ANO XV–N.º 59 **GAZETA DE MATEMÁTICA** DEZEMBRO–1954

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda.—Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º, Dto.—Telef. 771943—LISBOA-N.

Teoria dos espaços localmente convexos e suas aplicações à Análise

por ***Gottfried Köthe***

(Excerto da conferência proferida na Academia das Ciências de Lisboa em 6-V-54 e publicada pela Biblioteca dos Altos Estudos, em tradução de **Jaime Campos Ferreira**).

A Análise funcional conta actualmente cerca de 60 anos de existência. A ideia de considerar as funções como elementos de um espaço com um número infinito de dimensões e de encarar os operadores integrais e diferenciais como transformações de um tal espaço num outro, desenvolveu-se com bastante lentidão, de maneira que só nos nossos dias se alcançou uma teoria com generalidade suficiente para conter, como casos particulares, todos os espaços funcionais de que há necessidade na Análise.

A primeira teoria célebre da Análise funcional, a das equações integrais de FREDHOLM, não saía do campo das funções contínuas num intervalo $I=[a,b]$ – o espaço $C(I)$, como hoje é designado. Foi HILBERT quem reconheceu que o espaço adequado à teoria das equações integrais é o espaço L^2, das funções mensuráveis de quadrado somável, espaço que recebeu o nome desse matemático.

A teoria dos espaços de HILBERT desenvolveu-se ràpidamente, tornando-se um instrumento muito potente na Análise. Hoje está pràticamente acabada e sai do quadro da teoria geral dos espaços funcionais. Vale a pena mencionar o seu interesse actual na Física teórica, onde fornece a base matemática para a física do átomo.

Durante muito tempo a teoria geral dos espaços funcionais lineares viveu à sombra da teoria dos espaços de HILBERT. De facto, além dos espaços L^p das funções de p-ésima potência integrável, considerados por F. RIESZ, e dos próprios espaços de HILBERT, pouco mais se conhecia na altura em que S. BANACH (por volta de 1920) fundou a teoria dos espaços normados, que hoje se designam por espaços de BANACH quando são completos. Esta teoria, de uma grande simplicidade, contém teoremas de profundo alcance na Análise. O seu teorema central será talvez o de HAHN-BANACH, sobre o prolongamento dos funcionais lineares contínuos de um subespaço ao espaço inteiro.

Quanto a aplicações da teoria dos espaços normados, podem citar-se as que foram realizadas pela escola polaca sobre as séries ortogonais e os métodos de somação de séries divergentes; convirá também lembrar que o teorema de SCHAUDER e LERAY sobre a existência de pontos fixos de certas transformações não lineares, talvez o maior sucesso de toda a teoria, fornece como casos particulares teoremas de existência relativos a equações às derivadas parciais não lineares bastante complicadas.

Mas já BANACH sentia que a noção de espaço normado era muito pouco geral. Se considerarmos, por exemplo, o espaço $C(R)$ das funções contínuas sobre toda a recta real, com a topologia natural da convergência uniforme sobre os intervalos finitos, já não teremos um espaço normado, mas um espaço (F)—ou de FRÉCHET—que é ainda metrisável, mas de uma maneira um pouco artificial. BANACH generalizou alguns dos seus teoremas aos espaços (F), mas não obteve uma teoria completa. A dificuldade residia na circunstância de o espaço dual, isto é, o espaço dos funcionais lineares contínuos sobre um espaço (F), não ser já um espaço (F), o que impossibilitava a aplicação dos métodos da teoria de BANACH. Convirá observar que o espaço dual de $C(R)$ é o espaço de certas medidas sobre a recta, certamente digno de lugar numa teoria geral dos espaços lineares.

Outro ponto que vale a pena referir é que uma parte central da Análise, a teoria das funções analíticas, era pràticamente inacessível aos métodos de BANACH: o mais simples dos espaços que aqui se podem considerar, o das funções holomorfas num conjunto aberto do plano complexo, é já um espaço (F) não normável.

Também o espaço das funções reais indefinidamente deriváveis num intervalo $[a, b]$ é um espaço (F) não normável.

