A lei dinâmica do electrão livre

por *José Gaspar Teixeira*

No seu notável artigo «L'Etat actuel et l'avenir de la Physique Mathématique[1]», H. POINCARÉ refere-se a duas fases distintas desta disciplina: «La Physique Mathematique est née de la Mécanique céleste qui l'a engendrée à la fin du XVIIIe siècle, au moment où elle venait elle-même d'atteindre son complet développement», e desenvolveu-se, consequentemente, com base na concepção de força central: na mecânica — a lei de NEWTON — , na electrostática — a lei de COULOMB — na magnetostática — a lei de DALLA BELLA — [2], referem-se a forças (centrais) proporcionais ao inverso do quadrado da distância.

«Néanmoins, il est arrivé un jour où la conception des forces centrales n'a plus paru suffisante, et c'est la première crise» da Física Matemática. Entrou-se então «dans la seconde Physique Mathématique, celle des principes» caracterizada pela circunstância de todos os seus resultados se poderem deduzir de seis princípios fundamentais:

O princípio de MAYER — conservação da energia;

O princípio de LAVOISIER — conservação da massa;

O princípio de CARNOT — degradação da energia;

O princípio de NEWTON — igualdade de acção e reacção;

O princípio de Relatividade — covariância das equações;

O princípio de Menor Acção.

«Dans la seconde Physique Mathématique, on retrouve les traces de la première, celles des forces centrales; il en sera encore de même si nous devons en connaître une troisième». Mas «la loi physique alors prendrait un aspect entièrement nouveau; ce ne serait plus seulement une équation différentielle, elle prendrait le caractère d'une loi statistique».

Assim escrevia H. POINCARÉ em 1904.

Na realidade, o progresso de técnicas iniciadas por POLZUNOV, PETROV, LODYGIN, POPOV, ZALESOV[1] e outros, associado ao aparecimento de grande número de novos problemas em todos os ramos da física criavam as condições em que se fez a passagem da «segunda» para a «terceira» física matemática.

Nesta, como se sabe, já não são válidos alguns dos princípios fundamentais anteriores, e a lei física toma, na realidade, duas formas particulares — a de lei dinâmica e a de lei estatística.

---

[1] Vide pág. 3 do presente número da *Gazeta de Matemática*.

[2] JOÃO ANTÓNIO DALLA BELLA, primeiro director do Gabinete de Física da Universidade de Coimbra criado pelo MARQUES DE POMBAL, em 1782 — 3 anos antes de COULOMB — descobriu com o «famoso Iman... presente do Imperador da China... a D. JOÃO V» a lei das acções magnéticas. Cf. Comunicação apresentada pelo Prof. MÁRIO SILVA em 1938 à Academia das Ciências de Lisboa.

[1] POLZUNOV, V.V. PETROV, A. N. LODYGIN, A. S. POPOV, e ZALESOV precederam respectivamente WATT, DAVY, EDISON, MARCONI, e PARSONS nas descobertas da máquina a vapor (1765), arco eléctrico (1803), lâmpada eléctrica (1873), emissão de sinais de rádio a distância (1895) e turbina de vapor. Cf. ERIC ASHBY — *Scientist in Rússia* — Pelican books.

TERLETSKI (1) em 1950 considerando ùnicamente as questões fundamentais de princípio da física estatística geral apresenta a tese de que na base de toda a teoria física estatística «il y a un micro-modèle dynamique et des hypothèses statistiques, qui ne sont pas déduites des lois dynamiques, mais déterminées par la façon de séparer l'object de la théorie de son entourage». É à luz destas ideias que TERLETSKI considera os princípios fundamentais duma teoria estatística única dos processos de não-equilíbrio, e o problema dos fundamentos da mecânica estatística.

Na concepção da lei dinâmica «on retrouve les traces de la seconde physique mathématique», pois que no sentido restrito da mecânica (2), por exemplo, ela exprime a possibilidade de representar todo o movimento dum sistema de pontos materiais por um conjunto de linhas do universo que são completamente determinadas pelas equações do movimento e respectivas condições iniciais.

