donde se tira $A_l x \in V_{ij}$. E também $A_l x \in V$, por ser

$$B_{pq} A_l x = A_l B_{pq} x = 0 .$$

Logo, $x \in V'_{ij}$ implica $A_l x \in V'_{ij}$, quer dizer,

$$A_l V'_{ij} \subset V'_{ij}$$

$$(l=1, 2, \cdots, m; i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, r_i)$$

Posto isto, torna-se aplicável ao caso presente a demonstração do caso particular antes considerado — desde que se considerem as variedades V'_{ij} em lugar das variedades V_{ij}.

Conjuntos finitos (*)

por José Ribeiro Albuquerque

É de toda a conveniência que as palavras *finito* e *infinito* sejam empregadas com propriedade.

São conceitos de uso corrente em Matemática, sobretudo em Análise.

As pessoas que por força de circunstâncias são obrigadas a fazer frequente uso destes termos, por exemplo os estudantes, não encontram fàcilmente quem lhes forneça os significados claros e precisos, limpos de tudo o que de impróprio e confuso se disse e ficou ligado a esses termos.

Nos cursos, em geral, começa-se a exposição mais adiante e supõe-se que os alunos já conhecem com suficiente nitidez essas noções.

Os outros conceitos que se apresentam então, ficam sèriamente prejudicados sem um esclarecimento prévio.

Procura-se neste trabalho pôr ao alcance do leitor, o suficiente para que possa, sem perturbação, prosseguir os estudos correntes de Matemática, e também o meio de levar mais longe, se o quiser fazer, o trabalho imprescindível de clarificação

Começaremos, para isso, por estudar o conceito de *correspondência.*

1. Correspondência biunívoca

O conceito de *correspondência* não é um conceito primitivo e pode reduzir-se ao conceito primitivo de conjunto. A possibilidade de uma tal redução confere ao conceito de *correspondência* o carácter de conceito derivado da teoria geral dos conjuntos.

Indica-se a seguir uma maneira de fazer essa redução.

Definição 1. Dados dois conjuntos A e B, sub-conjuntos dum mesmo conjunto fundamental 1, um conjunto P tal que:

1.º). $Z \in P$ se e só se $Z \equiv (A \times Z) + (B \times Z)$,

2.º). Se $X_1 \in A \times Z$ e $X_2 \in A \times Z$ então $X_1 \equiv X_2$,

3.º). Se $Y_1 \in B \times Z$ e $Y_2 \in B \times Z$ então $Y_1 \equiv Y_2$,

4.º). Se $Z_1 \in P$ e $Z_2 \in P$ então $A \times Z_1 \times Z_2 \equiv 0$,

5.º). Se $Z_1 \in P$ e $Z_2 \in P$ então $B \times Z_1 \times Z_2 \equiv 0$,

6.º). Se $X \in A$ (ou $X \in B$) existe um $Z \in P$ tal que $X \in Z$.

É um conjunto P que *estabelece uma correspondência biunívoca entre os elementos de A e B.*

Observações: Os conjuntos $Z \in P$ são sub-conjuntos do conjunto fundamental 1; as somas e produtos são relativos ao conjunto fundamental. O conjunto P é portanto um conjunto de sub-conjuntos de 1, isto é, $P \subset 2^1$.

As condições 1.º), 2.º) e 3.º) definem um *par;* um conjunto P que verifique apenas as condições 1.º), 2.º) e 3.º), estabelece uma *correspondência* entre os elementos de A e B.

Um conjunto que verifique as condições 1.º), 2.º), 3.º) e 4.º) (ou 1.º), 2.º), 3.º) e 5.º)) estabelece uma *correspondência unívoca* entre os elementos de A e B (ou de B e A). Uma correspondência *biunívoca* é unívoca nos dois sentidos.

Com a condição 6.º) a correspondência biunívoca é *completa.*

Com o termo derivado *correspondência biunívoca* define-se um outro termo derivado: trata-se duma relação binária, *é equivalente a,* estabelecida entre os sub-conjuntos do conjunto fundamental.