Impunha-se então desenvolver uma teoria, que fosse por um lado bastante geral para abranger todos os espaços de grande interesse na Análise, por outro não tão geral que excluísse a possibilidade de obter teoremas profundos. Ao encontro desta necessidade é que surge a teoria dos espaços localmente convexos que só nos últimos cinco anos alcançou a sua forma talvez definitiva.

Em lugar de se dar uma norma $\|\chi\|$ sobre um espaço linear E (como no caso dos espaços normados), supõe-se dada uma classe $\{p_\alpha(\chi)\}$ de seminormas, e introduz-se uma topologia $\mathfrak{T}$ definindo as vizinhanças da origem a partir dos conjuntos $\mathfrak{U}_{\alpha,\varepsilon}$ de todos os $\chi \in E$ tais que $p_\alpha(\chi) < \varepsilon$. Se a topologia $\mathfrak{T}$ for separada, o espaço obtido diz-se localmente convexo.

O que torna esta teoria mais difícil do que a dos espaços de BANACH é a necessidade de empregar os instrumentos da moderna topologia geral, espaços uniformes, filtros, etc., em vez dos métodos mais simples que são suficientes nos espaços métricos. Todavia deve notar-se que, mesmo no caso dos espaços de BANACH, os teoremas sobre a convergência fraca exigem na verdade os instrumentos topológicos, porque a convergência fraca é a noção de convergência da topologia fraca, a qual não é metrisável. Desta forma têm os métodos modernos contribuído também para esclarecer e ampliar a teoria clássica de BANACH.

Indicarei agora, apenas em traços largos, o desenvolvimento da teoria geral dos espaços localmente convexos.

A noção de espaço localmente convexo e os primeiros teoremas sobre estes espaços foram estabelecidos por J. VON NEUMANN em 1935. Em 1938, J. WEHAUSEN suprime uma hipótese supérflua de numerabilidade da definição de VON NEUMANN. Mas a teoria geral mantém-se pouco desenvolvida até 1942, ano em que, num trabalho de J. DIEUDONNÉ sobre a teoria de BANACH, aparece a noção de dualidade fraca, bem como as demonstrações de alguns teoremas relativos à topologia fraca. O trabalho de DIEUDONNÉ vem generalizar certos resultados que O. TOEPLITZ e eu próprio tínhamos obtido desde 1934, sobre uma classe especial de espaços (a que demos o nome de espaços perfeitos) cujos elementos são sucessões de números complexos. Os espaços perfeitos são bastante manejáveis, fornecem fáceis exemplos e contra-exemplos, e por esta razão a respectiva teoria poude dar algum estímulo ao desenvolvimento da teoria geral.

Mas o referido trabalho de DIEUDONNÉ não marca ainda o verdadeiro início da fase definitiva.

Só em 1949 aparece uma memória de DIEUDONNÉ e L. SCHWARTZ intitulada «La dualité dans les espaces (F) et $(L\,F)$», que contém toda a aparelhagem de noções topológicas e de métodos gerais de que a teoria viria a servir-se. Neste trabalho utilizam-se os resultados profundos sobre os espaços localmente convexos que G. W. MACKEY obteve, sob forma predominantemente algébrica, em 1945 e 1946. E é então principalmente o jovem matemático A. GROTHENDIECK (tem sòmente 25 anos de idade), quem desenvolve a teoria geral dos espaços localmente convexos em vários trabalhos, alguns ainda não publicados.

Não tentarei fazer aqui um esboço do conteúdo da teoria geral, bastará mencionar que se conhecem hoje muito bem os duais dos espaços (F), sobretudo por obra de DIEUDONNÉ, SCHWARTZ e GROTHENDIECK, e que se sabe com precisão quais os espaços localmente convexos em que são verdadeiros os teoremas centrais da teoria de BANACH.

Falarei agora das aplicações.