TERLETSKI conclue, no seu trabalho:

«...nous avons des raisons suffisantes pour considérer que la théorie des processus élémentaires doit satisfaire aux conditions générales suivantes:

1. La théorie doit s'appuyer sur des représentations définies de l'espace et du temps réels.
2. La théorie doit admetre la possibilité de la représentation complète de tout le mouvement dans son ensemble au moyen de grandeurs liées à l'espace et au temps. L'appareil mathématique de la théorie doit permettre de calculer tous les mouvements possibles.
3. Les lois du mouvement doivent être symétriques par rapport au temps.
4. Si l'on sépare une partie d'un système physique, le principe généralisé de l'égalité de l'action et de réaction doit être vérifié.
5. La théorie doit contenir des lois de conservation, reflétant la conservation de la matière et du mouvement.
6. Les systèmes isolés doivent satisfaire un certain principe de relativité.

Sans doute, la formulation des conditions énumérées n'est pas absolue et pourrait être complétée ou restreinte, à la suite du développement ultérieur de la physique, mais elle nous semble correspondre à l'état actuel de la science».

(1) Cf. *Lois Dynamiques et Statistiques de la Physique*.

(2) No sentido mais lato, as equações de movimento podem ser as equações de MAXWELL, a equação de propagação do calor, etc..

No exemplo seguinte (1) propomo-nos apresentar um esquema concreto de lei dinâmica elementar a que daremos o nome de *Lei dinâmica do electrão livre*.

Admitamos que se verificam as hipóteses seguintes:

1 — A teoria desenvolve-se na variedade quadri-dimensional do *espaço tempo de* MINKOWSKI; as transformações de coordenadas admissíveis são portanto as do *Grupo de* LORENTZ que conservam invariante a distância

$$c^2(\Delta t)^2-(\Delta x)^2-(\Delta y)^2-(\Delta z)^2 .$$

2 — Na variedade *espaço-tempo*, considera-se definido um quadri-vector potencial

$$\Omega(A_x, A_y, A_z, i\Psi) .$$

3 — Em relação a determinado referencial admissível, Σ, a distribuição da matéria faz-se de acordo com as duas densidades próprias

$$\mu(X, Y, Z, T)=m\,\delta(X-x, Y-y, Z-z, T-t)$$
$$\rho(X, Y, Z, T)=e\,\delta(X-x, Y-y, Z-z, T-t)$$

(1) Extraído da admirável obra — *The Classical Theory of Fields* da autoria dos cientistas L. LANDAU e Z. LIFSHITZ.

em que $\delta(X, Y, Z, T)$ é a *medida de* Dirac definida em Σ.

4—As equações do movimento podem resumir-se na expressão

$$A) \qquad \delta S = 0,$$

invariante em face do grupo de Lorentz, que traduz a estacionaridade da função

$$S = \int_A^B \left[-\mu c\, ds + \frac{\rho}{c} (\Omega, d\mathrm{r}) \right]$$
$$r^2 = \sum_\alpha (dx^\alpha)^2 \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

ao longo de *qualquer* percurso entre *dois quaisquer* pontos A e B da variedade.

Comecemos por notar que a condição 3 equivale a considerar *localizada* em $P(x, y, z, t)$ de Σ uma *partícula de massa* m *e carga* e; este facto permite que $A)$ tome a forma

$$\delta \int_A^B \left(-m c\, ds + \frac{e}{c} (\Omega, d\mathrm{r}) \right) = 0,$$

sendo agora o integral tomado entre *dois pontos quaisquer* A e B de uma linha de universo da variedade.

Desenvolvendo os cálculos, temos sucessivamente (índices mudos)

$$\delta S = \int_A^B \left[-m c\, \delta\, ds + \frac{e}{c} \delta (\Omega_\alpha dx^\alpha) \right] =$$
$$= \int_A^B \left[mc \frac{dx^\alpha \cdot \delta\, dx^\alpha}{ds} + \frac{e}{c} (\Omega_\alpha \cdot \delta\, dx^\alpha) + \right.$$
$$\left. + \frac{e}{c} (\delta\, \Omega_\alpha \cdot dx^\alpha) \right] = \int_A^B \left[mc \frac{dx^\alpha \cdot d\,\delta\, x^\alpha}{ds} + \right.$$
$$\left. + \frac{e}{c} (\Omega_\alpha \cdot d\,\delta\, x^\alpha) + \frac{e}{c} (\delta\, \Omega_\alpha \cdot dx^\alpha) \right] =$$
$$= \left[\left(m c\, u^\alpha + \frac{e}{c} \Omega_\alpha \right) \delta\, x^\alpha \right]_A^B +$$
$$+ \int_A^B \left(-m c\, du^\alpha \cdot \delta\, x^\alpha - \frac{e}{c} d\,\Omega_\alpha \cdot \delta\, x^\alpha + \right.$$
$$\left. + \frac{e}{c} \delta\, \Omega_\alpha \cdot dx^\alpha \right) = 0.$$

