R: *É suficiente que* $a \cdot c < o$, *isto é,* $\frac{1}{2}(m-2) \cdot 2m < o$ *ou* $m^2 - 2m < o$, *donde* $o < m < 2$.

3926 — Por que algarismo se deve substituir u para que o número $35u$ seja divisível por 6? Justifique a resposta.

R: *Afirma um Teorema de Aritmética: «Se um número é divisível por vários números primos entre si, dois a dois, é divisível pelo seu produto e reciprocamente».*

Assim o número $35u$ *será divisível simultâneamente por* 2 *e por* 3: *é* $u = \dot{2}$ *e* $3 + 5 + u = \dot{3}$ *ou seja* $u = \dot{2}$ *e* $u = \dot{3} + 1$ *donde se concluie que* u *só poderá tomar o valor* 4, *que é o único algarismo par que é igual a* $\dot{3} + 1$.

3927 — Como define combinações n a n de m objectos distintos? Tome 6 letras e escreva as combinações das mesmas tomadas 4 a 4, mostrando a sua lei de formação e verificando o seu número pela fórmula respectiva.

3928 — A soma de dois números é 176 e o seu m. m. c. é 840. Calcule os números

R: *Seja* $a + b = 176$ *e m. m. c.* $(a, b) = 840$.

Fazendo $x = \frac{840}{a}$, $y = \frac{840}{b}$ *e substituindo os valores de* a *e de* b *na primeira relação obteremos* $\frac{840}{x} + \frac{840}{y} = 176$ *ou* $\frac{x+y}{x \cdot y} = \frac{22}{105}$ *donde* $x + y = 22$ *e* $x \cdot y = 105$ *visto que a fracção* $\frac{x+y}{x \cdot y}$ *é irredutível* (x *e* y *são primos entre si*).

Como x *e* y *só poderão assumir os valores* 7 *e* 15, *respectivamente, as soluções serão* $a = 840/7 = 120$ *e* $b = 840/15 = 56$

3929 — Demonstre qual é o limite para que tende uma fracção qualquer quando se adiciona aos seus dois termos a mesma quantidade e se faz crescer esta indefinidamente.

R: *O problema, tal como está enunciado, poderá prestar-se a certas confusões e dificuldades visto que uma «fracção qualquer», sendo do tipo* x/y, *é função de duas variáveis e, nestas condições, a determinação do limite pedido é problema para além do âmbito das matemáticas elementares. Parece-nos que o* A. *desejará o limite, supondo constantes os termos da fracção.*

Seja a/b *uma fracção com* a *e* b *constantes e* n *a «quantidade» que se faz variar indefinidamente.*

Será $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a+n}{b+n} = 1$ *visto que* $\left|1 - \frac{a+n}{b+n}\right| = \left|\frac{a-b}{b+n}\right|$ *é infinitamente pequeno com* $n \to \infty$.

3930 — Resolva a equação

$$2 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 = 0$$

determinando os valores de x com a aproximação de $1'$.

R: *Fazendo* $tg\, x = Z$, *a equação proposta toma o aspecto* $2Z^2 - Z - 1 = 0$, *com as raízes* $Z_1 = 1$ *e* $Z_2 = -\frac{1}{2}$.

As soluções das equações trigonométricas $Z_1 = tg\, x = 1$ *e* $Z_2 = tg\, x = -\frac{1}{2}$ *obter-se-ão, respectivamente, por meio das relações* $x = 180° \cdot K + 45°$ *e* $x = 180° \cdot K + 153° 27'$ *onde* 45° *e* 153° 27' *representam os menores arcos positivos, com a aproximação pedida, cujas tangentes são, respectivamente, iguais a* 1 *e a* $-\frac{1}{2}$

Soluções dos N.os 3913 a 3930 de M. J. Sousa Ventura

ADMISSÃO AO ESTÁGIO

Exame de admissão ao estágio do 8.º grupo no Liceu Normal de D. João III (Coimbra) — Ano de 1951.

I — Teoria da divisibilidade.

II — Poliedros, poliedros regulares, superfícies prismática e piramidal. Prisma, pirâmide e troncos respectivos.

3931 — A soma de dois números inteiros, a e b, é 1620. Calcule esses números sabendo que o seu máximo divisor comum admite 12 divisores.

