,b)$, onde tem derivadas finitas, desde que em torno deste ponto uma das derivadas se conserve limitada.

b) Sendo $\varphi(u)$ e $\psi(u)$ diferenciáveis em u_0 e $f(x,y)$ diferenciável em $P[a=\varphi(u_0), b=\psi(u_0)]$, mostre que $f(\varphi,\psi)$ é diferenciável em u_0.

c) Deduza a equação do plano tangente à superfície $z=f(x,y)$ no ponto $P(x,y,z)$ e aplique o resultado para calcular a equação do plano tangente à superfície $z=x^2+y^2+xy-1$ no ponto $P(0,1,0)$.

d) Discuta e classifique o lugar geométrico de equação,

$$x^2+4xy+4y^2+2kx+4ky+4=0\qquad (k\neq 0)$$

R: c) $\qquad Z=X+2(Y-1)$

d) $\Delta=B^2-AC=0$ *e, como* $\dfrac{B}{A}=\dfrac{E}{D}$, *a equação pode escrever-se na forma* $u^2+2ku+4=0$, *com* $u=x+2y$, *e como o binómio discriminante daquela equação é* k^2-4 *a equação dada representa duas rectas paralelas para* $k<-2$ *ou* $k>2$ *e nada representa se* $-2<k<0$ *e* $0<k<2$.

4067 — *a*) Defina produto de matrizes e mostre que a multiplicação de matrizes é distribuitiva.

b) Se $A=|a_i^k|$ é uma matríz regular do tipo $(n\times n)$, $\alpha_i^k=\dfrac{A_i^k}{|A|}$ e $A^{-1}=|\alpha_i^k|^*$, prove que $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

c) Utilize a teoria das matrizes para mostrar que os planos

$$\begin{aligned} x+3y+z-2&=0\\ 2x+4y+3z+1&=0\\ x+y+2z-1&=0\end{aligned}$$

não tem qualquer ponto comum.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — — Epoca de Julho — 16 de Julho de 1955.

4068 — Faça o estudo de $f(x)=\log(x^2+\alpha x-2\alpha^2)$ $(\alpha>0)$, calcule a sua primitiva e apresente o desenvolvimento, desta em série de Mac-Laurim caso seja possível.

R: *a*) *Dominio* $(-\infty,-2\alpha)$ $(\alpha,+\infty)$. *Pontos de descontinuidade:* $x=-2\alpha$, $x=2$ e $x=\infty$

b) $f'(x)=\dfrac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x-2\alpha^2}$ *e daí se conclui que* $f(x)$ *cresce em* $(\alpha,+\infty)$ *e decresce em* $(-\infty,-2\alpha)$; *não tem extremos.*

c) $f''(x)=-\dfrac{2x^2+2\alpha x+5\alpha^2}{x^2+\alpha x-2\alpha^2}<0$ *e portanto a concavidade está sempre voltada para baixo.*

d) *Assíntotas:* $X=-2\alpha$ e $X=\alpha$

$$\mathrm{P}f(x)=x\log(x^2+\alpha x-2\alpha^2)-2x+\alpha\log\frac{(x+2\alpha)^2}{x-\alpha}+C$$

Não é possível efectuar o desenvolvimento em série de $\mathrm{P}f(x)$.

4069 — Dado o polinómio $f(z)=p_0z^n+p_1z^{n-1}+ +p_2z^{n-2}+\cdots+p_n$, que relação deve existir entre os coeficientes p_0, p_1, e p_2 e o grau de $f(z)$ para que se anulem simultâneamente o segundo e terceiro termos do transformado $f(z+h)$?

R: *Para que se anule o segundo termo terá de ser*) $h = -\dfrac{p_1}{np_0}$ *e, para que se anule o terceiro, é preciso que* $f^{n-2}(h) = 0$ *ou seja*

$$(2) \qquad \binom{n}{2} p_0 h^2 + (n-1) p_1 h + p_2 = 0 .$$

Eliminando h *entre* (1) (2) *obtem-se a condição*
$$\frac{n-1}{2} p_1^2 - (n-1) p_1^2 + n p_0 p_2 = 0$$

4070 — Sejam $A^1, A^2, \cdots$ as sucessivas colunas da matriz $A = | a_i^k |$ $(n \times n)$. Junte βA^s a A^t e αA^t a A^s deixando sem alterações as restantes colunas.

a) Utilise o teorema de Jacobi para achar o determinante da nova matriz $B = | b_i^k |$ que assim se obtem. Sendo A regular e $\alpha \cdot \beta \neq 1$, que relação existe entre as soluções dos sistemas $a_i^h x_h = c_i$ e $b_i^h y_h = c_i$ $(i, h = 1, \cdots n)$?

b) Substitua em A a coluna A^k pela composição $d_1^k A^1 + d_2^k A^2 + \cdots d_n^k A^n$. Calcule o elemento genérico da nova matriz bem como o seu determinante.