Por um lado o 1.º termo é nulo; por outro, como

$$d\,\Omega_\alpha = \frac{\partial\, \Omega_\alpha}{\partial\, x^\beta} dx^\beta \qquad \delta\, \Omega_\alpha = \frac{\partial\, \Omega_\alpha}{\partial\, x^\beta} \delta\, x^\beta$$

e

$$du^\alpha = \frac{du^\alpha}{ds} ds \qquad\qquad dx^\alpha = u^\alpha\, ds$$

vem

$$\delta S = \int_A^B \left(-m c \frac{du^\alpha}{ds} + \right.$$
$$\left. + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial\, \Omega_\beta}{\partial\, x^\alpha} - \frac{\partial\, \Omega_\alpha}{\partial\, x^\beta} \right) u^\beta \right) \delta\, x^\alpha\, ds = 0,$$

donde, dada a arbitrariedade de $\delta\, x^\alpha$, é

$$\mathrm{I)} \qquad m c \frac{du^\alpha}{ds} = \frac{e}{c} F_{\alpha\beta}\, u^\beta$$

em que $F_{\alpha\beta}$ é o tensor electromagnético associado ao quadri-vector Ω, isto é, como se sabe

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -i E_x \\ -H_z & 0 & H_x & -i E_y \\ H_y & -H_x & 0 & -i E_z \\ i E_x & i E_y & i E_z & 0 \end{pmatrix}.$$

As equações I), que desdobradas nas suas componentes tomam a forma

$$\mathrm{II)} \begin{cases} a) \dfrac{d}{dt} \dfrac{m v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = e \left(\mathbf{E} + \dfrac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right) \\ b) \dfrac{d}{dt} \dfrac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = e (\mathbf{E}, \mathbf{v}), \end{cases}$$
$$\mathbf{u}\,(v_x, v_y, v_z, i c)$$

representam a «acção de campo electromagnético estacionário sobre uma partícula carregada(1)»; neste facto se baseia a justificação do nome atribuído à lei dinâmica em estudo.

A expressão $A)$ traduz, efectivamente, o

---

(1) P. G. Bergmann — *Introduction to the theory of Relativity*, pag. 135.

princípio da menor acção, e a lagrangeana respectiva, como

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\Big(-m\,c\,ds+\frac{e}{c}(A_x\,dx^1+A_y\,dx^2+$$
$$+A_z\,dx^3-c\,\psi\,dt)\Big)=\int_{t_1}^{t_2}\Big(-m\,c^2\sqrt{1-v^2/c^2}+$$
$$+\frac{e}{c}(A_x v_x+A_y v_y+A_z v_z)-e\,\psi\Big)\,dt\,,$$

pois que

$$ds=c\,dt\sqrt{1-v^2/c^2}\,,$$

é

$$L=-\,m\,c^2\sqrt{1-v^2/c^2}+\frac{e}{c}(A_x v_x+$$
$$+A_y v_y+A_z v_z)-e\,\psi\,.$$

Tomemos(1) como coordenadas generalizadas as três variáveis espaciais da nossa variedade, x, y, z; os respectivos momentos conjugados são

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\qquad p_y=\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\qquad p_z=\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$$

ou

$$p_x=\frac{m\,v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+e\frac{A_x}{c}\qquad p_y=\cdots\qquad p_z=\cdots,$$

componentes do vector do espaço vulgar da mecânica clássica — momento generalizado —

$$\mathbf{P}=\frac{m\,\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\,.$$

A função de Hamilton é, por definição:

$$H(x\,,y\,,z\,,\dot{x}\,,\dot{y}\,,\dot{z}\,,t)=\sum_{x,y,z}p_x\dot{x}-L$$

ou, como fàcilmente se vê,

$$H=\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+e\Psi$$

ou ainda

$$H=\sqrt{m^2c^4+c^2\Big(\mathbf{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\Big)^2}+e\Psi\ (2)\,.$$

(1) Cf. E. Bloch — *L'ancienne et la nouvelle théorie des Quanta* — chap. XI.