R: *O problema é solucionado pelos seguintes valores para* a: 60, 90, 108, 120, 216, 240, 300, 420, 432, 450, 600, 630, 660, 750 *e* 780.

3932 — Calcular p e q sabendo que a fracção $\frac{x^2+px+q}{x}$ toma o valor mínimo a e o valor máximo b. Verificar a exactidão do resultado recorrendo ao Cálculo Infinitesimal.

R: *A primeira derivada de* $f(x) = \frac{x^2 + px + q}{x}$ *e* $f'(x) = 1 - q/x^2$, *anulando-se para* $x = \pm\sqrt{q}$ (*supõe-*

-se $q > 0)$; *sendo* $f''(x) = -2\,q/x^3$, *a função tem um máximo para* $+\sqrt{q}$ *com o valor* $b = p + 2\sqrt{q}$, *e um mínimo para* $-\sqrt{q}$ *com o valor* $a = p - 2\sqrt{q}$, *relações que dão* p *e* q *em função de* a *e* b .

3933 — Considere o triedro $Oxyz$, e as medidas das respectivas faces: $xOz = 90°, yOz = 90°$ e $xOy = 120°$. Sobre as arestas Ox e Oy marque, respectivamente, os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ de comprimento igual a K: $\overline{OA} = \overline{OB} = K$. Calcule o comprimento do segmento $\overline{OC}$ que deve marcar-se sobre a aresta Oz, de modo que o triângulo ABC seja equilátero.

Considere agora o triedro $Ox'y'z'$, polar do triedro $Oxyz$. Marque sobre as arestas Ox' e Oy', respectivamente, os segmentos $\overline{OM}$ e $\overline{ON}$ de comprimento igual K: $\overline{OM} = \overline{ON} = K$. Determine sobre Oz' a posição de um ponto P de modo que a área total do tetraedro $OMNP$ seja igual a $(4+\sqrt{3})\,K^2/4$.

R: *O triângulo* OAB *é isósceles, e visto que* $\sphericalangle O = 120°$, *segue-se* $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 30°$; *seja* $\overline{OD}$ *a perpendicular a* $\overline{AB}$ *conduzida por* O, *com* $\overline{AD} = K \cdot \cos 30° = K \cdot \sqrt{3}/2$ *e, portanto,* $\overline{AB} = K \cdot \sqrt{3}$. *Como o ponto* C *deve ser tal que* ABC *saia equilátero, ter-se-à* $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = K \cdot \sqrt{3}$; *então do triângulo* OAC, *rectângulo em* O, *obtem-se* $\overline{OC} = K \cdot \sqrt{2}$. *Construindo o triedro polar do dado, verifica-se que os ângulos das suas faces são:* $x'Oy' = 60°, x'Oz' = y'Oz' = 90°$. *Sejam* $\overline{OM} = \overline{ON} = K$ *os segmentos dados sobre* Ox' *e* Oy', *e* $\overline{OP} = x$ *o valor do segmento a determinar sobre a outra aresta do triedo. No tetraedro* MNOP, *a face* OMN *é um triângulo equilátero de área* $\sqrt{3} \cdot K^2/4$; *as faces* OMP *e* ONP *são triângulos rectângulos de catetos* x *e* K, *portanto de área* $\frac{1}{2} K x$; *enfim, como* $\overline{MN} = K$ *(visto ser* OMN *equilátero) e* $\overline{MP}^2 = K^2 + x^2$ *(do triângulo rectângulo* MOP), *segue-se que a altura* $\overline{PQ}$ *do triângulo* MPN *é* $\overline{PQ} = \sqrt{3K^2 + 4x^2}/2$, *e o triângulo tem a área* $K \cdot \sqrt{3K^2 + 4x^2}/4$. *A área das faces do tetraedro é* $\sqrt{3} \cdot K^2/4 + Kx + K \cdot \sqrt{3K^2 + 4x^2}/4 = (4+\sqrt{3}) \cdot K^2/4$ *donde se tira* $x = \overline{OP} = K/2$.

3934 — Calcule a medida do diedro do tetraedro regular com os recursos da trigonometria plana, e verifique a exactidão do resultado por meio da trigonometria esférica.

R: *Se* θ *é a medida do ângulo diedro pedido, a trigonometria plana conduz a* $\theta = 2 \operatorname{arc\,cotg} \sqrt{2}$. *Pela trigonometria esférica chegar-se-ia a* $\theta = \operatorname{arc\,sec} 3$.