R: a) $|B| = |A| - \alpha\beta |A|$

$$x_l = y_l \textit{ para } l \neq s, t \quad y_s = \frac{x_s - \beta x_t}{1-\alpha\beta} \textit{ e } y_t = \frac{x_t - \alpha x}{1-\alpha\beta}$$

b) *O elemento genérico é* $l_r^s = a_r^{\alpha}\left(\varepsilon_{\alpha}^s + d_{\alpha}^k \varepsilon_k^s - \varepsilon_{\alpha}^k \varepsilon_k^s\right)$.
O determinante da nova matriz calcula-se fàcilmente aplicando o teorema de Laplace *à coluna* k. *O seu valor é* $d_k^k |A|$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Epoca de Outubro — 13 de Outubro de 1955.

4071 — Sendo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x-1} & (x < -1) \\ x^2 & (-1 \leqslant x < 2) \\ \dfrac{1}{x} & (2 \leqslant x) \end{cases}$$

a) Indique, caso existam, os pontos de descontinuidade próprios. A função é contínua no infinito?

b) Calcule $f'_d(-1)$ e $f'_e(-1)$. Existe $f'(-1)$?

c) Determine intervalos de monotonia, extremos, sentido da concavidade e pontos de inflexão de $f(x)$.

d) Algum dos teoremas fundamentais é aplicável em intervalo que contenha $x = -1$ como ponto interior? Porquê?

R: a) *A função é descontínua em* $x = 2$ *e no infinito.*

b) $f'_d(-1) = -2$ e $f'_e(-1) = -\dfrac{1}{4}$ *Como* $f'_d(-1) \neq$ $\neq f'_e(-1)$ *não existe* $f'(-1)$.

c) *A função é decrescente de* $-\infty$ *a* 0 *onde atinge um mínimo, crescente de* 0 *a* 2 *e decrescente de* 2 *a* $+\infty$; *tem a concavidade voltada para baixo entre* $-\infty$ — 1, *voltada para cima entre* -1 *e* $+\infty$. *Ponto de inflexão em* $x = -1$.

d) *Não, porque* $f(x)$ *não admite derivada nesse ponto.*

4072 — *a*) Que superfície é representada por uma equação do tipo $f(y,z) = 0$? Intersectando essa superfície pelo plano $Ax + By + Cz + D = 0$, como determina as equações das projecções da secção assim obtida sobre os planos coordenados?

b) Que representa o sistema $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b_2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1 \\ z = k \end{cases}$ para os diferentes valores de k? Se, em certas condições, o sistema representar curva no espaço determine a equação da sua tangente em ponto genérico.

R: a) *É uma superfície cilíndrica de geratrizes paralelas ao eixo dos* xx. *As equações das projecções são*: *sobre* $y0z \begin{cases} f(y,z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, *sobre* $x0y$ $\begin{cases} \varphi(x,y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, *onde* $\varphi(x,y)$ *resultou da eliminação de* z *entre as equações* $\begin{cases} f(y,z) = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$ *e sobre* $x0z$ $\begin{cases} \psi(x,z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ *onde* $\psi(x,z)$ *resultou da eliminação de* y *entre as equações* $\begin{cases} f(y,z) = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$

b) *Para* $k > b$ *e* $k < -b$ *o sistema nada representa; para* $k = \pm b$ *representa o ponto* $P(0, 0, \pm b)$ *e para* $-b < k < b$ *representa um elipse assente no plano* $z = k$.
Para $-b < k < b$ *a equação da tangente em* $P(x, y, k,)$ *é* $\begin{cases} \dfrac{2x}{a^2}(X - x) + \dfrac{2y}{b^2}(Y - y) + \dfrac{2k}{b^2}(Z - k) = 0 \\ Z = k \end{cases}$

4073 — Considere o sistema $a_i^h x_h = b_i$ $(i, h = 1, 2, \cdots n)$. Deduza a sua solução na hipótese $|A| = |a_i^k| \neq 0$. Faça $x_h = b_h^k y_k$ $(k = 1, 2, \cdots n)$ de modo a obter o sistema $p_i^k y_k = b_i$. Qual é a expressão de p_i^k? Considere a hipótese de $|B| = |b_i^k| \neq 0$, exprima os yy em função dos xx e deduza daí a expressão dos P_i^k em função dos A_i^j e B_i^k.

