Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions

par J. Sebastião e Silva

(Extrait d'un mémoire à paraître dans «Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa»)

Introduction

«[...] ce n'est qu'en donnant droit de cité à des éléments formels que plusieurs branches de l'Analyse ont pu avancer».
(V. VOLTERRA, *Leçons sur la composition*)

Le fait que toutes les fonctions ne soient pas dérivables est à l'origine d'une grande partie des complications que l'on trouve dans l'analyse réelle. La critique des fondements, entreprise surtout vers la fin du siècle XIX, a conduit à une délimitation précise entre ce qui *est permis* et ce qui *est défendu*. Mais le perfectionnement logique a entravé en quelque sorte l'imagination créatrice, et ce sont les «esprits indisciplinés» — surtout des physiciens, insoucieux de la rigueur mathématique et orientés plutôt vers la nature des questions concrètes – qui ont contribué, d'une façon plus efficace, à l'élargissement des cadres. Le calcul symbolique des électriciens, la mécanique ondulatoire, etc. ont introduit des êtres bizarres (comme la fonction δ de DIRAC et ses dérivées), dont la définition mathématique était dénuée de sens, mais qui, tout de même, servaient de base à des méthodes fructueuses. «Quand une telle situation contradictoire se présente» dit M. L. SCHWARTZ dans l'introduction de son ouvrage [17](1) «il est bien rare qu'il n'en résulte une théorie mathématique nouvelle qui justifie, sous une forme modifiée, le langage des physiciens; il y a même là une source importante de progrès des mathématiques et de la physique».

La théorie des distributions de SCHWARTZ n'a pas permis seulement de donner une justification complète à ces procédés audacieux: elle englobe et précise, en même temps, des conceptions hétérogènes qui poussaient, d'une façon plus ou moins affirmée, souvent incorrecte, dans plusieurs domaines des mathématiques: théorie des équations aux dérivées partielles, théorie de la série et de l'intégrale de FOURIER, topologie algébrique, etc. (voir [17], introduction). Elle s'impose donc comme une nécessité historique, et c'est ce qui explique, en partie, son rápide succès, surtout parmi la jeune génération.

La notion de distribution généralise la notion de fonction, comme, par exemple, la notion de nombre complexe généralise celle de nombre réel. Il s'agit là de phénomènes très semblables. Lorsqu'une opération est impossible en certains cas, il y a une tendance naturelle à enfreindre l'ordre établi, en continuant à opérer formellement, suivant des règles de calcul qui sont valables (parfois avec des restrictions) dans le domaine classique. Cela peut ne conduire à rien d'autre qu'à des erreurs ou des contradictions; mais, quelques fois, on parvient de cette manière à un ordre nouveau—plus riche et plus harmonieux.

Pour construire une théorie des nombres réels ou des nombres complexes, on peut suivre plusieurs orientations: il y a pour cela des méthodes synthétiques, des méthodes analytiques et des méthodes axiomatiques.

Pour construire sa théorie des distributions, M. SCHWARTZ a choisi le point de vue fonctionnel (que l'on pourrait aussi nommer synthétique): il présente les distributions comme fonctionnelles linéaires continues dans certains espaces de fonctions indéfiniment dérivables. Mais, en vérité, les premières tentatives pour créer une théorie des distributions suivent l'orientation formelle ou axiomatique, d'une façon plus ou moins consciente. A propos des méthodes de BOCHNER dans l'étude de l'intégrale de FOURIER, où «l'introduction des distributions est inévitable, sous une forme directe ou camouflée», SCHWARTZ observe (loc. cit.): «Les «distributions» de BOCHNER sont, au fond, définies comme dérivées de fonctions continues n'ayant pas nécessairement de dérivée usuelle; notre théorème XXI du chapitre III exprime justement qu'une distribution est, localement, une dérivée d'une fonction continue. Il nous paraît bien préférable d'avoir cette propriété plutôt comme théorème que comme définition (à cause de l'indétermination de l'ordre de dérivation et de la fonction continue, sourtout pour plusieurs variables)».