Definição 2. Dados dois conjuntos A e B sub-conjuntos dum mesmo conjunto fundamental 1, diremos que A *é equivalente a* B e escreveremos simbòlicamente $A \sim B$ se, e só se, existe um conjunto P que estabeleça uma correspondência biunívoca entre os elementos de A e B.

(*) Este artigo difere na composição dos restantes, por ter sido inicialmente destinado ao n.º 59 da *Gazeta de Matemática.*

Pode estabelecer-se o seguinte:

Teorema 1. *A relação binária* **é equivalente a** *é uma relação* **determinada, reflexiva, simétrica** e **transitiva**. *Quaisquer que sejam,* A, B, C

1.º. A ~ B *ou* A ≁ B *(determinação).*

2.º. A ~ A *(reflexividade).*

3.º. *se* A ~ B *então* B ~ A *(simetria).*

4.º. *se* A ~ B *e* B ~ C *então* A ~ C *(transitividade).*

$A \nsim B$ significa que: *A é equivalente a B*, é falso. O teorema demonstra-se partindo das cinco primeiras condições da definição 1; a reflexidade, a simetria e a transitividade demonstram-se qualquer que seja o sentido atribuído à palavra *existe* empregada na definição 2. A determinação fica assim dependente do sentido da palavra existe, mas se considerarmos uma existência não contraditória a relação ~ é determinada.

2. Conjuntos finitos e conjuntos infinitos

Os conceitos de finito e de infinito são antagónicos e têm sido formados pela Humanidade através de um *processus* lento e prolongado.

Nas origens deste *processus* está muito provàvelmente uma operação mecânica, a operação de *tomar* os objectos mediante uma escolha entre os inumeráveis objectos circunstantes. Esta operação mecânica teria passado depois gradualmente e insensìvelmente a operação mental, num daqueles saltos qualitativos que do conhecimento emocional ou sensorial faz passar ao conhecimento racional.

A repetição de tantas experiências com objectos de *natureza diversa* teria levado fatalmente à formação do conceito primitivíssimo de número natural pequeno (dígito) e, pouco a pouco, mediante saltos bruscos, relâmpagos de inteligência na mente primitiva dos experimentadores, teria nascido, sem que se possa precisar como ou quando, o conceito de *conjunto finito* ao qual teria seguido o conceito de *número finito*.

Mas, irresistìvelmente e de modo inseparável, ao lado da colecção finita ficava a imensidade dos outros objectos; o conceito de conjunto infinito alimentou assim o seu antagónico, e dele se foi igualmente formando.

Este processo de formação dos conceitos antagónicos é interminável e, no presente caso do par *finito-infinito* estamos bem longe duma conclusão.

A existência de uma teoria dos números transfinitos (1), teoria recentemente nascida e ainda em plena formação, prova como se procura conhecer o infinito por meio do finito.

Por outro lado o finito estuda-se por meio do infinito. Citemos para esclarecimento esta passagem de Waclaw Sierpinski:

«*Il importe de signaler l'inclination d'esprit humain de se servir d'***infinité** *pour examiner la* **finité**. *Par exemple, le* **Calcul infinitésimal** *a été inventé pour nous faciliter la recherche d'objects finis; pour calculer le volume d'un corps nous le décomposons en Calcul integral en une infinité de parties infiniment petites et cela nous rend le problème plus facile!* «*Es muss auch dem menschlichen Verstand das Prädicat* «*unendlich*» *in gewissen Rücksichten zugastanden werden*» *dit Cantor* (1).»

Entre as propriedades dos conjuntos infinitos figuram muitas que não são verificadas pelos conjuntos finitos; tomar uma delas para definição de conjunto infinito e, a partir dessa definição, fazer a teoria dos conjuntos infinitos, foi o método formal de estudo seguido por R. Dedekind (2).

O mesmo método formal é adoptado por muitos outros autores, partindo alguns duma definição de conjunto finito.