Enunciados e solução dos n.os 4050 a 4073 de F. de Jesus.

ANÁLISE INFINITESIMAL

I. S. C. E. F. — Análise Infinitésimal — Exame final — Época de Outubro — 14 de Outubro de 1954.

4074 — Considere a equação $f(x,y,z)=2xz^2+x^2y^2-2y-3z=0$ e prove que ela define uma função $z=\varphi(x,y)$ na vizinhança de $P(-1,1,-1)$. Escreva até aos termos do 2.º grau, inclusivé, o desenvolvimento tayloriano da função $z=\varphi(x,y)$ segundo as potências de $(x+1)$ e $(y-1)$.

A função $z=\varphi(x,y)$ terá um extremo no ponto $(-1,1)$? Justifique a resposta.

R: *Como* $f(-1,1,-1)=0$ *e* $f(x,y,z)$ *é contínua como função de* (x,y) *e* $f'_z(-1,1,-1)\neq 0$, *existe uma vizinhança do ponto* $(-1,1)$ *dentro da qual existe uma função* $z=\varphi(x,y)$ *que substituída na equação dada a transforma numa identidade.*

$$z'_x(-1,1)=-\frac{f'_x(-1,1,-1)}{f'_z(-1,1,-1)}=0,$$

$$z'_y(-1,1)=-\frac{f'_y(-1,1,-1)}{f'_z(-1,1,-1)}=0,$$

$$z''_{x^2}(-1,1)=-\frac{f''_{x^2}(-1,1,-1)}{f'_z(-1,1,-1)}=-2,$$

$$z''_{xy}(-1,1)=-\frac{f''_{xy}(-1,1,-1)}{f'_z(-1,1,-1)}=4 \quad e$$

$$z''_{y^2}(-1,1)=-\frac{f''_{y^2}(-1,1,-1)}{f'_z(-1,1,-1)}=-2$$

e portanto o desenvolvimento tayloriano de $z(x,y)$ *é o seguinte:*

$$z(x,y)=z(-1,1)+(x+1)\,z'_x(-1,1)+(y-1)\,z'_y(-1,1)+(x+1)^2 z''_{x^2}(-1,1)+2(x+1)(y-1)\,z''_{xy}(-1,1)+(y-1)^2 z''_{y^2}(-1,1)+R_3=-1-2(x+1)^2+8(x+1)(y-1)-2(y-1)^2+R_3$$

Como o ponto $(-1,1)$ *faz* $z'_x(-1,1)=0$ *e* $z'_y(-1,1)=0$ *teremos de analisar o sinal de* s^2-rt *para ver se existe um extremo. Ora* $s^2-rt=4^2-(-2)(-2)>0$ *e portanto não há extremo.*

4075 — *a*) Prove que $\iint_A x^{2m-1}y^{2n-1}\,dx\,dy=\frac{\beta(m,n)}{4(m+n)}r^{2(m+n)}$, $m>0$, $n>0$ onde A é o quarto de círculo $x^2+y^2\leqslant r^2$ situado no 1.º quadrante.

b) Sabe que em certas condições $\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)$ com $a<c<b$. Enuncie e demonstre alguma proposição análoga para $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ sendo A o rectângulo $a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d$.

R: *a*) *Fazendo a mudança para coordenadas polares vem*

$$\iint_A x^{2m-1}y^{2n-1}\,dx\,dy=$$

$$=\int_0^r \rho^{2(m+n)-1}\,d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m-1}\theta\cdot\operatorname{sen}^{2n-1}\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\,\beta(m,n)\int_0^r\rho^{2(m+n)-1}\,d\rho=\frac{\beta(m,n)}{4(m+n)}\,r^{2(m+n)}$$

b) *Sabemos que* $\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)$ *quando* $f(x)$ *é contínua em* (a,b). *Vamos então demonstrar a seguinte proposição: «Se* $f(x,y)$ *é contínua em relação ao par de variáveis* (x,y) *no rectângulo* $a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d$ *então:*