(2) A hamiltoneana costuma exprimir-se em termos do momento conjugado.

Se o campo electromagnético é estacionário, há conservação de energia e esta coincide com a função de Hamilton,

$$E=\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+e\Psi$$

ou

$$E=\sqrt{m^2c^4+c^2\Big(\mathbf{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\Big)^2}+e\Psi\,.$$

Além disso, a energia de uma partícula carregada depende apenas do potencial escalar, isto é, do vector tridimencional vulgar campo eléctrico

$$\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\Psi\,;$$

noutros têrmos, o vector campo magnético

$$\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$$

não contribui para o trabalho da partícula.

Notemos finalmente que as três componentes p_x, p_y, p_z do vector momento generalizado, $\mathbf{P}$, associadas à quantidade $\frac{iE}{c}$ constituem as quatro componentes dum quadri-vector — o vector impulsão do Universo, $\mathbf{I}$: este quadri-vector reune num só ser matemático as noções de energia e momento generalizado (quantidade de movimento no caso simples de partícula material) que estavam separadas na física clássica.

Na Lei dinâmica do electrão livre verificam-se assim os princípios fundamentais seguintes:

1 — Princípio da Menor Acção;

2 — Princípio da Relatividade;

3 — Princípio da Conservação da Impulsão.

Em qualquer dos casos particulares simples *a*) $\rho=0$, ou o que é o mesmo, $e=0$; ou *b*) $F_{\alpha\beta}=0$, ou o que é o mesmo, $\mathbf{E}=0$, $\mathbf{H}=0$ num mesmo referencial admissível, se está no domínio da pura mecânica racional — caso da partícula material livre.

A função lagrangeana é com efeito,

$$\mathsf{L} = -m\,c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}\,,$$

os momentos conjugados são as componentes do vector *quantidade de movimento*

$$1) \qquad \mathbf{p} = \frac{m\,\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

e a hamiltoneana, continuando a coincidir com a energia, reduz-se a

$$2) \qquad \mathsf{H} = \mathsf{E} = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,.$$

Por outro lado, de 1) e 2) tira-se a relação importante

$$3) \qquad \mathbf{v} = \mathbf{p}\,\frac{c^2}{E}\,.$$

O quadri-vector impulsão do universo simplifica-se também e é

$$\mathbf{I}^2 = \mathbf{p}^2 - \frac{\mathsf{E}^2}{c^2} = -m^2\,c^2$$

donde

$$4) \qquad \frac{\mathsf{E}^2}{c^2} = \mathbf{p}^2 + m^2\,c^2$$

ou

$$\mathsf{E} = \mathsf{H} = c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2\,c^2}$$

expressão preferível a 2).

Por outro lado, a equação *A*) dá-nos

$$\partial\,\mathsf{S} = -m\,c\int_A^B ds = 0$$

donde

$$-m\,c\int_A^B \frac{du^\alpha}{ds}\,\partial\,x^\alpha\,ds = 0$$

com $(\partial\,x^\alpha)_A = (\partial\,x\beta)_B = 0$. Então as equações da trajectória são [1]

$$\frac{du^\alpha}{ds} = 0$$

ou sejam, as equações paramétricas duma recta do espaço-tempo.

Suponhamos agora que num referencial admissível Σ se anulam identicamente as componentes espaciais do quadri-vector potencial

$$\Omega(0\,,0\,,0\,i\,\Psi)\,.$$

Neste caso, diz-se que o electrão está, na subvariedade *espaço vulgar* de Σ sob a acção do campo eléctrico

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\Psi\,.$$

Não se prejudica a generalidade do problema admitindo que é, nessa sub-variedade,

$$E_x = E\,,\, E_y = 0\,,\, E_z = 0$$

e que a velocidade vulgar existe, no instante $t = 0$, no plano $x\,o\,y$.

As equações espaciais $\mathrm{II}_{a)}$) são então

$$\frac{d\,\mathbf{p}}{d\,t} = e\,\mathbf{E}$$

ou

$$p_x = e\,E\,t \qquad p_y = p_0 \qquad p_z = 0\,,$$

admitindo que $p_x = 0$ quando $t = 0$.

