

Mas, como  $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \frac{da}{d\lambda} + \frac{d(b-a)}{d\lambda} \cdot u$  vêm quatro integrais para calcular  $F'(\lambda) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{da}{d\lambda} (b-a) du + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{d(b-a)}{d\lambda} u (b-a) du + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \lambda} (b-a) du + \int_0^1 f(\varphi, \lambda) \frac{d(b-a)}{d\lambda} du$ .

Tiremos dos integrais tudo o que não contém  $u$ , nem directa nem indirectamente  $F'(\lambda) = \frac{da}{d\lambda} (b-a) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \varphi} du + \frac{d(b-a)}{d\lambda} (b-a) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \varphi} u du + (b-a) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \lambda} du + \frac{d(b-a)}{d\lambda} \int_0^1 f(\varphi, \lambda) du$   
Desfaça-se a mudança de variáveis nos diferentes integrais

$$F'(\lambda) = \frac{da}{d\lambda} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{d(b-a)}{d\lambda} \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} (x-a) dx + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda} dx + \frac{1}{b-a} \frac{d(b-a)}{d\lambda} \int_a^b f(x, \lambda) dx$$

O primeiro integral dá:

$$\frac{da}{d\lambda} [f(b, \lambda) - f(a, \lambda)].$$

Integrando por partes, tem-se

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} (x-a) dx = [f(x, \lambda) (x-a)]_a^b - \int_a^b f(x, \lambda) dx$$

Atendendo a estes resultados e feitas as reduções, obtém-se:

$$F'(\lambda) = f(b, \lambda) \frac{db}{d\lambda} - f(a, \lambda) \frac{da}{d\lambda} + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda} dx.$$

Enunciados e soluções dos n.ºs 4074 a 4089 de J. R. Albuquerque.

### ESCOLAS ESTRANGEIRAS

U. R. E. E. P. — GEOMETRIA ANALÍTICA E VECTORIAL — Exame final — 2 de Janeiro de 1954.

**4090** — Achar a envoltória da altura  $BD$  de um triângulo  $ABC$ , tendo fixo o vértice  $A$  e o lado  $BC$ , de comprimento constante, deslizando sobre uma recta fixa.

**4091** — Sendo  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  vectores perpendiculares mostrar a existência de uma infinidade de vectores  $\vec{v}$  tais que  $\vec{v} \wedge \vec{a} = \vec{b}$  e exprimi-los em função dos dados e de um escalar variável. Dar uma interpretação geométrica à questão, admitindo variáveis as imagens de  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{v}$ .

**4092** — Reconhecer se a superfície de equação  $9x^2 + 4y^2 + 12xy + 8x + 12y - 13y + 35 = 0$  é cilíndrica e, em caso afirmativo, caracterisá-la.

U. R. E. E. P. — GEOMETRIA ANALÍTICA — 2.ª Prova final — 23 de Novembro de 1954.

**4093** — Uma superfície é representada pela equação  $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 - 4yz + 8zx + 4xy - 4x + 2y + 4z = 0$

que pode ser simplificada por uma rotação dos eixos de acordo com o seguinte quadro de cossenos directores

	$x$	$y$	$z$
$X$	$2/3$	$2/3$	$1/3$
$Y$	$1/3$	$-2/3$	$2/3$
$Z$	$2/3$	$-1/3$	$-2/3$

Caracterizar a superfície depois de reduzida a sua equação e procurar uma representação da mesma em coordenadas cilíndricas.

**4094** — Mostrar analiticamente que, num tetraedro qualquer, as rectas que unem os meios das arestas opostas passam num ponto. Achar as coordenadas desse ponto.

Enunciados dos n.ºs 4090 a 4094 de M. Zaluar.

### BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

**105** — R. BALDUS — F. LÖBEL — *Nichteuklidische Geometrie* — 3.ª edição corrigida — «Sammlung Göschen» — Walter de Gruyter & Co. 1953 — Berlin.

O presente livro abre com uma exposição cronológica da evolução da geometria, desde EUCLIDES e os

seus *Elementos* até os trabalhos de GAUSS, LOBATSCHEVSKY e BOLYAI.

