MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DOS EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Exame de aptidão para frequência do Instituto de Ciências Económicas e Financeiras — Ano de 1954

Prova escrita de Matemática

I

3913 — Existem valores reais de x para os quais a soma

$$1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}$$

é negativa? Justifique a resposta.

R: $1+2/x+3/x^2<0$ *ou* $\dfrac{x^2+2x+3}{x^2}<0$ *para o que é suficiente ser* $x^2+2x+3<0$ *cujas raízes são* $x=-1\pm\sqrt{2}\,i$.

Atendendo à natureza das raízes concluie-se, pois, não existirem valores de x *para os quais a soma proposta possa ser negativa.*

3914 — Com 10 soldados e 4 cabos quantas rondas se podem formar, sabendo que cada ronda é constituída por 7 soldados e 2 cabos?

R: *Trata-se de combinações visto que cada grupo deve diferir dos restantes num homem, pelo menos.*

O número de grupos formados com os soldados é dado por C_7^{10} *e o número de grupos formados com os cabos é dado por* C_2^4.

Cada grupo dos cabos pode ser associado a todos os grupos de soldados e vice-versa.

Ao todo serão, pois, $C_7^{10}\times C_2^4=120\times 6=720$ *rondas.*

II

3915 — Determine os ângulos x compreendidos entre 0 e 2π radianos que verificam a igualdade

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{5}\right)=\operatorname{cotg} x$$

R: *Sendo* $\operatorname{tg}(x+\pi/5)=\operatorname{cotg} x$ *é* $\operatorname{tg}(x+\pi/5)=\operatorname{tg}(\pi/2-x)$ *cujos arcos estão relacionados pela expressão* $x+\pi/5=K\cdot\pi+\pi/2-x$ *onde* K *é um parâmetro que pode tomar valores inteiros no intervalo* $(-\infty,+\infty)$.

É, pois, $x=\pi\left(K/2+\dfrac{3}{20}\right)$.

Como $0<x<2\pi$, *teremos de considerar apenas os valores de* $K=0,1,2,3$ *para os quais resultam, respectivamente, as soluções* $x_1=\dfrac{3\pi}{20}$, $x_2=\dfrac{13\pi}{20}$, $x_3=\dfrac{23\pi}{20}$ *e* $x_4=\dfrac{33\pi}{20}$

3916 — Mostrar que das relações

$$x=a\cos\theta$$
$$y=b\operatorname{sen}\theta$$

se deduz

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

R: *Como* $x=a\cos\theta$; $y=b\operatorname{sen}\theta$ *é* $x/a=\cos\theta$; $y/b=\operatorname{sen}\theta$

Quadrando e somando, vem $x^2/a^2+y^2/b^2=\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta$ *ou* $x^2/a^2+y^2/b^2=1$

III

3917 — Quais são os números que admitem 12 divisores e cujos factores primos são apenas 2 e 3? Justifique a resposta.

R: $12=2^2\times 3=4\cdot 3=2\cdot 6$

Para $12=4\cdot 3$ *vem* $N_1=2^3\cdot 3^2=72$ *e* $N_2=2^2\cdot 3^3=108$

Para $12=2\cdot 6$ *vem* $N_3=2\cdot 3^5=486$ *e* $N_4=2^5\cdot 3=96$

3918 — Demonstre que a soma $a^2+b^2+c^2$ em que a, b e c são três inteiros quaisquer não divisíveis por 3, é divisível por 3.

R: *Um número não divisível por* 3 *ou é da forma* $\dot{3}+1$ *ou é da forma* $\dot{3}+2$; *o seu quadrado é sempre* $\dot{3}+1$ *visto que* $(\dot{3}+1)^2=\dot{3}+\dot{3}+1=\dot{3}+1$ *e* $(\dot{3}+2)^2=\dot{3}+\dot{3}+4=\dot{3}+\dot{3}+\dot{3}+1=\dot{3}+1$.

Então a soma dos quadrados de três números nas condições propostas é sempre um múltiplo de 3 *visto que* $(\dot{3}+1)+(\dot{3}+1)+(\dot{3}+1)=\dot{3}+3=\dot{3}$

Exame de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, Ciências Físico-Químicas e Ciências Geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos — Ano de 1954

ARITMÉTICA

I

3919 — Provar que a soma de três números naturais ímpares consecutivos nunca é um número primo.

R: *Sejam* $2n+1$, $2n+3$ *e* $2n+5$ *os três números inteiros ímpares consecutivos. O número soma* $2n+1+2n+3+2n+5=6n+9$ *admite o divisor* 3, *além da unidade, do próprio número e de outros possíveis divisores.*

Não é, pois, número primo.