Foi a necessidade de uma definição precisa do conceito de distribuição que conduziu DIEUDONNÉ e SCHWARTZ ao seu trabalho sobre os espaços (F) e $(L\,F)$. A noção de distribuição, sensacional descoberta de SCHWARTZ, que veio alargar e unificar de uma forma surpreendente a análise real clássica, não pode definir-se precisamente sem a teoria dos espaços localmente convexos. Os espaços de que se necessita não são já mesmo espaços (F), mas limites indutivos de sucessões de espaços (F), chamados espaços $(L\,F)$.

A definição de distribuição dada por SCHWARTZ é a seguinte: uma distribuição sobre a recta é um funcional linear contínuo sobre o espaço $\mathfrak{D}$ (espaço do tipo $(L\,F)$), constituído pelas funções indefinidamente deriváveis com suporte compacto sobre a recta.

Se se pretende seguir o desenvolvimento da teoria das distribuições e das suas aplicações aos diversos ramos da Análise, sente-se a necessidade de conhecer a teoria dos espaços localmente convexos, ou pelo menos algumas partes não muito elementares desta teoria.

Outro campo de aplicações é constituído pela teoria da integração sobre os espaços localmente compactos, generalização das teorias da integração e da medida, que obteve recentemente, no livro de BOURBAKI sobre a integração, uma forma baseada nos espaços localmente convexos. As medidas sobre um espaço localmente compacto K são também definidas como elementos do espaço dual de certo espaço de funções contínuas sobre K.

Passemos a um terceiro campo de aplicações, a teoria das funções analíticas, que como já disse, se manteve inacessível aos métodos de BANACH. Em 1937, O. TOEPLITZ reconheceu que certos espaços de funções analíticas, por exemplo o das funções inteiras, eram espaços perfeitos. TOEPLITZ conseguiu demonstrar vários teoremas clássicos da teoria das funções inteiras com os métodos gerais dos espaços perfeitos, e reconhecer a dualidade entre o espaço das funções inteiras e o das funções analíticas na origem.

Por outro lado, existia desde 1930 uma teoria bastante desenvolvida dos funcionais analíticos, de L. FANTAPPIÉ e da sua escola. Afastados das noções da escola de BANACH, os fundamentos desta teoria não eram de forma alguma simples.

E assim, embora há muito se sentisse a necessidade de englobá-la numa teoria mais geral, é só em 1946 que J. SEBASTIÃO E SILVA consegue dar à teoria de FANTAPPIÉ uma nova base, na qual, introduzindo o espaço $\mathfrak{F}(C)$ das funções localmente analíticas sobre um compacto C, permite demonstrar que, na sua maior parte, ela cabe no quadro da teoria dos espaços localmente convexos.

Note-se que os espaços $\mathfrak{F}(C)$, cuja importância na análise complexa é evidente, não são também espaços (F), mas limites indutivos de espaços de BANACH. Nova ilustração do facto de que a generalidade das noções da teoria moderna era imposta já pelos exemplos mais clássicos.

A estes resultados de J. SILVA liga-se toda uma série de trabalhos cujo objectivo é o estudo dos espaços $\mathfrak{F}(C)$ e de outros espaços mais gerais de funções analíticas que tomam valores num espaço localmente convexo qualquer. Citarei junto do nome de J. SILVA os de L. NACHBIN [15], SILVA DIAS [2], GROTHENDIECK [7], TILLMANN [20] e o meu próprio [10] (¹). Creio bem que nesta direcção será possível obter ainda muitos resultados de grande interesse.

Para não ficar exclusivamente em generalidades, vou tentar dar-vos uma impressão mais precisa sobre um problema que estudei no meu trabalho relativo às distribuições de fronteira («Randverteilungen») das funções analíticas. Escolho essa questão, não só por ser acessível mesmo aos não especialistas da teoria dos espaços localmente convexos, como também porque espero que as noções que nela intervêm serão úteis na análise clássica.

(¹) Os números entre colchetes referem-se à Bibliografia, que se encontra no final. (N. da R.).

