e a trajectória é uma catenária

$$x = \frac{\mathsf{E}_0}{e E} \cos h \, \frac{e E y}{p_0 c}.$$

Se for $v << c$, um desenvolvimento em série dá

$$x = \frac{e E}{2 m v_0^2} y^2 \qquad (\mathsf{E}_0 = m c^2, p_0 = m v_0)$$

equação duma parábola.

No referencial admissível Σ em que o quadri-vector potencial se reduz a

$$\Omega (A_x, A_y, A_z, 0)$$

o electrão está, na sub-variedade *espaço vulgar* correspondente, sob a acção do campo magnético

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Se for mesmo $A_x = -H_y \quad A_y = 0 \quad A_z = 0$, $\mathbf{H}$ tem a direcção de oz e as equações espaciais de II) são

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{H}.$$

3) ainda permite escrever

$$\frac{\mathsf{E}}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{H}$$

pois a energia E é constante num campo magnético. Conclue-se então que

$$\frac{d v_x}{dt} = \omega v_y \qquad \frac{d v_y}{dt} = -\omega v_x$$

$$\frac{d v_z}{dt} = 0 \qquad \left(\omega = \frac{e c H}{\mathsf{E}}\right)$$

donde

$$\frac{d}{dt}(v_x + i v_y) = -i \omega (v_x + i v_y)$$

$$v_x + i v_y = v_0 e^{-i(\omega t + \alpha)} \qquad v_z = \text{const}$$

e

$$x = x_0 + r \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \quad y = y_0 + r \cos(\omega t + \alpha)$$

$$z = z_0 + v_{0z} t$$

com

$$r = \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0 \mathsf{E}}{e c H} = \frac{c p_{xy}}{e H} \text{ (1)}.$$

A trajectória é pois uma hélice cilíndrica de raio r e passo $v_{0z} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \pi c p_z}{e H}$ (2).

A velocidade da partícula é constante; constante a sua projecção sobre xoy e constante ao longo de oz. Se $v_{0z} = 0$, a trajectória é uma circunferência.

(1) (p_{xy} proj. de p sobre xoy).
(2) (p_z proj. do p sobre $0z$).

Os vectores próprios comuns a operadores lineares quase-permutáveis

por J. Joaquim Dionísio

Apresentamos nesta nota uma demonstração que nos parece nova de uma proposição que se relaciona com o teorema de Frobenius sobre os valores próprios de uma composição racional de matrizes permutáveis duas a duas.

Teorema. *Sejam* $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_m$ m *operadores lineares quase-permutáveis no espaço linear* R_n *a* n *dimensões. Designem* $\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \cdots, \mathrm{r}_m$ *os respectivos números de valores próprios distintos e tome-se*

$$\mathrm{r} = \text{máx} \{ \mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \cdots, \mathrm{r}_m \}.$$

Os m *operadores admitem vectores próprios comuns linearmente independentes em número pelo menos igual a* r.

Basearemos a demonstração em dois lemas.

LEMA 1. *Se dois operadores* A *e* B *são permutáveis, cada um deles é reduzido pelas variedades próprias do outro.*

Dem. Designe V uma variedade própria de A e seja λ o correspondente valor próprio. Tem-se $Ax = \lambda x$ para todo o vector $x \in V$ e portanto $ABx = BAx = \lambda Bx$, do que se infere $Bx \in V$, $BV \subset V$. Esta inclusão significa que a variedade própria V de A é invariante para B.

LEMA 2. [*] *Se os operadores* $A_1, A_2, \cdots, A_m$ *são quase-permutáveis, os permutadores*

$$B_{ij} = A_i A_j - A_j A_i \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, m).$$

são nilpotentes.