II

3920 — Calcular dois números, sabendo que a sua soma é 360 e que o seu máximo divisor comum é 15. Achar as diversas soluções do problema.

R: *Seja* $a+b=360$ *e* m. d. c. $(a, b)=15$

Fazendo $x=a/15$ *e* $y=b/15$ *ou* $x+y=360/15=24$ *e, como* m. d. c. $(x, y)=1$, *os valores possíveis de* x e y *serão* $x=1, y=23$; $x=5, y=19$; $x=7, y=17$; $x=11, y=13$.

Para $x=1$ *e* $y=23$ *é* $a=15$ *e* $b=345$
Para $x=5$ *e* $y=19$ *é* $a=75$ *e* $b=285$
Para $x=7$ *e* $y=17$ *é* $a=105$ *e* $b=255$
Para $x=11$ *e* $y=13$ *é* $a=165$ *e* $b=195$

III

3921 — Qual o resto da divisão de $a+b+c$ por 16, sabendo que os restos das divisões de a, b e c por 16 são 11, 9 e 15 respectivamente? Justificar.

R: *Quando dois números* A e B *divididos por um terceiro número* p *dão restos iguais diz-se que são* congruentes *em relação a* p *que se chama* módulo *da* congruência. $A \equiv B \pmod{p}$ (A *e* B *são congruentes de módulo* p)

Ensina-nos um teorema da Aritmética: «Dividindo vários números pelo mesmo divisor, a sua soma e a soma dos restos destas divisões são congruentes em relação ao divisor»

Assim, $(a+b+c)$ *e* $(11+9+15)$ *são congruentes em relação ao módulo* 16.

Por outras palavras, o resto da divisão de $(a+b+c)$ *por* 16 *é igual ao resto da divisão de* $(11+9+15)$ *por* 16.

Donde o resto $=3$

ÁLGEBRA

I

3922 — Calcular os três menores inteiros positivos que divididos por 38 dão o resto 14 e divididos por 46 dão o resto 2.

R: *Segundo o enunciado será* $38 \cdot y+14=46x+2$ *ou* $23x-19y=16$ *cujas soluções podem obter-se das relações* $x=-8-19t$; $y=-10-23t$ *onde* -8 *e* -10 *representam um par de soluções inteiras, prèviamente determinadas.*

As três menores soluções inteiras e positivas serão correspondentes aos valores de $t=-1$; $t=-2$; $t=-3$.

Para $t=-1$ *é* $x=11$; $y=13$ *com a solução* $N_1=508$
Para $t=-2$ *é* $x=30$; $y=36$ *com a solução* $N_2=1382$
Para $t=-3$ *é* $x=49$; $y=59$ *com a solução* $N_3=2256$

II

3923 — Determinar m de modo que as raízes da equação $x^2+2mx-2m+3=0$ sejam reais e de sinais contrários.

R: *Como* $a>0$ *é suficiente considerar* $c<0$, *isto é,* $-2m+3<0$, *donde* $m>3/2$

III

3924 — Os coeficientes do 4.º e do 6.º termos do desenvolvimento de $(1+x)^n$ estão entre si como 2 e 3. Determinar n e esses dois coeficientes.

R: $T_4=C_3^n \cdot a^3 \cdot x^{n-3}$ *e* $T_6=C_5^n \cdot a^5 \cdot x^{n-5}$

$C_3^n : C_5^n=2/3$ *ou* $\frac{A_3^n}{3!} : \frac{A_5^n}{5!}=2/3$; $(5!\,A_3^n):(3!\,A_5^n)=2/3$;

$[5 \cdot 4 \cdot (n-1)(n-2)] : [n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)]=2/3$;

$\frac{20}{(n-3)(n-4)}=2/3$, *equação do 2.º grau com as raízes* $n_1=9$ *e* $n_2=-2$, *das quais só a primeira pode ser considerada.*

Donde $n=9$.

$C_3^9=\frac{A_3^9}{3!}=(9 \cdot 8 \cdot 7):(3 \cdot 2 \cdot 1)=84$ *e* $C_5^9=C_4^9=\frac{A_4^9}{4!}=$
$=(9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6):(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)=126$

Exame de aptidão para a frequência dos preparatórios para a Faculdade de Engenharia—Ano de 1954

3925 — Para que valores de m a equação

$$\frac{1}{2}(m-2)x^2-(m-3)x+2m=0$$

tem as raízes reais e de sinais contrários?

R: *É suficiente que* $a \cdot c < o$, *isto é*, $\frac{1}{2}(m-2) \cdot 2m < o$ *ou* $m^2 - 2m < o$, *donde* $o < m < 2$.

