A Vida e o Trabalho de Sophie Germain

Natascha Hall, Mary Jones e Gareth Jones
Mathematics Department, University of Southampton, United Kingdom

Uma das maiores dificuldades em persuadir uma mulher a tornar-se matemática é a falta de exemplos: a Matemática é apresentada aos estudantes como uma sequência de proezas conseguidas quase exclusivamente por homens e é necessária muita confiança para uma jovem estudante com talento se imaginar a fazer contribuições significativas para o seu desenvolvimento. É, pois, importante chamar a atenção para aquelas mulheres como Hypatia, Agnesi, Kovalevskaya e Noether cujos nomes se tornaram parte da História da Matemática e mostrar como, em muitos casos, precisaram de vencer fortes obstáculos para se tornarem matemáticas de sucesso.

Um exemplo clássico é a vida de Sophie Germain que, apesar da resistência familiar inicial e duma sociedade estruturada de modo a ser quase impossível a uma mulher manter uma carreira, fez, mesmo assim, contribuições fundamentais tanto em Matemática Pura como Aplicada.

Nasceu em Paris a 1 de Abril de 1776 e, através do seu pai, um negociante de seda rico e deputado eleito, teve contacto, desde cedo, com a filosofia e a política. Aos 13 anos a Revolução Francesa começara e as ruas de Paris não eram o lugar para uma jovem. Obrigada a estar em casa, meteu-se na biblioteca do pai aprendendo por si Latim e Grego para ler os livros mais antigos. Um livro que a fascinava, em especial, era *Essais Historiques sur la Mathématique* de Montucla, principalmente a secção onde se descrevia como Arquimedes fora morto por um soldado romano invasor, por estar demasiado absorvido por um diagrama geométrico para obedecer às ordens do soldado. Obviamente, pensava, tem de haver alguma coisa especial num assunto que pode levar a uma tal obsessão fatal.

Nesse tempo, em França, de uma mulher instruída esperava-se que falasse educadamente sobre ideias filosóficas, científicas e matemáticas, mas não era considerada capaz de perceber aqueles assuntos com profundidade. Esta atitude condescendente é ilustrada por *Sir Isaac Newton's Philosophy Explained for the Use of the Ladies* de Algarotti, no qual uma jovem aristocrata e o seu preceptor discutem a lei do inverso do quadrado comparando a diminuição do amor com o aumentar da separação. No início, a família de Sophie Germain desencorajou o seu entusiasmo pela Matemática, embaraçoso e nada próprio de uma senhora, e ela foi forçada a estudar à noite, em segredo, lendo à luz de velas roubadas e embrulhada em cobertores para se proteger do frio que gelava os tinteiros. Perante tal determinação, a família tornou-se menos rígida e, na verdade, o seu pai apoiou-a financeiramente durante o resto da vida.

Em 1794 a *École Polytechnique* abriu em Paris. Claro que não aceitava mulheres e, assim, Sophie Germain aproveitou os seus métodos de ensino, sob outros aspectos "abertos", assumindo a identidade de um antigo aluno, Antoine-Auguste Le Blanc, para obter cópias das notas das aulas e submeter trabalho para ser classificado. Não tardou que Lagrange, que ensinava Análise, notasse, surpreendido, uma melhoria espectacular no trabalho, habitualmente vulgar, de Le Blanc e chamasse o estudante. Mostrando uma falta de preconceitos extraordinária para a época, ficou não só agradavelmente surpreendido ao descobrir a sua identidade como se tornou seu amigo e conselheiro académico. Deu-lhe a conhecer áreas específicas da Matemática, Teoria de Números em particular, tendo ela lido os trabalhos de Fermat, Legendre e, mais tarde, do novo génio Gauss. Contudo, apesar deste encorajamento, tanto as convenções sociais como a sua natureza reservada impediram-na de ter a instrução matemática completa que ela claramente desejava. Para um jovem ambicioso de uma família pobre, como Poisson, havia o novo sistema de educação de Napoleão e os salões intelectuais ter-se-iam aberto a uma mulher com antecedentes mais aristocráticos mas, para a filha de um negociante, essas portas estavam fechadas.