A «Geometria Absoluta», no 2.º capítulo, assenta nos postulados de HILBERT; aí se estudam os axiomas de ordenação, dimensão, das congruências, as consequências destes axiomas, alguns teoremas sobre a cir-

cunferência, os axiomas da divisibilidade dos segmentos, de ARQUIMEDES e da continuidade. Consegue-se assim obter o corpo dos números reais e a partir dele construir uma base cartesiana do espaço.

Todos estes resultados são igualmente válidos para as geometrias euclidea, hiperbólica e elíptica.

No 3.º capítulo estuda-se a geometria euclidea e no 4.º a axiomática da geometria hiperbólica no círculo unidade.

O 5.º capítulo, que compreende cerca de metade do livro, estuda a geometria hiperbólica como disciplina independente—noções de ortogonalidade, paralelismo de rectas, curva de distâncias, círculos, medidas de ângulos, funções hiperbólicas, trigonometria, polígonos regulares, etc..

O cap. 6 ainda se refere rapidamente à geometria elíptica.

Nesta pequena obra o Autor faz um estudo completo da geometria hiperbólica plana que interessa vivamente à formação do nosso professorado secundário, na sua generalidade totalmente afastado dos problemas fundamentais das geometrias não euclidianas.

J. G. T.

**106 — A. A. FRAENKEL — Integers and Theory of Numbers — «The Scripta Mathematica Studies» — Scripta Mathematica — 1955 — New York.**

O professor FRAENKEL dá-nos, num livro de óptima apresentação, a tradução do primeiro volume da sua obra em hebraico — *Mavo Le Matematika* — (Introdução à Matemática) melhorada em várias modificações e adições. Anuncia ainda a publicação para breve de outros dois volumes: um dedicado aos conceitos fundamentais da álgebra (grupos, anéis e corpos) e ao papel de tais conceitos na extensão da noção de número aos campos real, complexo e hipercomplexo; o segundo à teoria dos conjuntos, particularmente números cardinais e ordinais transfinitos.

O presente volume trata dos seguintes questões: Números naturais como cardinais: notação, conceito de número cardinal e ordenação.

Números naturais como ordinais: axiomas de PEANO, independência dos axiomas, indução matemática, adição, multiplicação, relação entre ordinais e cardinais

Teoria dos números: números primos e sua distribuição, partição do círculo, teoremas de FERMAT, con-

ceito de congruência, números perfeitos e amigáveis, números algébricos e ideais.

Números racionais: fracções positivas, inteiros negativos, o campo dos racionais.

De acordo com os actuais programas de aritmética racional do nosso ensino secundário, o presente livro é um óptimo elemento informativo e didático, à disposição do nosso professorado.

J. G. T.

**107 — P. DUBREIL — Algèbre. Tome I. — 2.ª edição revista e aumentada — «Cahiers Scientifiques», Fasc. XX — Gauthier-Villars. Paris**

A Álgebra de Dubreil era até há pouco, na literatura francesa, uma obra fundamental sobre as modernas teorias algébricas.

Pode dizer-se, porém, que esta nova edição constitue um livro inteiramente novo.

Se, por um lado, o nível científico da obra melhorou bastante, nela permanece o mesmo espírito de clareza e precisão que a caracterizava inicialmente.

As adições incluídas ultrapassam 150 páginas; muitas passagens foram inteiramente refeitas. Estas modificações referem-se à teoria dos conjuntos (aplicações multiformes, conjuntos ordenados, conjuntos finitos e números naturais, teorema de ZORN), às estruturas algébricas ordenadas, à teoria dos semi-grupos (equivalências principais, grupos ou pseudo-grupos homomorfos), à teoria dos anéis e ideais (relações com a teoria dos semi-grupos, teorema de KRULL sobre a factorização, decomposição noetheriana com aplicação ao teorema de NÖETHER sobre a intersecção de duas curvas algébricas planas). A exposição assenta em ideias gerais básicas, como a utilização sistemática da operação de fecho, das equivalências regulares, etc.

As demonstrações são apresentadas com todos os pormenores; os exemplos e exercícios permitem ao leitor tirar o maior proveito do estudo.

Se bem que facilite a iniciação no importante ramo das matemáticas modernas, que é a Álgebra Abstrata, este livro oferece aos especialistas a exposição de resultados recentes e pontos de vista novos.

Destina-se pois a alunos e professores e é de desejar que faça sentir a sua influência nos estudiosos do nosso país.

J. G. T.