3926 — **Por que algarismo se deve substituir u para que o número $35u$ seja divisível por 6? Justifique a resposta.**

R: *Afirma um Teorema de Aritmética: «Se um número é divisível por vários números primos entre si, dois a dois, é divisível pelo seu produto e reciprocamente».*

Assim o número $35u$ *será divisível simultâneamente por* 2 *e por* 3: *é* $u = \dot{2}$ *e* $3 + 5 + u = \dot{3}$ *ou seja* $u = \dot{2}$ *e* $u = \dot{3} + 1$ *donde se concluie que* u *só poderá tomar o valor* 4, *que é o único algarismo par que é igual a* $\dot{3} + 1$.

3927 — **Como define combinações n a n de m objectos distintos? Tome 6 letras e escreva as combinações das mesmas tomadas 4 a 4, mostrando a sua lei de formação e verificando o seu número pela fórmula respectiva.**

3928 — **A soma de dois números é 176 e o seu m. m. c. é 840. Calcule os números**

R: *Seja* $a + b = 176$ *e m. m. c.* $(a, b) = 840$.

Fazendo $x = \frac{840}{a}$, $y = \frac{840}{b}$ *e substituindo os valores de* a *e de* b *na primeira relação obteremos* $\frac{840}{x} + \frac{840}{y} = 176$ *ou* $\frac{x+y}{x \cdot y} = \frac{22}{105}$ *donde* $x + y = 22$ *e* $x \cdot y = 105$ *visto que a fracção* $\frac{x+y}{x \cdot y}$ *é irredutível* (x *e* y *são primos entre si*).

Como x *e* y *só poderão assumir os valores* 7 *e* 15, *respectivamente, as soluções serão* $a = 840/7 = 120$ *e* $b = 840/15 = 56$

3929 — Demonstre qual é o limite para que tende uma fracção qualquer quando se adiciona aos seus dois termos a mesma quantidade e se faz crescer esta indefinidamente.

R: *O problema, tal como está enunciado, poderá prestar-se a certas confusões e dificuldades visto que uma «fracção qualquer», sendo do tipo* x/y, *é função de duas variáveis e, nestas condições, a determinação do limite pedido é problema para além do âmbito das matemáticas elementares. Parece-nos que o* A. *desejará o limite, supondo constantes os termos da fracção.*

Seja a/b *uma fracção com* a *e* b *constantes e* n *a «quantidade» que se faz variar indefinidamente.*

Será $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a+n}{b+n} = 1$ *visto que* $\left| 1 - \frac{a+n}{b+n} \right| = \left| \frac{a-b}{b+n} \right|$ *é infinitamente pequeno com* $n \to \infty$.

3930 — Resolva a equação

$$2\,\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x - 1 = 0$$

determinando os valores de x com a aproximação de $1'$.

R: *Fazendo* $tg\,x = Z$, *a equação proposta toma o aspecto* $2Z^2 - Z - 1 = 0$, *com as raízes* $Z_1 = 1$ *e* $Z_2 = -\frac{1}{2}$.

As soluções das equações trigonométricas $Z_1 = tg\,x = 1$ *e* $Z_2 = tg\,x = -\frac{1}{2}$ *obter-se-ão, respectivamente, por meio das relações* $x = 180^\circ \cdot K + 45^\circ$ *e* $x = 180^\circ \cdot K + 153^\circ\, 27'$ *onde* 45° *e* $153^\circ\, 27'$ *representam os menores arcos positivos, com a aproximação pedida, cujas tangentes são, respectivamente, iguais a* 1 *e a* $-\frac{1}{2}$

Soluções dos N.os 3913 a 3930 de M. J. Sousa Ventura

ADMISSÃO AO ESTÁGIO

Exame de admissão ao estágio do 8.º grupo no Liceu Normal de D. João III (Coimbra) — Ano de 1951.

I — Teoria da divisibilidade.

II — Poliedros, poliedros regulares, superfícies prismática e piramidal. Prisma, pirâmide e troncos respectivos.

3931 — **A soma de dois números inteiros, a e b, é 1620. Calcule esses números sabendo que o seu máximo divisor comum admite 12 divisores.**

R: *O problema é solucionado pelos seguintes valores para* a: 60, 90, 108, 120, 216, 240, 300, 420, 432, 450, 600, 630, 660, 750 *e* 780.

3932 — Calcular p e q sabendo que a fracção $\frac{x^2+px+q}{x}$ toma o valor mínimo a e o valor máximo b. Verificar a exactidão do resultado recorrendo ao Cálculo Infinitesimal.

R: *A primeira derivada de* $f(x) = \frac{x^2 + px + q}{x}$ *e* $f'(x) = 1 - q/x^2$, *anulando-se para* $x = \pm\sqrt{q}$ *(supõe-*