Um problema que ela estudou foi o último Teorema de Fermat (UTF), a sua famosa afirmação de que a equação $x^n + y^n = z^n$, $n>2$, não tem soluções nos inteiros positivos, escrita sem demonstração na margem do seu exemplar da *Arithmetica* de Diophantus por volta de 1630. Prová-la foi um dos maiores desafios em Matemática. Tendo Fermat resolvido o caso $n = 4$, bastava prová-la nos casos em que n é um primo ímpar. Euler provou-a (aproximadamente) para $n = 3$ em 1753 mas, como há infinitos primos, tratar um de cada vez era, claramente, inadequado. Era necessária uma abordagem diferente, uma em que se considerassem conjuntos de expoentes em vez de valores individuais.

Em 1804 Sophie Germain resolveu o UTF no caso em que $n = p - 1$, onde p é primo e $p \equiv 7 \bmod 8$. Mandou este resultado a Gauss, que publicara as suas *Disquisitiones Arithmeticae* em 1801, mas, receando que ele não levasse a sério uma mulher matemática, adoptou de novo o pseudónimo Le Blanc. A resposta de Gauss foi favorável e ela continuou a corresponder-se com ele, mantendo o disfarce até 1806, altura em que, preocupada com a possibilidade do destino de Gauss às mãos do exército de Napoleão vir a ser o de Arquimedes, usou a sua amizade com o General Pernety para o proteger. Ao saber a identidade do seu correspondente e anjo da guarda, Gauss (alheio, como Lagrange, aos preconceitos do seu tempo) respondeu, felicitando-a efusivamente pelo seu talento matemático e pela coragem em vencer os obstáculos que a sociedade punha no caminho das mulheres.

Quando se tenta provar o UTF, pode supor-se que x, y e z são, dois a dois, primos entre si. Quando n é primo tal implica que nenhum deles ou um apenas é divisível por n e estes são, tradicionalmente, chamados Casos I e II do UTF. Esta distinção é importante pois os métodos envolvidos nos dois casos são geralmente diferentes, sendo o Caso I bastante mais fácil. Em 1808 Germain mandou a Gauss a sua demonstração do Caso I para n=5 mas, desta vez, não teve resposta: nomeado havia pouco tempo Professor de Astronomia em Göttingen, Gauss estava a perder o seu entusiasmo pela Teoria de Números e, sem o seu encorajamento, os interesses dela começaram a virar-se para a Matemática Aplicada.

Nesse ano, o físico Chladni visitou Paris e apresentou em público aquilo a que hoje chamamos *figuras de Chladni*, padrões simétricos em placas vibrantes, revelados quando nelas se espalha areia. Apoiado por Napoleão, o Institut de France anunciou uma competição tendo por prémio um quilograma de ouro para um trabalho que explicasse estes fenómenos. Sophie Germain começou a estudar elasticidade, lendo a *Mécanique Analytique* de Lagrange e o trabalho de Euler sobre as vibrações de varetas elásticas. Em 1811 apresentou a sua solução que, embora fosse a única submetida a concurso, estava cheia de erros e omissões, causados pela sua inexperiência em técnicas como o Cálculo das Variações; nenhum prémio foi atribuído e o prazo foi alargado por mais dois anos. Lagrange, um dos membros do júri, corrigiu alguns dos erros e sugeriu que pequenos desvios w satisfazem