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy=(b-a)(d-c)\,f(\eta,\tau)$$

onde (η,τ) *é um ponto do rectângulo».*

Com efeito, sendo $f(x,y)$ *contínua em relação ao par de variáveis* (x,y) *também o é em relação a* x *e a* y *separadamente, e então* $\int_c^d f(x,y)\,dy=(d-c)\,f(x,\tau)$, *com* $c<\tau<d$, *e* $\int_a^b (d-c)\,f(x,\tau)\,dx=(d-c)(b-a)\,f(\eta,\tau)$ *com* $a<\eta<b$ *e o teorema está provado.*

4076 — Achar uma curva tal que se *a* normal num ponto M corta o eixo $0x$ num ponto P, o centro de curvatura C é simétrico de P em relação a M.

R: *A normal é* $Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$ *ou seja* $X-x+y'(Y-y)=0$ *e as coordenadas de* P *são* $(x+yy',0)$. *Como* $\overline{CM}=\overline{MP}$ *conclui-se fàcilmente que* $yy''=1+y'^2$ *e esta equação pode escrever-se do seguinte modo* $yy'\frac{dy'}{dy}=1+y'^2$

$$\frac{dy}{y}=\frac{y'\,dy}{1+y'^2};\ \log\frac{y}{C_1}=\log\sqrt{1+y'^2};\ y'=\frac{1}{C_1}\sqrt{y^2-C_1^2}$$

$$x=C_1\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-C_1^2}}+C_2;\ x-C_2=C_1\operatorname{arcch}\frac{y}{C_1}$$

e finalmente $y=C_1\operatorname{ch}\frac{x-C_2}{C_1}$ (catenária).

I. S. C. E. F. — Análise Matemática — 1.º Exame de Frequência — 7 de Janeiro de 1955.

4077 — Demonstre o segundo teorema da média ou teorema de Bonnet sobre o integral de Riemann duma função real de variável real

4078 — Defina integral curvilíneo, enuncie condições suficientes de existência e reduza o cálculo desses integrais ao cálculo dum integral de Riemann

4079 — Responda a duas das seguintes questões:

Se $F(x)$ e $f(x)$ são funções de variações totais limitadas no intervalo (a, b), prove que a função $\varphi(x) = F(x) \cdot f(x)$ tem variação total limitada naquele intervalo; indique um limite excedente dessa variação no caso de

$$F(x) = \log x \qquad f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad a = 2 \qquad b = 4$$

R: *Como:*

$$\sum_i |\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)| = \sum_i |F(x_{i+1}) f(x_{i+1}) - F(x_i) f(x_i)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_i |F(x_{i+1}) - F x_i)| \cdot |f(x_{i+1})| + \sum_i |f(x_{i+1}) -$$
$$- f(x_i)| \cdot |F(x_i)|$$

e, com V_F *e* V_f *a representarem as variações totais de* F *e* f; L_F *e* L_f *a representarem limites excedentes dos conjuntos de valores de* F *e* f*; teremos*

$$V_{F.f} \leqslant V_F \cdot L_f + V_f \cdot L_F$$

Ora, as funções $\log x$ *e* $\frac{1}{x^2}$ *são monótonas limitadas, a primeira crescente com* $L_F = \log 4 = 2 \log 2$, *a segunda com* $L_f = \frac{1}{2^2}$, *por ser descrescente limitada.*

A variação total de $\frac{1}{x^2} \log x$, *no intervalo* $(2, 4)$, *não pode exceder*

$$(\log 4 - \log 2)\frac{1}{2^2} + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right) 2 \cdot \log 2 = \frac{5}{8} \log 2$$

4080 — Defina soma generalizada (de Cesàro) e prove que toda a série convergente tem soma generalizada. Calcule a soma generalizada da série:

$$3 - 3 + 3 - 3 + 3 - 3 + \cdots$$

Dada uma série trigonométrica convergente de soma $f(x)$, exprima por meio de $f(x)$ as somas de Fourier e, em seguida, as somas de Fejer.

R: *Tem-se* $S_{2K} = 3 \quad S_{2K+1} = 0$ *e com* $\sigma_{2K} = \frac{3}{2} \frac{K-1}{K}$

$$\sigma_{2K+1} = \frac{3}{2} \frac{K}{K + \frac{1}{2}}$$

A soma generalizada é $\sigma = \frac{3}{2}$

4081 — $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ são funções definidas no intervalo fechado (a, b) e, ambas, quaisquer que sejam $a < t < t' < b$ assumem valores iguais no extremos e desiguais em t e t'; além disso possuem derivadas limitadas.