Exame de admissão ao estágio do 8.º grupo no Liceu Normal de D. João III (Coimbra) — Ano de 1952.

I — Inequações. Princípio de equivalência.

II — Homotetia e semelhança.

3935 — Sendo n um número inteiro, demonstre que a fracção resultante da adição $1/n + 1/(n+1) + 1/(n+2)$ gera uma dízima periódica mixta.

R: *A soma pode-se escrever*

$$\frac{A}{B} = \frac{(n+1)(n+2) + n(n+2) + n(n+1)}{n(n+1)(n+2)}.$$

Em primeiro lugar notemos que dos três números inteiros $n, n+1$ *e* $n+2$ *ou é par* $n+1$ *(e nesse caso* 2 *divide* B *mas não divide* A) *ou são pares* n *e* $n+2$ *(e então* 4 *divide* B *e* 2 *divide* A). *Por outro lado, um e um só dos três números* $n, n+1$ *e* $n+2$ *é divisível por* 3, *e por isso* B *é divisível por* 3 *sem que o seja* A. *Assim* $A/B = \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot A'/B'$, *ficando provada a afirmação do enunciado.*

3936 — Resolva a equação $32(x-a)^3 - 27x^2(x - 2a) = 0$, sabendo que uma das raízes é um múltiplo inteiro de a.

R: *Sendo* n *inteiro e* $x_i\ (i = 1, 2, 3)$ *as raizes da equação, tem-se pelo enunciado* $x_1 = na$. *Pelas relações de* GIRARD-NEWTON

$$5 \cdot \sum x = 42\,a\,;\; 5 \sum_{i \neq k} x_i \cdot x_k = 296\,a^2\,;\; 5\,x_1 x_2 x_3 = 32\,a^3$$

equações que, juntamente com $x_1 = na$ *levam à determinação de* n *como raiz inteira de* $5n^3 - 42n^2 + 96n - 32 = 0$, *ou seja,* $n = 4$. *Eliminando na equação proposta a raiz* $x_1 = 4a$ *pela regra de* RUFINI, *vem a equação do 2.º grau* $5x^2 - 22ax + 8a^2 = 0$, *com as raizes* $4a$ *e* $2/5\,a$. *A equação dada tem, pois, as raízes* $4a$ *(dupla) e* $2/5\,a$.

3937 — Numa circunferência de raio dado considere o diâmetro $\overline{AB}$ e uma corda que lhe é paralela, intersectando a circunferência em M e M' e o diâmetro perpendicular a $\overline{AB}$ em P. Determine a equação do lugar geométrico descrito pelo ponto $R(x, y)$ de intersecção das rectas $\overline{AP}$ e $\overline{BM}$, quando a corda $\overline{MM'}$ se desloca paralelamente a $\overline{AB}$. Caracterize o lugar obtido.

R: *Tomando como eixos coordenados os dois diâmetros perpendiculares, seja* R *o raio da circunferência considerada, e* $y = m$ *(m é um parâmetro) a equação da recta* MM'; *o lugar geométrico procurado é o lugar dos pontos de intersecção das rectas* AP *e* BM' *de equações, respectivamente,* $Ry - Kx = KR$ *e* $(\sqrt{R^2 - K^2} - R)\,y - Kx = -KR$. *Eliminando* K *entre as duas equações obtem-se para equação do lugar* $3x^2 + y^2 - 2Rx = R^2$ *(elipse).*

3938 — Resolva o triângulo de que se conhece o lado a, sabendo que : 1.º) os lados b e c verificam a relação

$b+c=2a$; 2.º) a área do rectângulo construído com os dois menores lados é m vezes a área do triângulo. Discussão. Aplicação ao caso de ser $a=438\,m$ e $m=3$.

R: *Seja* $b+c=2a$, *e suponhamos que* b *é o menor dos lados do triângulo*: $b<a<c$. *A área do rectângulo referido é* $a\cdot b$; *e como a altura do triângulo para o lado* b *é* $a\cdot \operatorname{sen} C$, *a sua área exprime-se por* $a\cdot b\cdot \operatorname{sen} C/2$; *donde, em virtude da condição do enunciado,* $\operatorname{sen} C=2/m$. *Tem, pois, de ser* $m\geqslant 2$.