$$k\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

onde x, y são coordenadas euclidianas locais na placa, t é o tempo e k é uma constante. Na sua segunda tentativa, em 1813, ela mostrou que a equação de Lagrange explicava os padrões de Chladni em alguns casos simples, mas foi incapaz de a obter a partir de princípios físicos e, assim, foi-lhe atribuída apenas uma menção honrosa. O prazo foi de novo dilatado e, em 1816, os membros do júri, Legendre, Laplace e Poisson, atribuíram-lhe o prémio finalmente. Contudo, sentindo que não tinham tomado a sério o seu trabalho, não foi à entrega daquele. Poisson, um rival mais jovem que havia publicado o seu próprio artigo sobre elasticidade em 1814, certamente que levou a mal a nova abordagem que contradizia a sua teoria molecular e foi muito desencorajante no seu relatório sobre o trabalho dela. Esta relutância em admitir o que ela conseguiu nesta área continuou ao longo da vida e durante muito tempo após a sua morte: por exemplo, quando a Torre Eiffel foi construída em 1889, o seu nome foi omitido na lista dos 72 matemáticos, cientistas e engenheiros eminentes que nela foi colocada, apesar das contribuições importantes que fez para a nossa compreensão das propriedades dos metais. Fez ainda progressos relevantes na geometria diferencial das superfícies: Euler mostrara que a força elástica em qualquer ponto de uma vareta vibrante é proporcional à curvatura da vareta nesse ponto; para estender o resultado a placas vibrantes bidimensionais, ela precisou de introduzir um conceito análogo de curvatura para superfícies, que obteve somando as duas curvaturas principais em cada ponto ou, equivalentemente, integrando todas as curvaturas nesse ponto, de modo a ficar-se com a curvatura média.

Encorajada por Fourier, que não era amigo de Poisson, começou a participar mais na vida científica parisiense. Foi a primeira mulher, descontando as esposas dos membros, a assistir a conferências na Academia. Nos anos 20 publicou os seus resultados sobre elasticidade e voltou à Teoria de Números, colaborando com o muito respeitado Legendre.

Neste período provou o agora conhecido por *Teorema de Sophie Germain*, que generaliza o seu resultado anterior sobre o caso de expoente 5 do UTF. Diz que o UTF é verdadeiro no Caso I para um expoente n, primo e ímpar, se existir um primo auxiliar p tal que

(a) $x^n + y^n + z^n \equiv 0 \bmod p$ implica $x\,y\,z \equiv 0 \bmod p$
e
(b) n não é uma potência de expoente n mod p.[1]

Em particular, prova o Caso I do UTF se $2n+1$ é um primo p, pois as condições (a) e (b) seguem-se facilmente do facto de todas as potências de expoente n serem congruentes com ±1 ou 0 mod p; tais primos n são agora conhecidos por *primos de Sophie Germain*. Legendre fez a extensão aos casos em que $k\,n + 1$ é primo, para $k = 4, 8, 10, 14$ ou 16, o que lhe permitiu estabelecer o Caso I do UTF para todos os primos $n < 197$. Não se sabe se há infinitos primos de Sophie Germain, mas há 26 569 515 menores que 10^{10}. Em 1985 Adleman, Heath-Brown e Fouvry, combinando métodos analíticos modernos com os de Germain e Legendre, mostraram (de modo não construtivo) que há infinitos primos n para os quais o Caso I é verdadeiro. Claro, a maioria destes resultados foi suplantada pela demonstração completa do UTF de Wiles, publicada em 1995. Mesmo assim, o Teorema de Sophie Germain tem um lugar de relevo na história deste problema, como passo importante na passagem de casos individuais para uma abordagem mais sistemática.

Sophie Germain não publicou o seu teorema. Foi, em vez disso, simpaticamente citado por Legendre num artigo de 1823, reimpresso como suplemento da segunda edição da sua *Théorie des Nombres* em 1825 (esta continha também a sua demonstração do UTF para $n = 5$, simultânea com a de Dirichlet). Talvez por modéstia, as suas contribuições para a Teoria de Números permaneceram praticamente desconhecidas durante muitos anos. Na realidade, nos cento e cinquenta anos seguintes, alguns matemáticos publicaram resultados sobre o UTF que, posteriormente, se veio a verificar serem casos particulares do seu teorema (ver o agradável livro de Ribenboim [R] para mais detalhes). Em anos recentes o interesse na demonstração do UTF levou a um reconhecimento maior do seu trabalho mas, exceptuando a admiração por parte