Mostre que a curva com aquelas equações é rectificável e, demonstre que limita uma região plana quadrável.

R: *Com* t *no intervalo* (a, b) *as funções* φ *e* ψ, *por possuirem derivadas definidas, finitas, pois são limitadas, são funções continuas. Temos pois uma curva de* Jordan, *fechada em virtude das outras hipóteses do inicio do enunciado.*

Funções com derivadas limitadas são de variação limitada, pois

$$\sum_i |\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)| = \sum_i |t_{i+1} - t_i| \cdot |\varphi'(t_i')| \leqslant K \cdot |a - b|$$

I. S. C. E. F. — Análise Matemática — Prova Prática — 11 de Janeiro de 1955.

4082 — Desenvolver em série de potências de x a solução da equação $\alpha y = (1+x) y'$; determinar intervalo de convergência e soma.

R: *Ponha-se* $y = \sum_0^\infty a_n x^n$; $y' = \sum_1^\infty n\, a_n x^{n-1}$ *e tem-se*

$\alpha \sum_0^\infty a_n x^n = (1+x) \sum_1^\infty n\, a_n x^{n-1}$ *donde, para* $n = 0, 1, 2, \cdots$

$$\alpha a_0 = a_1$$
$$\alpha a_1 = a_1 + 2 a_2 \qquad \textit{ou} \qquad a_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} a_0$$
$$\alpha a_2 = 2 a_2 + 3 a_3 \qquad \textit{ou} \qquad a_3 = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2 \cdot 3} a_0$$

e por ser $a_n = \frac{(\alpha - n + 1)}{n} a_{n-1}$ *tem-se* $a_n = \binom{\alpha}{n} a_0$

e portanto $y = a_0 \sum_0^\infty \binom{\alpha}{n} x^n = a_0 (1 + x)^\alpha$ *válido o desenvolvimento para* $|x| < 1$.

4083 — Determinar as equações dos planos tangentes à superfície $x^2 + y^2 + z^2 - 9z + 5 = 0$ paralelos à recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{2}$.

R: *A superfície é uma esfera* $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4$; *os planos tangentes paralelos àquela recta são em número infinito. Os pontos de contacto estão num círculo máximo cujas equações são*

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2(z - 3) = 0 \\ x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 4 \end{cases}$$

Este círculo máximo é a secção plana feita na esfera por um plano que passa pelo centro $(0,0,3)$ *e perpendicular à recta.*

4084 — Indicar como se racionalizam os integrais

$$\int\sqrt{3x-1-x^2}\,dx\,;\quad \int\frac{dx}{c\,h^4(x-2)}\,;\quad \int(x^2-\log x)^2\,dx\,;$$

$$\int\left(1+x^2\sqrt[3]{2+x}\right)dx$$

e calcular efectívamente dois deles.

R: *O primeiro integral pode transformar-se em:*

$$\int_a^x\sqrt{-\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)-\frac{\sqrt5}{2}\right]\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{\sqrt5}{2}\right]}\cdot dx$$

e só é real quando a *e* x *estiverem no intervalo* $\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt5}{2},\frac{3}{2}+\frac{\sqrt5}{2}\right)$. *Nessas condições a transformação* $x-\frac{3}{2}=\frac{\sqrt5}{2}\operatorname{sen}\varphi$ *conduz a* $\int\frac{5}{4}\cos^2\varphi\,d\varphi=\int\frac{5}{8}(1+\cos2\varphi)\,d\varphi$. *O segundo integral, por ser* $\frac{1}{c\,h^4(x-2)}=s\,c\,h^4(x-2)=[1-t\,h^2(x-2)]^2$ *transforma-se, com* $z=t\,h(x-2)$, *em*

$$\int(z^4-2z^2+1)\frac{dz}{1-z^2}\cdot$$

O terceiro integral dá $\frac{x^5}{5}+\int\log^2x\,dx-2\int x^2\log x\,dx$ *onde se tem* $\int x^2\log x\,dx=\frac{x^3}{3}\log x-\frac{1}{3}\int x^2\,dx$ *e* $\int\log^2x\,dx=x\log^2x-2(x\log x-x)+C$. *Finalmente, pondo* $2+x=t^3$, *o terceiro integral transforma-se em:*

$$\int3\,[1+(t^3-2)^2\,t]\,t^2\,dt\,.$$

I. S. C. E. F. — Análise Matemática — 1.º exame de frequência (extraordinário) — 1 de Março de 1955.

4085 — Demonstre que as variações duma função absolutamente contínua, são absolutamente contínuas.