Eh bien, nous nous proposons de donner ici une définition du concept de distribution, au moyen d'un système d'axiomes, qui revient à concevoir une distribution, au point de vue local, précisément comme une «dérivée formelle» d'une fonction continue. On verra par la suite comment il est possible d'obvier à l'inconvénient de l'indétermination, signalé par M. SCHWARTZ. On réussit alors, il nous semble, à rendre

(1) Les numéros entre crochets se rapportent à la Bibliographie, qui se trouve à la fin de cet article.

plus accessibles les fondements de la théorie et on obtient une méthode plus directe pour s'attaquer à plusieurs problèmes.

Il faut remarquer que la possibilité d'une construction directe, purement formelle, de la théorie des distributions avait déjà été indiquée par M. H. König dans sa Thèse, [14]. Toutefois ce travail, tout en étant décisif, n'est pas encore définitif, dans cette ligne de recherches qu'il a ouverte d'une façon remarquable. En effet, M. König ne donne pas une vraie axiomatique des espaces de distributions (c'est-à--dire, un ensemble d'axiomes définissant ces espaces à moins d'un isomorphisme), bien qu'il ait déjà tous les éléments pour le faire: il construit, pour chaque ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, une structure formelle munie de notions de «somme», «dérivées» et «limites de suites» et il démontre que cette structure est isomorphe à l'espace des distributions dans Ω. D'autre part, l'étude topologique de ces espaces n'est pas encore approfondie dans [14], ce qui ne permet pas de voir la possibilité de refaire entièrement la théorie des distributions, d'aprés ce point de vue.

Notre idée initiale a été indépendante de celle de König, mais il faut bien dire que la lecture de son travail nous a influencé en plusieurs points; d'ailleurs, bien que nos méthodes soient différentes, la source en est la même: elles sont directement suggérées par l'oeuvre de M. Schwartz. En vérité, on ne fait que renverser l'ordre logique établi dans [17], en choisissant pour points de départ certaines propositions qui, dans cet ouvrage, se présentent comme des théorèmes, des résultats: M. König s'est inspiré au th. XXX, tandis que nous avons choisi le th. XXI (déjà cité) et le principe du recollement des morceaux (th. IV).

Le principe heuristique qui nous a guidé dans les recherches est celui de la conservation des règles de calcul. Soient $f, g, \cdots$ des symboles de fonctions continues de n variables réelles, définies dans un intervalle Q de $\mathbf{R}^n$; si l'on se tient à la définition habituelle de dérivée, les expressions $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}, \cdots$ n'auront pas de sens en général. Mais on trouve une situation analogue à propos de l'expression $\sqrt{a}$, qui n'a pas de sens, dans le domaine réel, pour $a<0$; et on sait que, si l'on opère sur les expressions de ce type suivant les régles usuelles (avec quelques modifications en ce qui concerne les radicaux), on n'arrive jamais à une contradiction: c'est là l'origine du concept de nombre complexe.