Este método, todavia, levanta uma questão muito importante da teoria dos conjuntos; trata-se de um problema que foi enunciado claramente por H. Lebesgue, nos seguintes termos:

«*Bien que je doute fort qu'on nomme jamais un ensemble qui ne soit ni fini ni infini, l'impossibilité d'un tel ensemble ne me paraît pas demontrée*» (3).

Uma vez escolhida uma definição de conjunto finito, cada conjunto infinito é um conjunto *não-finito*. Do mesmo modo, dada uma definição de infinito, cada conjunto finito é um conjunto *não-infinito*.

É depois de adoptar a definição de conjunto infinito dada por Dedekind que Sierpinski chama *transfinitos* os números cardinais dos conjuntos infinitos.

Em todos os casos faltou sempre provar que: um conjunto infinito é não-finito, um conjunto finito é não-infinito.

Tomemos a seguinte definição de conjunto infinito:

Definição 3. Um sub-conjunto A do conjunto fundamental 1 será chamado um *conjunto infinito* se, e só se, para qualquer $X \in 1-A$ se tem: $A \sim A+(X)$.

Com o símbolo (X) representa-se um conjunto com um único elemento: $X \in (X)$ e se $Y \in 1$ e $Y \in (X)$ então $Y \equiv X$.

(1) Veja-se mais longe o sentido da palavra *transnfiito*.

(1) W. Sierpinski – Leçons sur les nombres transfinis — pag. 53.

(2) Ricardo (Júlio Guilherme) Dedekind — Was sind und was sollen die Zahlen, § 5.64.

(3) No final duma carta de Henri Lebesgue a E'mile Borel: ver. E. Borel — Leçons sur la Théorie des Fonctions, pag. 159.

A definição de conjunto infinito que acabámos de dar coincide com a definição dada por Dedekind em «*Was sind und was sollen die Zahlen*» *(Braunschweig, 1888)*; a definição de Dedekind era a seguinte: *um conjunto é infinito se, e só se, tem a mesma potência de uma das suas partes alíquotas.*

Um conjunto A infinito no sentido da Definição 3 é manifestamente infinito no sentido de Dedekind.

Recìprocamente, seja A um conjunto infinito no sentido de Dedekind; será então $A \sim B$ com $B \subset A$. Seja $X \varepsilon A - B$ e então teremos $B \subset [B+(X)] \subset A$ e se $A \sim B$ será também $B \sim [B+(X)]$ e portanto o conjunto B e consequentemente o conjunto A são infinitos no sentido da Definição 3.

Os conjuntos infinitos cuja teoria foi desenvolvida por Dedekind são os mesmos que os da classe aqui determinada por esta definição.

Ponhamos agora a seguinte:

Definição 4. Um sub-conjunto A do conjunto fundamental 1 será chamado *conjunto finito* se, e só se, para qualquer $X \varepsilon 1-A$ se tem: $A \nsim A+(X)$.

É quasi evidente que as duas classes de conjuntos aqui fixadas com as definições 3 e 4, são complementares dentro de 2^1.

Mas, a evidência é o carácter de que se revestem as proposições depois de demonstradas, e então demonstraremos um teorema

Teorema 2. *Para que*

1) *Cada conjunto* $A \subset 1$ *não-finito seja um conjunto infinito é necessário e suficiente que:*

2) *Dados dois conjuntos* A *e* $A+(X)$ *com* $X \varepsilon 1-A$, *uma e uma só das relações* $A \sim A+(X)$ *e* $A \nsim A+(X)$ *tenha lugar.*

Demonstração.

Suponhamos 1) falsa; então existe um conjunto $A \subset 1$ *não-finito* que é *não-infinito;* mas se A é não-finito não se tem $A \nsim A+(X)$, $X \varepsilon 1-A$ e se A é não-infinito não se tem $A \sim A+(X)$, $X \varepsilon 1-A$.

Portanto, existem os conjuntos A e $A+(X)$ com $X \varepsilon 1-A$ tais que nenhuma das relações $A \sim A+(X)$ e $A \nsim A+(X)$ tem lugar; mas então também 2) é falsa.