Seja $f(z)$ uma função holomorfa para $|z|<1$. O problema do comportamento de $f(z)$ quando z se aproxima da circunferência $K\equiv(|z|=1)$ é um problema antigo. Sabe-se que há casos em que $f(z)$ é ainda analítica sobre K, ou pelo menos contínua. Mas existem também funções de fronteira que pertencem só a um espaço L^p, isto é, que são apenas funções de p-ésima potência integrável à LEBESGUE. E, na maior parte dos casos, não existe mesmo nenhuma função definida sobre K que possa ser considerada como prolongamento por continuidade de $f(z)$ à fronteira, porque esta função se torna demasiado patológica quando z se aproxima de K.

Tudo isto é pouco claro, e talvez pareça impossível integrar estes casos divergentes num quadro onde se organizem de uma maneira simples. Pois, como vamos ver, a teoria dos espaços localmente convexos vem permitir uma tal organização e até de uma forma bastante directa.

Observe-se primeiro que as funções $\chi(z)$, analíticas sobre a circunferência K (e portanto sobre um conjunto aberto contendo essa circunferência) constituem um espaço localmente convexo $A(K)$, caso particular dos espaços $\mathfrak{F}(C)$ introduzidos por J. SILVA.

Como se vê imediatamente, as funções $\chi(z)$ de $A(K)$ são precisamente as que admitem um desenvolvimento de LAURENT da forma

$$\chi(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\xi_n z^n,$$

com os coeficientes ξ_n sujeitos à única condição de existir um número natural $k>1$ e um número positivo M tais que

$$|\xi_{|n|}|\leqslant M\left(1-\frac{1}{k}\right)^n \qquad n=0,1,2,\cdots$$

Poderemos então representar $\chi(z)$ pelo vector $\varphi=(\xi_n)$, e o espaço perfeito $\mathfrak{A}(K)$, constituído por todos os vectores φ, será topològicamente isomorfo a $A(K)$.

Designemos por $A(K)'$ o espaço dual de $A(K)$, isto é o espaço cujos elementos são os funcionais lineares contínuos sobre $A(K)$. Não darei agora a definição exacta da topologia de $A(K)$ que é um pouco complicada; mas indico a seguir um teorema sobre os espaços perfeitos que fornece uma representação bastante simples dos elementos dos $A(K)'$:

Todos os funcionais lineares contínuos $u(\varphi)$ sobre um espaço perfeito E podem representar-se como vectores $u=(\nu_n)$, em que os ν_n devem submeter-se à condição única de que o produto escalar $u\varphi=\Sigma\,\nu_n\,\xi_n$ seja absolutamente convergente para todo o $\varphi \in E$; nestas condições ter-se-á $u(\varphi)=u\varphi$ para todo o φ de E e todo o u pertencente ao dual de E.

Um cálculo elementar evidencia que o espaço $A(K)'$ é isomorfo ao espaço perfeito $\mathfrak{A}(K)'$ de todos vectores $u=(\nu_n)$ tais que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{|n|}|\nu_n|<\infty \qquad k=2,3,\cdots.$$

Obtivemos assim uma concretização dos funcionais lineares contínuos $u\in A(K)'$ que fazem corresponder um número complexo a cada função $\chi(z)$ analítica sobre K. Mas também poderemos agora considerar um tal $u\in A(K)'$ como uma espécie de função generalizada sobre K, num passo semelhante ao que se dá para introduzir as noções de medida ou de distribuição sobre K. Como se sabe, estas são também funcionais que têm um valor não em cada ponto de K, mas sim em cada função contínua sobre K no primeiro caso, e em cada função indefinidamente derivável sobre K no segundo.

Segundo este ponto de vista, chamo aos elementos de $A(K)'$ distribuições de fronteira sobre K. E são precisamente estas distribuições que permitem resolver o nosso problema sobre as singularidades de fronteira de uma função $f(z)$, analítica para $|z|<1$. Com efeito, o teorema seguinte vem esclarecer toda a questão:

Quando $\rho\to 1$, as funções $f(\rho z)$ — funções analíticas sobre K para $0<\rho<1$ — consideradas como distribuições de fronteira sobre K, convergem no sentido da topologia de $A(K)'$, para um elemento $u\in A(K)'$.

Esta distribuição u será então o limite de $f(z)$, quando nos aproximarmos de K sobre circunferências concêntricas e interiores a K.