De même, on peut opérer sur les dérivées formelles suivant certaines règles («la dérivée d'une somme est la somme des dérivées», «il est permis d'intervertir l'ordre des dérivations», etc.), sans jamais se heurter à une contradiction. Seulement, pour que ce cacul puisse être utile, il faut choisir une définition convenable d'égalité pour les dérivées formelles (ou mieux, d'équivalence, pour les expressions considérées). D'abord, on doit rappeler que, pour chaque fonction continue f et chaque indice i, il existe une infinité de fonctions F telles $f = D_{x_i} F$ (au sens usuel), deux d'entre elles différant toujours d'une fonction indépendante de x_i. Alors, si l'on a, par exemple, deux symboles de derivation D_{x_i}, D_{x_k}, avec $i \neq k$, et deux fonctions continues f, g, il sera toujours possible de trouver deux fonctions F, G, telles que l'on puisse écrire, formellement, $D_{x_i} f = D_{x_i} D_{x_k} F$, $D_{x_k} g = D_{x_i} D_{x_k} G$. En raisonnant de la sorte, on s'aperçoit que, en général, deux dérivées formelles peuvent toujours être ramenées à la forme de dérivées avec un même symbole composé de dérivation. (On observe un fait semblable avec les fractions numériques: deux nombres rationnels peuvent toujours être représentés par des fractions avec un dénominateur commun. Cette analogie n'est pas accidentale: elle nous a fourni les premières intuitions décisives; nous avons pris pour modèle la théorie analytique des nombres rationnels). Considérons le symbole composé de dérivation $D^{\mathbf{p}} = D_{x_1}^{p_1} D_{x_2}^{p_2} \cdots D_{x_n}^{p_n}$. Si l'on veut que les règles usuelles soient conservées, on devra considérer $D^{\mathbf{p}} f = D^{\mathbf{p}} g$, si (et seulement si) $D^{\mathbf{p}}(f-g) = 0$. On est donc ramené à fixer, pour chaque n-uple $\mathbf{p}$ d'entiers, l'ensemble des fonctions continues Θ vérifiant $D^{\mathbf{p}} \Theta = 0$. Il n'est pas difficile de voir que cet ensemble [que nous désignons par $\hat{N}(D^{\mathbf{p}})$] *doit contenir* toutes les fonctions de la forme (1.1) (§ 1, n.º 1); d'autre part, il est naturel de se borner à ces fonctions[1]. Avec le choix des ensembles $\hat{N}(D^{\mathbf{p}})$ le critère d'égalité pour les dérivées formelles reste fixé et l'on obtient les premières distributions dans l'intervalle Q de $\mathbf{R}^n$, sous la forme de classes d'équivalence d'expressions du type considéré [2].

Mais il faut que les distributions ressemblent le plus possible aux fonctions — spécialement aux fonctions indéfiniment dérivables. On définit une fonction dans un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, en faisant correspondre un nombre à chaque point $\mathbf{x}$ de Ω. Cela n'est plus possible, en général, pour les distributions. Mais on peut se demander ce que doit devenir une distribution T dans un voisinage $V_{\mathbf{x}}$ de chaque point $\mathbf{x}$ de

(1) Voir la note qui se trouve après la Bibliographie.

(2) Cette définition d'égalité ne figure pas d'une façon explicite, dans l'ouvrage de Schwartz. Les ensembles de fonctions que nous désignons ici par les notations $\hat{N}(D^{\mathbf{p}})$ jouent déjà un rôle essentiel dans la Thèse de König.

son domaine Q — c'est-à-dire, ce que l'on doit entendre par *restriction* de T à un intervalle $Q^* \subset Q$. Or, il est déjà possible de définir, d'une façon assez naturelle, un concept de restriction d'une distribution, en exigeant que certaines règles soient conservées, spécialement celle-ci: «La restriction d'une dérivée $D^{\mathbf{p}}$ est la dérivée $D^{\mathbf{p}}$ de la restriction». Et finalement, pour rapprocher le concept de distribution de celui de fonction on est porté à introduire la règle suivante, que M. SCHWARTZ a nommé suggestivement le *principe du recollement des morceaux:* «On définit une distribution T dans un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, lorsqu'on fait correspondre, à chaque point $\mathbf{x}$ de Ω, une distribution $T_{\mathbf{x}}$ définie dans un voisinage $V_{\mathbf{x}}$ de $\mathbf{x}$, de façon que ces distributions coïncident dans les parties communes de leurs domaines; la restriction de T à $V_{\mathbf{x}}$ sera $T_{\mathbf{x}}$ pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$». Mais alors une distribution dans Ω ne sera plus, en géneral, une dérivée d'une fonction continue dans Ω! Seulement dans un voisinage convenable de chaque point de Ω on laissera subsister cette propriété.