Suponhamos 2) falsa; não se podem verificar simultâneamente para o mesmo par de conjuntos as duas relações $\sim$ e $\nsim$ e portanto existem os conjuntos $A \subset 1$ e $A+(X)$ com $X \varepsilon 1-A$ tais que: não se tem $A \sim A+(X)$ com $X \varepsilon 1-A$ e então A é não-infinito (Def. 3), não se tem $A \nsim A+(X)$ com $X \varepsilon 1-A$ e então A é não-finito (Def. 4). Portanto a 1) é falsa. Assim fica demonstrado o teorema.

Podemos então afirmar perante as definições 3 e 4, o seguinte

Teorema 3. *Cada conjunto* $A \subset 1$ *não-finito é um conjunto infinito, cada conjunto* $A \subset 1$ *não-infinito é um conjunto finito.*

Diversas definições de conjunto finito se conhecem hoje. As mais notáveis foram dadas por B. Russel (1), Zermelo (2), Sierpinski (3), Kuratowski (4), Tarski (5).

A definição ordinária de conjunto *finito* pode ser assim enunciada: *um conjunto é finito se, e só se, o número dos seus elementos se pode exprimir mediante um número natural* (supondo-se dada a noção de número natural).

Das definições citadas precedentemente a mais notável de todas é talvez a de Alfred Tarski. Na sua memória sobre *Ensembles finis*, memória que ele considera *sistematisante*, o autor apresenta a seguinte notável propriedade para definição de conjunto finito:

Def. A. Elemento irredutível duma classe K de conjuntos é cada conjunto A tal que; $A \varepsilon K$: se $B \subset A$ e $B \varepsilon K$ então $B \equiv A$.

Def. A'. Elemento saturado duma classe K de conjuntos é cada conjunto A tal que; $A \varepsilon K$: se $A \subset B$ e $B \varepsilon K$ então $A \equiv B$.

Cada uma destas duas noções dá origem a uma definição de conjunto finito.

Def. B. O conjunto A é finito se, e só se, cada classe não vazia K de seus sub-conjuntos admite pelo menos um elemento irredutível (ou saturado).

Para terminar estas notícias históricas digamos que muitas definições de conjunto finito se baseiam na noção de ordem e notemos ainda que Schoenflies considerava impossível a definição de número finito independente da noção de ordem.

3. Propriedades dos conjuntos finitos.

As definições 3 e 4 e o teorema que se lhes seguiu, esclarecem o problema de Lebesgue sobre a possibilidade de nomear um conjunto simultâneamente não-finito e não-infinito.

Os conjuntos infinitos no sentido da Definição 3 foram estudados já suficientemente (Dedekind, Sierpinski, etc.).

---

(1) Comptes rendus de la Soc. Math. de France, 22 Mars 1911, p. 30.

(2) Ueber die Grundlagen der Arithmetik (Atti del IV Cong. Intern. dei Mat., vol. II).

(3) L'axiome de Zermelo et son rôle dans la Théorie des Ensembles, Bull. de l'Ac. des Sciences de Cracovie, 1918, p. 106.

(4) Sur la notion de l'ensemble fini. Fund. Math, T. 1, p. 13.

(5) Sur les ensembles finis, Fund. Math., T. 6, pp. 45–95.

Retomemos a Definição 4, e estabeleçamos para esta classe de conjuntos as suas propriedades mais notáveis.

Teorema 4. *É finito cada conjunto* A *tal que:* $\mathrm{X} \varepsilon \mathrm{A}$ *e se* $\mathrm{Y} \varepsilon \mathrm{A}$ *então* $\mathrm{X} \equiv \mathrm{Y}$. Para demonstrar basta considerar os conjuntos A e $B \equiv A+(X)$ com $X \varepsilon 1-A$ e em seguida os conjuntos P verificando as condições 1.º), 2.º), 3.º), da Definição 1. Os conjuntos P nestas condições, conjuntos de pares de elementos, um de A outro de B, são ùnicamente dois e nenhum deles satisfaz as condições 4.º), 5.º) e 6.º). Então para os conjuntos A e B as condições da Definição 1 são incompatíveis, e portanto não existe um P que estabeleça uma correspondência biunívoca entre os elementos de A e $A+(X)$.