Por meio da nossa representação dos elementos de $A(K)$ e de $A(K)'$ como vectores pode precisar-se a convergência referida da seguinte maneira:

Se u_ρ são os vectores que representam os $f(\rho z)$ considerados como distribuições de fronteira, e se u é o respectivo limite, a convergência dos $f(\rho z)$ para u exprime-se pela convergência no sentido usual dos produtos $u_\rho\varphi$ para $u\varphi$, para todo o $\varphi\in\mathfrak{A}(K)$.

A convergência em questão é, porém, muito fraca; no caso geral não terá sentido pôr a questão da convergência dos $f(\rho z)$, se nos limitarmos a um sector do círculo $|z|<1$.

Mas é possível que a distribuição de fronteira de uma função $f(z)$ possa prolongar-se num funcional linear contínuo sobre um espaço mais vasto do que $A(K)$, por exemplo sobre o espaço L^2, de Hilbert. E então a convergência dos $f(\rho z)$ para a distribuição u, que será também um elemento de L^2, tornar-se-á mais forte, passando a coincidir com a convergência no sentido do espaço de Hilbert.

Vemos assim como um caso à primeira vista um tanto estranho entra na nossa teoria geral.

Esta teoria dá agora a possibilidade de classificar as funções $f(z)$, holomorfas no interior de K, a partir dos espaços localmente convexos a que pertencem as suas distribuições de fronteira, facultando um novo método para precisar o tipo de singularidades que uma tal função admite sobre a circunferência K. Trata-se porém de uma classificação global, visto que se tem de considerar toda essa circunferência e não só uma parte dela.

Vejamos agora um outro ponto: sabe-se já que, a cada função $f(z)$, holomorfa para $|z|<1$, corresponde uma distribuição de fronteira. Pergunta-se agora: serão alcançados desta maneira todos os elementos de $A(K)'$?

A resposta é negativa, mas pode afirmar-se que toda a distribuição de fronteira é a soma de duas outras, das quais uma é o limite de uma função f_1 holomorfa no interior de K e a outra o limite de uma função f_2 holomorfa no exterior de K e nula no ponto infinito.

Este resultado dá uma justificação para o nome «distribuição de fronteira» que se adoptou; o par (f_1, f_2) (que pode chamar-se uma função localmente analítica no complemento de K em relação à esfera de Riemann) tem um elemento de $A(K)'$ como sua distribuição de fronteira e, reciprocamente, todo o elemento de $A(K)'$ é a distribuição de fronteira de alguma função localmente analítica no complementar de K.

A teoria das distribuições de fronteira tem relações bastante íntimas com a das distribuições de Schwartz, que aliás me serviu de modelo.

Vê-se imediatamente que o espaço $E(K)$, constituído pelas funções indefinidamente deriváveis sobre K, contém o espaço $A(K)$, o qual é denso naquele; nestas condições toda a distribuição de Schwartz sobre K é uma distribuição de fronteira.

Surge agora naturalmente uma questão bastante interessante: quais serão as funções analíticas no interior de K que admitem, como singularidades na fronteira, distribuições de Schwartz?

A resposta é muito simples: são precisamente as funções de crescimento lento, isto é, as funções $f(z)$ para as quais existe um número natural k e uma constante N tais que

$$|f(z)|\leqslant\frac{N}{\delta^k(z)} \qquad \text{para } |z|<1,$$

representando por $\delta(z)$ a distância de z a K. Assim, as distribuições de Schwartz sobre K apresentam-se de certo modo, como generalização do conceito de polo, enquanto as distribuições de carácter mais irregular dariam uma generalização do conceito de ponto singular essencial.

E, reciprocamente, toda a distribuição de SCHWARTZ d sobre K é soma de duas outras, d_1 e d_2, que são distribuições de fronteira de duas funções de crescimento lento f_1 e f_2, sendo f_1 holomorfa no interior de K e f_2 holomorfa no exterior de K e nula no infinito.