O movimento do electrão é plano.

Por outro lado, a equação 4) toma a forma

$$\mathsf{E} = c\sqrt{m^2\,c^2 + p_0^2 + e^2\,E^2\,t^2} = \\ = \sqrt{\mathsf{E}_0^2 + c^2\,e^2\,E^2\,t^2},$$

e por 3)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2}{\mathsf{E}}\,p_x = \frac{c^2\,e\,E\,t}{\mathsf{E}} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{c^2}{\mathsf{E}}\,p_y = \frac{c^2\,p_0}{\mathsf{E}}$$

$$\frac{dz}{dt} = 0\,.$$

Mas a energia cinética E varia ao longo da trajectória; então

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2\,e\,E\,t}{\sqrt{\mathsf{E}_0^2 + c^2\,e^2\,\mathsf{E}^2\,t^2}} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{c^2\,p_0}{\sqrt{\mathsf{E}_0^2 + c^2\,e^2\,\mathsf{E}^2\,t^2}}$$

donde

$$x = \frac{1}{e\,E}\sqrt{\mathsf{E}_0^2 + (c\,e\,\mathsf{E}\,t)^2} \qquad y = \frac{p_0\,c}{e\,E}\ \operatorname{arcsnh}\frac{c\,e\,E\,t}{\mathsf{E}_0}$$

---

[1] Na variedade espaço-tempo.

e a trajectória é uma catenária

$$x = \frac{\mathsf{E}_0}{eE} \cos h \frac{eEy}{p_0 c}.$$

Se for $v << c$, um desenvolvimento em série dá

$$x = \frac{eE}{2 m v_0^2} y^2 \qquad (\mathsf{E}_0 = m c^2 , p_0 = m v_0)$$

equação duma parábola.

No referencial admissível Σ em que o quadri-vector potencial se reduz a

$$\Omega (A_x , A_y , A_z , 0)$$

o electrão está, na sub-variedade *espaço vulgar* correspondente, sob a acção do campo magnético

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Se for mesmo $A_x = -H_y \quad A_y = 0 \quad A_z = 0$, $\mathbf{H}$ tem a direcção de oz e as equações espaciais de II) são

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{H}.$$

3) ainda permite escrever

$$\frac{\mathsf{E}}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{H}$$

pois a energia E é constante num campo magnético. Conclue-se então que

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega v_y \qquad \frac{dv_y}{dt} = - \omega v_x$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0 \qquad \left(\omega = \frac{e c H}{\mathsf{E}}\right)$$

donde

$$\frac{d}{dt}(v_x + i v_y) = - i \omega (v_x + i v_y)$$

$$v_x + i v_y = v_0 e^{-i(\omega t + \alpha)} \qquad v_z = \text{const}$$

e

$$x = x_0 + r \operatorname{sen} (\omega t + \alpha) \quad y = y_0 + r \cos (\omega t + \alpha)$$

$$z = z_0 + v_{0z} t$$

com

$$r = \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0 \mathsf{E}}{e c H} = \frac{c p_{xy}}{e H} (^1).$$

A trajectória é pois uma hélice cilíndrica de raio r e passo $v_{0z} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \pi c p_z}{e H} (^2)$.

A velocidade da partícula é constante; constante a sua projecção sobre xoy e constante ao longo de oz. Se $v_{0z} = 0$, a trajectória é uma circunferência.

---

(1) (p_{xy} proj. de p sobre xoy).
(2) (p_z proj. do p sobre $0z$).

Os vectores próprios comuns a operadores lineares quase-permutáveis

por J. Joaquim Dionísio

Apresentamos nesta nota uma demonstração que nos parece nova de uma proposição que se relaciona com o teorema de Frobenius sobre os valores próprios de uma composição racional de matrizes permutáveis duas a duas.

Teorema. *Sejam* $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_m$ m *operadores lineares quase-permutáveis no espaço linear* R_n *a* n *dimensões. Designem* $\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \cdots, \mathrm{r}_m$ *os respectivos números de valores próprios distintos e tome-se*

$$\mathrm{r} = \text{máx} \{ \mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \cdots, \mathrm{r}_m \}.$$

Os m *operadores admitem vectores próprios comuns linearmente independentes em número pelo menos igual a* r.

Basearemos a demonstração em dois lemas.