Então, temos $A \nsim A+(X)$ com $X \varepsilon 1-A$ e o conjunto A é finito.

Teorema 5. *Se* A *e* B *são finitos* $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ *é finito.*

Tem-se: $A \nsim A+(X)$ e $B \nsim B+(X)$ para $X \varepsilon 1-(A+B)$. Mas como $A \sim A$ e portanto $A+B \nsim A+(B+(X))$, vem finalmente $A+B \nsim (A+B)+(X)$.

Teorema 6. *Se para cada* $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ *o conjunto* A *é finito, então* B *é finito.*

Temos $A \subset B$ e $B-A \subset B$; mas A e $B-A$ são finitos e pelo teorema precedente $A+(B-A)$ é finito.

Resultam os seguintes corolários:

Corolário 1. *Se* A *é finito e* B *um conjunto qualquer,* $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ *é finito.*

Corolário 2. *Se* A *é finito e* B *um conjunto qualquer,* $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ *é finito.*

Corolário 3. *Se* B *é finito então, cada* $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ *é também finito.*

Seja, com efeito, $A \subset B$; então, $A+(B-A) \equiv B$ e também $B-(B-A) \equiv A$; mas, aplicando ao primeiro membro desta última o corolário 1, o que é possível porque B é finito, resulta imediatamente: A finito.

Corolário 4. *A condição necessária e suficiente para que* A *seja finito, é que seja finito todo e qualquer seu sub-conjunto.*

Teorema 7. *Princípio da indução completa para os conjuntos finitos. Se* A *é finito, então* A *pertence a toda a classe* K *de conjuntos que satisfaça as seguintes condições:*

1) *Se* $\mathrm{X} \varepsilon \mathrm{A}$ *então* $(\mathrm{X}) \varepsilon \mathrm{K}$.
2) *Se* $\mathrm{B} \varepsilon \mathrm{K}$ *e* $\mathrm{X} \varepsilon \mathrm{A}$ *então* $\mathrm{B}+(\mathrm{X}) \varepsilon \mathrm{K}$.

Demonstração.

Seja $X \varepsilon A$ e portanto devido a 1), temos $(X) \varepsilon \mathrm{K}$. Representaremos com o símbolo **1** o cardinal do conjunto (X). Distinguiremos esse elemento $X \varepsilon A$ pondo $X \equiv \mathrm{X}_1$ e portanto (X_1) é o conjunto cujo cardinal é **1**.

Seja um outro $X \varepsilon A$; então pela condição 2) temos $(X_1)+(X) \varepsilon K$. Introduzamos um novo símbolo para representar o cardinal do conjunto $(X_1)+(X)$; o símbolo introduzido é **2** e para distinguir aquele X dos restantes pomos $X \equiv X_2$ e portanto o cardinal do conjunto $(X_1)+(X_2)$ é **2**.

Continuando este processo de construção introduzimos assim os símbolos

$$\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \cdots, \mathbf{n}$$

e, se com este processo chegamos ao conjunto A, o teorema está demonstrado porque toda a classe K que verifique as condições 1) e 2) conterá evidentemente todos os conjuntos construidos.

Se, com este procedimento repetido indefinidamente, não se alcança o conjunto A, tomaremos o conjunto

$$X_1, X_2, X_3, X_4, \cdots, X_n, \cdots$$

e designaremos por B o conjunto cujos elementos são

$$X_2, X_3, X_4, \cdots, X_n, \cdots$$

O conjunto P cujos elementos são os pares $[X_1, \mathrm{X}_2]$, $[X_2, X_3]$, $\cdots$ estabelece uma correspondência biunívoca entre B e $B+(X_1)$; será pois

$$B \sim B+(X_1) \quad \text{com} \quad X_1 \varepsilon A-B.$$

Mas é evidente $B \subset A$ e por consequência tanto B como A seriam infinitos contra a hipótese.