Se $m=2$, *o triângulo é rectângulo em* C, *com* $a\cdot b=2$; *e desta relação, juntamente com* $a^2+b^2=c^2$ *e* $b+c=2a$, *tiram-se os valores dos seus lados* $(a=4b/3\,,\,c=5b/3$ *com* $b=\sqrt{3}/\sqrt{2})$, *obtendo-se em seguida os valores dos ângulos* $(A=\operatorname{arc\,sen} 4/5)$.

Se $m>2$, *obtido* C *de* $\operatorname{sen} C=2/m$, *da relação entre os lados e as somas dos ângulos opostos vem, calculando a soma* $b+c$, $2\operatorname{sen} B=\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} C$; *mas sendo* $\operatorname{sen} B=\operatorname{sen}(A+C)$, *fica* $2\operatorname{sen}(A+C)=\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} C$, *o que conduz a* $3\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$, *que permite determinar* A, — *ficando o problema resolvido, pois se conhecem os três ângulos do triângulo e se sabe que* $(b+c)/2\operatorname{sen} A=b/\operatorname{sen} B=c/\operatorname{sen} C$. *Como* $a<c$ *segue-se que também* $A<C$ *ou seja* $\operatorname{tg}\frac{A}{2}<\operatorname{tg}\frac{C}{2}$; *assim, a relação* $3\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1$ *conduz a* $\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}>\frac{1}{3}$ *e, como* $C\in(0,\pi)$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}>\frac{1}{\sqrt{3}}$. *Deste modo conclui-se que tem de ser* $C\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$. *Excluido o caso de ser* $m=2$, *já considerado, fica-nos* $\sqrt{3}/2<\operatorname{sen} C=\frac{2}{m}<1$ *e portanto* $m\in(2,4/\sqrt{3})$, *ficando o problema com duas soluções para* m *neste intervalo.*

Soluções dos N.os 3931 a 3938 de L. Albuquerque

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. L. — Geometria Descritiva — 1.º Exame de Frequência, 1954-55.

3939 — Sejam $\alpha,\beta,\alpha',\beta'\cdots$ números reais. Considere o conjunto dos pares (α,β) e defina nesse conjunto uma soma pela lei seguinte

$$(\alpha,\beta)+(\alpha',\beta')=(\alpha+\alpha',\beta+\beta').$$

Mostre que a correspondência $(\alpha,\beta)\to\alpha$, é um homomorfismo, e determine o seu núcleo.

3940 — Determine o grupo dos automorfismos de um grupo cíclico finito.

3941 — Considere um plano oblíquo qualquer. Determine o seu traço no $\beta_{2,4}$ utilizando uma recta de perfil do plano.

3942 — Dadas 3 rectas não complanas duas a duas, mostre (construindo) que é possível haver uma recta paralela a uma delas e que encontra as outras duas.

3943 — Dadas 2 rectas, uma paralela ao $\beta_{2,4}$ e outra paralela ao $\beta_{1,3}$ construir por um ponto não pertencente a nenhuma das rectas dadas, uma recta paralela ao $\beta_{2,4}$ que as encontre.

Observação:

Resolver o problema sem recorrer à *LT*, no caso em que tiver solução.

Enunciar a condição necessária e suficiente para que o problema tenha solução.

F. C. C. — Geometria Descritiva — 2.º Exame frequência — 1953-54.

Ponto n.º 1

3944 — Por um ponto de *L. T.* conduzir uma recta que faça ângulos de 40º com o plano vertical de projecção e com um plano vertical que define com aquele um diedro de 70º.

R: A recta é uma das arestas de um triedro, cujas faces medem 70º, 50º e 50º, sendo as outras duas arestas eixos dos dois planos.

3945 — Determinar os pontos de B_1 que distam 4cm de *L. T.*

R: *São os pontos da intersecção de* B_1 *com uma superfície cilíndrica de revolução que tem* L. T. *por eixo e* 4cm *por raio dum paralelo.*

3946 — Conduzir pela *L. T.* os planos que definem ângulos de 30º com uma horizontal inclinada 45º sobre o plano vertical de projecção.

R: *São os planos tangentes, conduzidas por* L. T. *a uma superfície cónica de revolução que tem a horizontal por eixo e 60º de abertura.*

Soluções dos N.os 3944 a 3946 de J. Farinha