[1] Isto é, n não é congruente mod p com um inteiro da forma k^n.

de grandes figuras como Lagrange, Legendre e Gauss, tal reconhecimento foi pequeno durante a sua vida. Morreu de cancro no seio em 27 de Junho de 1831 e, em 1837, quando a Universidade de Göttingen celebrou o seu centenário atribuindo graus honorários, Gauss teve muita pena que ela já não estivesse viva para receber um. Dunnington [Du, p.68] cita a sua opinião: "Mostrou ao mundo que mesmo uma mulher pode fazer coisas que valem a pena na mais rigorosa e abstracta das ciências e, por essa razão, bem teria merecido um grau honorário". As suas *Œuvres Philosophiques*, incluindo um ensaio filosófico inacabado e algumas das suas cartas, foram publicadas em 1879 [Ge2].

Em Paris há uma rua, um hotel e uma escola com o nome de Sophie Germain. No pátio da escola existe uma estátua sua muito elegante, usada por Dalmédico [Da] para ilustrar um curto artigo biográfico que, curiosamente, omite o Teorema de Sophie Germain. Este, e muitos outros resultados relacionados, aparece no tratamento, muito acessível, de Ribenboim do UTF [R]; para uma introdução, leve e para o público em geral, à história deste problema (antiga e moderna) ver Singh [S] e, para um tratamento enciclopédico (pré-Wiles), Edwards [E]. Bucciarelli e Dworsky [BD] discutem as contribuições de Sophie Germain para a elasticidade, brevemente cobertas também (com as de Poisson e outros desse período) na história do assunto de Timoshenko [T]. A biografia de Laplace por Gillispie [G] dá um bom retrato do mundo científico francês e das suas personagens mais notáveis na época, enquanto Dunnington [Du] narra pormenorizadamente a vida e o trabalho de Gauss. No *website* de Caldwell[2] encontra-se informação actualizada sobre os primos de Sophie Germain e, quanto aos 72 *sábios*, visite-se a Torre Eiffel[3].

Principais Personagens Relacionadas

Ernst Florens Friedrich Chladni, 1756-1827.
Leonhard Euler, 1707—1783.
Pierre de Fermat, 1601—1965.
Jean-Baptiste-Joseph Fourier, 1768—1830.
Carl Friedrich Gauss, 1777—1855.
Joseph-Louis Lagrange, 1736—1813.
Pierre-Simon Laplace, 1749—1827.
Adrien-Marie Legendre, 1752—1833.
Siméon-Denis Poisson, 1781—1840.

Referências

[BD] L. L. Bucciarelli and N.Dworsky, *Sophie Germain: An Essay in the History of Elasticity*, Reidel, Boston and Dordrecht, 1980.

[Da] A. D. Dalmédico, Sophie Germain, *Scientific American*, December 1991, 117-122.

[Du] G. W. Dunnington, *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*, Hafner, New York, 1955.

[E] H. M. Edwards, *Fermat's Last Theorem*, Springer, New York, 1977.

[Ge1] S. Germain, *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques*, Paris, 1821.

[Ge2] S. Germain, *Œuvres Philosophiques* (ed. Stupuy), Paris, 1879.

[Gi] C. C. Gillispie, *Pierre-Simon Laplace*, Princeton University Press, Princeton, 1997.

[R] P. Ribenboim, *Fermat's Last Theorem for Amateurs*, Springer, New York, 1979.

[S] S. Singh, *Fermat's Last Theorem*, Fourth Estate, London, 1997.

[T] S. P. Timoshenko, *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill, New York, 1953; reedição Dover, New York, 1983.

(Tradução de F. J. Craveiro de Carvalho)

[2] http://www.utm.edu/research/primes/lists/top20/SophieGermain.html
[3] http://www.tour-eiffel.fr/teiffel/fr/documentation/dossiers/page/savants.html