O conjunto A é alcançado com o processo de construção anterior e corresponde-lhe evidentemente um dos símbolos introduzidos: $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \cdots, \mathbf{n}$.

O conjunto A pertence a todas as classes K que verificam as condições 1) e 2), pois que qualquer classe nestas condições conterá todos os conjuntos construidos.

c.q.d.

Resultam do teorema os seguintes corolários:

Corolário 1. *A cada conjunto* A *finito corresponde um e só um dos números cardinais* $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \cdots \mathbf{n} \cdots$. *Além disso, existe uma correspondência biunívoca entre os elementos dum qualquer conjunto finito e os primeiros números cardinais.*

Corolário 2. *Existe um conjunto que não é finito.* Com efeito tomemos o conjunto dos números cardinais introduzidos na demonstração do teorema: $1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots$. Representemos por B o conjunto cujos elementos são os cardinais $2, 3, 4, \cdots n, \cdots$; teremos a relação $B \sim B + (1)$ com $1 \notin B$. Então, o conjunto dos números cardinais é infinito no sentido da Definição 3.

Teorema 8. *Se* A *pertence a toda a classe* K *de conjuntos que satisfaz as condições* 1). *e* 2). *do teorema precedente, então* A *é finito.*

Com efeito, se A pertence a uma classe K que verifica as condições 1) e 2), então A pode ser alcançado mediante o processo de construção indicado na demonstração do teorema precedente e corresponde-lhe um dos números cardinais $1, 2, 3, 4, \cdots, n$. Resultará imediatamente que se tem a relação $A \nsim A + (X)$ com $X \notin A$ e portanto A é finito.

Derivam daqui os seguintes corolários:

Corolário 1. *Para que* A *seja finito é necessário e suficiente que* A *pertença a toda a classe* K *que verifique as condições* 1). *e* 2). *do teorema* 7.

Corolário 2. *Para que* A *seja finito é necessário e suficiente que* A *pertença a toda a classe* K *de conjuntos que verifique as condições:*

1) *Se* $X \in A$ *então* $(X) \in K$,

2) *Se* $B \in K$ *e* $C \in K$ *então* $B + C \in K$.

Este teorema demonstra-se sem dificuldade.

Muitas outras propriedades importantes dos conjuntos finitos se podem demonstrar sem grande dificuldade, mas com aquelas que aqui apresentamos consideramos a teoria já esboçada.

O cálculo das probabilidades e a teorização do comportamento económico(¹)

por **Gustavo de Castro**

1. O Comportamento Económico.

Se o Cálculo das Probabilidades pôde passar por uma teoria dos jogos de azar, esta teoria dos jogos de azar pode descrever-se como uma *teoria do comportamento económico.* A concepção do Cálculo como uma teoria de comportamento tem, porém, que ser temperada pela concepção das realidades que nos afasta de extremos insensatos. A matemática não pode ser vista como produto do exercício gratuíto da inteligência nem como codificação de verdades absolutas que os génios desvendam, de maneira mais ou menos sobrenatural, para pautar as únicas condutas inteligentes; há que algures encontrar a vera efígie do que é a um tempo uma construção maravilhosa da inteligência e um apoio precioso da nossa acção sobre a natureza — tudo isto, mas só isto.

Veja-se a solene advertência de Borel: «*La science du Hasard ne saurait, plus que toute autre science, prétendre à régir nos actes; elle peut seulement, comme c'est le rôle de la science, faciliter la reflexion qui précède l'action chez tous les êtres raisonnables. Dans les ques-*

---

(1) Este escrito é a redacção da segunda de quatro palestras que, sob o título geral «*O Cálculo das Probabilidades. Palestras sobre os progressos duma disciplina por ocasião dum centenário*», foram realizadas na Administração-Geral dos Correios, Telégrafos e Telefones, em Janeiro-Fevereiro de 1955. Incluidas numa longa série de palestras profissionais daquela Administração, esta é publicada aqui por sua amável deferência.