Dem. Sabe-se que $tr(AB - BA) = tr\,AB - tr\,BA = 0$; o traço de cada operador B_{ij} é por conseguinte nulo. E o mesmo acontece a qualquer das suas potências, em virtude da quase-permutabilidade dos A_i:

$$A_i B_{jl} = B_{jl} A_i \qquad (i, j, l = 1, 2, \cdots, m).$$

Temos com efeito, tomando p inteiro e superior à unidade,

$$B_{ij}^p = B_{ij}^{p-1}(A_i A_j - A_j A_i) = A_i (B_{ij}^{p-1} A_j) - (B_{ij}^{p-1} A_j) A_i$$

donde

$$tr\, B_{ij}^p = 0 \qquad (p = 1, 2, \cdots).$$

Ora os coeficientes do polinómio característico de qualquer operador A exprimem se por intermédio das fórmulas de BOCHER como combinações lineares dos traços $tr\,A$, $tr\,A^2, \cdots$, $tr\,A^n$. Anulando-se todos estes traços, A admite portanto apenas valores próprios nulos: é nilpotente. É o caso dos B_{ij}.

Demonstração do Teorema no caso de os A_i *serem permutáveis.* Assentamo-la no Lema 1 e na seguinte evidente proposição: qualquer operador é reduzido pela intersecção de um certo número de variedades caso o seja por cada uma destas.

Representemos por $V_{i1}, V_{i2}, \cdots, V_{ir_i}$ as r_i variedades próprias de A_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ e suponhamos que é $r = r_1$. Fixemos i num dos inteiros $1, 2, \cdots, r$. A variedade V_{1i} reduz A_2, logo é não vazia uma pelo menos das intersecções $V_{1i} \cap V_{2j}$ $(j = 1, 2, \cdots, r_2)$. Fixemos j num dos inteiros que dão intersecção não vazia. Porque $V_{1i} \cap V_{2j}$ reduz A_3, é não vazia uma pelo menos das intersecções $V_{1i} \cap V_{2j} \cap V_{3l}$ $(l = 1, 2, \cdots, r_3)$. Prosseguindo do mesmo modo, obteremos um certo número de subespaços não vazios

$$(1) \qquad V_{1i} \cap V_{2j} \cap V_{3l} \cap \cdots \cap V_{mt}$$

para o valor inicial fixado a i e para certos sistemas de valores dos índices $j, l, \cdots, t$.

Ora, vectores situados em diferentes subespaços (1) são linearmente independentes, por isso que pertencem a distintas variedades próprias de um pelo menos dos operadores. Esta conclusão estabelece o teorema, no caso particular em que os A_i permutam, ao fazer variar i de 1 a $r = r_1$.

Demonstração do Teorema no caso geral. Da permutabilidade dos A_i com os B_{jl} decorre a permutabilidade dos B_{ij} dois a dois e por esta razão é não vazia a intersecção V dos espaços nulos dos operadores B_{ij} (mostra o Lema 2 que não existem outras variedades próprias dos B_{ij}).

E da permutabilidade de A_i com os B_{jl} resulta ainda não ser vazia a intersecção V'_{ij} de V com qualquer variedade própria V_{ij} de A_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$.

Os subespaços V'_{ij} reduzem os m operadores A_l.

Na verdade, para $x \in V'_{ij}$ é $B_{il} x = 0$ e $A_i x = \lambda_{ij} x$ (λ_{ij} valor próprio de A_i para a variedade própria V_{ij}), donde

$$A_i A_l x = A_l A_i x = \lambda_{ij} A_l x,$$

[*] DRAZIN, DUNGEY e GRUENBERG, *Some theorems on commutative matrices*, J. of the London Math. Soc., 26 (1951).

donde se tira $A_l x \in V_{ij}$. E também $A_l x \in V$, por ser

$$B_{pq} A_l x = A_l B_{pq} x = 0 .$$

Logo, $x \in V'_{ij}$ implica $A_l x \in V'_{ij}$, quer dizer,

$$A_l V'_{ij} \subset V'_{ij}$$

$$(l=1,2,\cdots,m;i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,r_i)$$

Posto isto, torna-se aplicável ao caso presente a demonstração do caso particular antes considerado — desde que se considerem as variedades V'_{ij} em lugar das variedades V_{ij}.