Obtém-se assim uma correspondência biunívoca entre as distribuições de SCHWARTZ sobre K e as funções $(f_1(z), f_2(z))$ holomorfas em $\Omega - K$ e de crescimento lento. E esta correspondência é mesmo um isomorfismo algébrico do espaço $E(K)'$ das distribuições de SCHWARTZ sobre o espaço $P(\Omega - K)$ das funções localmente analíticas no complementar de K, o que significa que poderemos identificar as distribuições de SCHWARTZ com pares de funções analíticas.

Eis um ponto de vista que permite encarar muito concretamente as distribuições, não parecendo já tão singular a circunstância de que toda a distribuição sobre K seja indefinidamente diferenciável.

Se pensarmos agora em substituir K por uma recta g passando pela origem do plano complexo, a situação torna-se muito mais complicada: há distribuições de SCHWARTZ sobre g que não são distribuições de fronteira de nenhum par de funções analíticas. As relações precisas entre os dois tipos de distribuições não são conhecidas neste caso, a sua determinação constitui um interessante problema ainda não resolvido

Terá talvez interesse referir ainda que os resultados que obtive têm também uma certa importância para a teoria das séries de FOURIER.

SCHWARTZ demonstrou que uma série de FOURIER $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}$ tem por soma uma distribuição, se existe um número natural k e um $M > 0$ tais que

$$|a_n| \leqslant M\,|n|^k \qquad n = \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

No entanto, pela minha teoria, pode dar-se um sentido à soma de uma série de FOURIER, ainda quando os respectivos coeficientes satisfaçam às condições mais fracas:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{|n|} |a_n| < \infty \qquad k = 2, 3, \cdots.$$

A soma de uma tal série de FOURIER é um funcional linear sobre o espaço das funções periódicas analíticas sobre a recta.

Devo porém terminar.

Espero ter conseguido mostrar-vos que a teoria dos espaços localmente convexos, aparentemente tão abstracta, tem aplicações bastante concretas na Análise clássica, e que o estudo detalhado desses espaços abrirá novos campos de investigação na Análise funcional.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. BOURBAKI, *XIII*, Act. sci. et ind. **1175** (1952).

[2] C. L. DA SILVA DIAS, Tese de Concurso, São Paulo, (1951).

[3] J. DIEUDONNE, Ann. Ecole Norm. Sup. **59** (1942), 107-139.

[4] J. DIEUDONNE e L. SCHWARTZ, Ann. Inst. Fourier, **1** (1949), 61-101.

[5] A. GROTHENDIECK, Sur les espaces (F) et (DF). Summa Brasiliensis Math.

[6] A. GROTHENDIECK, Ann. Inst. Fourier, **4** (1952), 73-112.

[7] A. GROTHENDIECK, Journ. reine angew. Math., **192** (1953), 36-64, 77-94.

[8] G. KÖTHE, Math. Zeitschrift **51** (1948), 317-345.

[9] G. KÖTHE, Math. Nachrichten Berlin **4** (1951), 70-80.

[10] G. KÖTHE, Journ. reine angew. Math., **191** (1953), 30-49.

[11] G. KÖTHE, Math. Zeitschrift **57** (1952), 13-33.

[12] G. KÖTHE e O. TOEPLITZ, Journ. reine angew. Math. **171** (1934), 193-226.

[13] G. W. MACKEY, Trans. Am. Math. Soc. **57** (1945), 155-207.

[14] G. W. MACKEY, Trans. Am. Math. Soc. **60** (1946), 520-537.

[15] L. NACHBIN, Rev. de la Un. Mat. Argentina **12** (1947), 129-150.

[16] J. VON NEUMANN, Tans. Amer. Math. Soc. **37** (1935), 1-20.

[17] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions, Act. sci. et industr. **1091, 1122** (1950/1).

[18] J. SEBASTIÃO E SILVA, Portug. Math. **9** (1950), 1-130.

[19] J. SEBASTIÃO E SILVA, Portug. Math. **12** (1953), 1-46.

[20] H. G. TILLMANN, Math. Zeitschrift **59** (1953), 61-83.

[21] O. TOEPLITZ, Comm. Math. Helvetici **23** (1949), 222-242.

[22] J. V. WEHAUSEN, Duke Math. Journ. **1** (1938), 157-169.