4086 — Diga em que consiste o problema de interpolação de Hermite e apresente a respectiva interpoladora.

4087 — Responda a duas das seguintes questões: $f(x)$ é uma função limitada pròpriamente crescente no intervalo (a,b) com uma únicades continuidade no ponto interior c: prove que, se $f(x)\leqslant\alpha<0$ antes de c e $f(x)\geqslant\beta>0$ depois de c, o integral $\int_a^x f(t)\,dt$ tem um só mínimo interior ao intervalo.

R: *A derivada* $F'(x)$ *de* $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ *é igual a* $f(x)$ *sempre que em* x *a função* f *for contínua. Logo,* $F(x)$ *é decrescente no intervalo fechado* $(a, c-h)$ *pois aí* $F'(x)=f(x)\leqslant\alpha<0$; $F(x)$ *é crescente no intervalo fechado* $(c+h,b)$ *pois aí* $F'(x)=f(x)\geqslant\beta>0$. *Isto por menor que seja* $|h|$.

A função $F(x)$ *é contínua em* c*; pode se afirmar, com esta continuidade em* c, *que a função tem mínimo nesse ponto; ele é visìvelmente único extremo interior ao intervalo. O valor do mínimo é dado pelo integral impróprio* $\int_a^c f(t)\,dt=\lim_{h=0}\int_a^{c-h}f(t)\,dt$.

4088 — $f(x)$ e $g(x)$ são integráveis em (a,b) e os limites de $g(x)$ são ambos do mesmo sinal; demonstre que $\frac{f(x)}{g(x)}$ é integrável.

R: *Tem-se* $L_i\geqslant g(x_i)\geqslant l_i\geqslant0$ *ou* $l_i\leqslant g(x_i)\leqslant L_i<0$ *mas em todo o caso por ser integrável:*

$$\lim_{\max(x_{i+1}-x_i)\to0}\sum(L_i-l_i)(x_{i+1}-x_i)=0\,.$$

Tem-se sempre em qualquer dos casos $\frac{1}{L_i}\leqslant\frac{1}{g(x_i)}\leqslant\frac{1}{l_i}$;
$\left|\frac{1}{l_i}-\frac{1}{L_i}\right|=\frac{|L_i-l_i|}{|l_i\,L_i|}\leqslant\frac{|L_i-l_i|}{\alpha^2}$ *onde* α *é o menor dos valores absolutos dos números* l *e* L *[supostos não nulos em* (a,b)*].*

Resulta daqui

$$\lim_{\max(x_{i+1}-x_i)\to0}\sum\left|\frac{1}{l_i}-\frac{1}{L_i}\right|(x_{i+1}-x_i)\leqslant\frac{1}{\alpha^2}\cdot\lim_{\max(x_{i+1}-x_i)\to0}\sum|L_i-l_i|(x_{i+1}-x_i)=0$$

Demonstrou-se assim que $\frac{1}{g(x)}$ *é integravel.*

4089 — Deduza a derivada de $F(\lambda)=\int_a^b f(x,\lambda)\,dx$ em que a e b são dependentes do parâmetro, depois de efectuar a mudança de variáveis $x=a+(b-a)\,u$ que leva a limites de integração constantes.

R: *Fazendo a mudança de variáveis* $x=\varphi(u,\lambda)=a+(b-a)\,u$, *vem* $F(\lambda)=\int_0^1 f[\varphi(u,\lambda),\lambda]\cdot(b-a)\,du$.