Conjuntos finitos (*)

por *José Ribeiro Albuquerque*

É de toda a conveniência que as palavras *finito* e *infinito* sejam empregadas com propriedade.

São conceitos de uso corrente em Matemática, sobretudo em Análise.

As pessoas que por força de circunstâncias são obrigadas a fazer frequente uso destes termos, por exemplo os estudantes, não encontram fàcilmente quem lhes forneça os significados claros e precisos, limpos de tudo o que de impróprio e confuso se disse e ficou ligado a esses termos.

Nos cursos, em geral, começa-se a exposição mais adiante e supõe-se que os alunos já conhecem com suficiente nitidez essas noções.

Os outros conceitos que se apresentam então, ficam sèriamente prejudicados sem um esclarecimento prévio.

Procura-se neste trabalho pôr ao alcance do leitor, o suficiente para que possa, sem perturbação, prosseguir os estudos correntes de Matemática, e também o meio de levar mais longe, se o quiser fazer, o trabalho imprescindível de clarificação

Começaremos, para isso, por estudar o conceito de *correspondência*.

1. Correspondência biunívoca

O conceito de *correspondência* não é um conceito primitivo e pode reduzir-se ao conceito primitivo de conjunto. A possibilidade de uma tal redução confere ao conceito de *correspondência* o carácter de conceito derivado da teoria geral dos conjuntos.

Indica-se a seguir uma maneira de fazer essa redução.

DEFINIÇÃO 1. Dados dois conjuntos A e B, sub-conjuntos dum mesmo conjunto fundamental 1, um conjunto P tal que:

1.º). $Z \in P$ se e só se $Z \equiv (A \times Z) + (B \times Z)$,

2.º). Se $X_1 \in A \times Z$ e $X_2 \in A \times Z$ então $X_1 \equiv X_2$,

3.º). Se $Y_1 \in B \times Z$ e $Y_2 \in B \times Z$ então $Y_1 \equiv Y_2$,

4.º). Se $Z_1 \in P$ e $Z_2 \in P$ então $A \times Z_1 \times Z_2 \equiv 0$,

5.º). Se $Z_1 \in P$ e $Z_2 \in P$ então $B \times Z_1 \times Z_2 \equiv 0$,

6.º). Se $X \in A$ (ou $X \in B$) existe um $Z \in P$ tal que $X \in Z$.

É um conjunto P que *estabelece uma correspondência biunívoca entre os elementos de* A e B.

Observações: Os conjuntos $Z \in P$ são sub-conjuntos do conjunto fundamental 1; as somas e produtos são relativos ao conjunto fundamental. O conjunto P é portanto um conjunto de sub-conjuntos de 1, isto é, $P \subset 2^1$.

As condições 1.º), 2.º) e 3.º) definem um *par;* um conjunto P que verifique apenas as condições 1.º), 2.º) e 3.º), estabelece uma *correspondência* entre os elementos de A e B.

Um conjunto que verifique as condições 1.º), 2.º), 3.º) e 4.º) (ou 1.º), 2.º), 3.º) e 5.º)) estabelece uma *correspondência unívoca* entre os elementos de A e B (ou de B e A). Uma correspondência *biunívoca* é unívoca nos dois sentidos.

Com a condição 6.º) a correspondência biunívoca é *completa*.

Com o termo derivado *correspondência biunívoca* define-se um outro termo derivado: trata-se duma relação binária, *é equivalente a,* estabelecida entre os sub-conjuntos do conjunto fundamental.

DEFINIÇÃO 2. Dados dois conjuntos A e B sub-conjuntos dum mesmo conjunto fundamental 1, diremos que A *é equivalente a* B e escreveremos simbòlicamente $A \sim B$ se, e só se, existe um conjunto P que estabeleça uma correspondência biunívoca entre os elementos de A e B.

(*) Este artigo difere na composição dos restantes, por ter sido inicialmente destinado ao n.º 59 da *Gazeta de Matemática*.