Pela regra de derivação sob o sinal de integral vem:

$$F'(\lambda)=\int_0^1\left\{\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}(b-a)+\frac{\partial f}{\partial\lambda}(b-a)+f[\varphi,\lambda]\frac{d(b-a)}{d\lambda}\right\}du\,.$$

Mas, como $\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=\frac{da}{d\lambda}+\frac{d(b-a)}{d\lambda}\cdot u$ *vêm quatro integrais para calcular* $F'(\lambda)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{da}{d\lambda}(b-a)\,du+$
$+\int_0^1\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{d(b-a)}{d\lambda}u(b-a)\,du+\int_0^1\frac{\partial f}{\partial\lambda}(b-a)\,du+$
$+\int_0^1 f(\varphi,\lambda)\frac{d(b-a)}{d\lambda}du.$

Tiremos dos integrais tudo o que não contém u, *nem directa nem indirectamente* $F'(\lambda)=\frac{da}{d\lambda}(b-a)\int_0^1\frac{\partial f}{\partial\varphi}du+$
$+\frac{d(b-a)}{d\lambda}(b-a)\int_0^1\frac{\partial f}{\partial\varphi}u\,du+(b-a)\int_0^1\frac{\partial f}{\partial\lambda}du+$
$+\frac{d(b-a)}{d\lambda}\int_0^1 f[\varphi,\lambda)\,du$

Desfaça-se a mudança de variáveis nos diferentes integrais

$$F'(\lambda)=\frac{da}{d\lambda}\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{d(b-a)}{d\lambda}\cdot\frac{1}{b-a}\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}(x-a)dx+$$
$$+\int_a^b\frac{\partial f}{\partial\lambda}dx+\frac{1}{b-a}\frac{d(b-a)}{d\lambda}\int_a^b f(x,\lambda)\,dx$$

O primeiro integral dá:

$$\frac{da}{d\lambda}[f(b,\lambda)-f(a\lambda)].$$

Intregando por partes, tem-se

$$\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}(x-a)\,dx=[f(x,\lambda)(x-a)]_a^b-\int_a^b f(x,\lambda)\,dx$$

Atendendo a estes resultados e feitas as reduções, obtém-se:

$$F'(\lambda)=f(b,\lambda)\frac{db}{d\lambda}-f(a,\lambda)\frac{da}{d\lambda}+\int_a^b\frac{\partial f}{\partial\lambda}dx.$$

Enunciados e soluções dos n.os 4074 a 4089 de J. R. Albuquerque.

ESCOLAS ESTRANGEIRAS

U. R. E. E. P. — Geometria Analítica e Vectorial — **Exame final — 2 de Janeiro de 1954.**

4090 — Achar a envoltória da altura BD de um triângulo ABC, tendo fixo o vértice A e o lado BC, de comprimento constante, deslisando sobre uma recta fixa.

4091 — Sendo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vectores perpendiculares mostrar a existência de uma infinidede de vectores $\vec{v}$ tais que $\vec{v}\wedge\vec{a}=\vec{b}$ e exprimi-los em função dos dados e de um escalar variável. Dar uma intrepretação geométrica à questão, admitindo variáveis as imagens de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{v}$.

4092 — Reconhecer se a superfície de equação $9x^2+4y^2+12xy+8x+12y-13y+35=0$ é cilindrica e, em caso afirmativo, caracterisá-la.

U. R. E. E. P. — Geometria Analítica — **2.ª Prova final — 23 de Novembro de 1954.**

4093 — Uma superfície é representada pela equação

$$5x^2+8y^2+5z^2-4yz+8zx+4xy-4x+2y+$$
$$+4z=0$$

que pode ser simplificada por uma rotação dos eixos de acordo com o seguinte quadro de cossenos directores

	x	y	z
X	2/3	2/3	1/3
Y	1/3	$-2/3$	2/3
Z	2/3	$-1/3$	$-2/3$

Caracterizar a superfície depois de reduzida a sua equação e procurar uma representação da mesma em coordenadas cilindricas.

4094 — Mostrar analìticamente que, num tetraedro qualquer, as rectas que unem os meios das arestas opostas passam num ponto. Achar as coordenadas desse ponto.

Enunciados dos n.os 4090 a 4094 de M. Zaluar.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

105 — R. Baldus — F. Löbell — **Nichteuklidische Geometrie** — 3.ª edição corrigida — «Sammlung Göschen» — Walter de Gruyter & Co. 1953 — Berlim.

O presente livro abre com uma exposição cronológica da evolução da geometria, desde Euclides e os seus *Elementos* até os trabalhos de Gauss, Lobatschevsky e Bolyai.

A «Geometria Absoluta», no 2.° capítulo, assenta nos postulados de Hilbert; aí se estudam os axiomas de ordenação, dimensão, das congruências, as consequências destes axiomas, alguns teoremas sobre a cir-