Voilà, en peu de lignes, la génèse de l'axiomatique que nous présentons au n.° 14 et que l'on pourra lire tout de suite, sans préparation. Il est à souligner que, dans cette axiomatique, on n'a employé aucune structure topologique des espaces de distributions. Pour définir le concept de distribution on n'a besoin que de considérations algébriques

Il s'agit là, tout d'abord, d'un problème d'extension algébrique, que l'on est induit à poser et à résoudre sous une forme très générale, suivant les méthodes de l'algèbre abstraite. Cela explique l'orientation que nous avons choisie, le caractère abstrait des considérations des n.^{os} 1, 2, 5 et 7. Nous aurions pu rendre beaucoup plus légère la rédaction du § 1 (et d'une partie du § 2), si nous avions renoncé a cette généralité. Mais nous avons préféré cette orientation, d'une part, parce que nous l'avions suivie effectivement dans nos recherches, et d'autre part, parce qu'on ne sait jamais si d'autres applications ne seront pas possibles.

Le résultat central est le théorème 1, qui, en particulier, sert à justifier le calcul des dérivées formelles que nous avons esquissé ci-dessus (distributions d'ordre fini). Ensuite, le besoin de définir la notion de restriction nous a conduit, dans le même ordre d'idées, au théorème général d'homomorphisme (th. 2). La notion de limite projective algébrique de groupes (n.° 7) a été introduite pour définir la notion de distribution d'ordre arbitraire (fini ou infini), dans un ouvert quelconque de $\mathbf{R}^n$. Enfin, la notion de produit multiplicatif est définie au n.° 9 d'une façon formelle, d'après les idées de KÖNIG dans [14].

Dans le § 2 nous étudions le problème de l'introduction de topologies convenables dans les espaces de distributions et nous obtenons des resultats qui nous semblent essentiellement nouveaux. M. SCHWARTZ avait introduit, dans l'espace $(\mathfrak{D}')$ des distributions dans $\mathbf{R}^n$, la topologie forte par rapport à l'espace $(\mathfrak{D})$, des fonctions indéfiniment dérivables à support compact, dont $(\mathfrak{D}')$ est le dual; il ne s'est pas préoccupé de définir cette topologie *directement*, sans recourir à l'espace $(\mathfrak{D})$. Mais dans [17] il donne des critères directs pour les limites des suites et une caractérisation des ensembles bornés dans $(\mathfrak{D}')$. Avec ces ressources et quelques résultats contenus dans le mémoire [10] de DIEUDONNÉ-SCHWARTZ (prop. 14 et th. 5) il ne manquait plus rien pour la définition directe de cette topologie, si ce n'est le concept général de limite inductive d'espaces localement convexes, qui a été considéré seulement plus tard.

Pour introduire et étudier la topologie des espaces de distributions, nous utilisons un résultat (th 7) que nous avions déjà signalé dans [20], à propos de certains espaces fonctionnels analytiques, très semblables aux espaces de distributions $\mathfrak{C}_\omega(\Delta)$ ici considérés. Le th. 7, avec le théorème de ASCOLI sur les familles de fonction équicontinues, nous donne la clef de la question topologique dans les espaces de distributions.

En particulier, nous montrons (n.° 20) que la considération des limites de suites est suffisante pour déterminer la topologie de ces espaces (prop. 18 et son corollaire). Cette remarque nous semble assez importante, puisque, pour les applications, on pourra se borner à la notion de limite d'une suite, plus accessible aux techniciens que celle d'un filtre convergent quelconque, employée par M. SCHWARTZ.

Enfin, dans le § 3, nous cherchons les espaces duals topologiques des espaces de distributions et nous retrouvons les espaces de fonctions indéfiniment dérivables d'où M. SCHWARTZ est parti pour construire sa théorie. À cet effet, nous employons des méthodes parfaitement analogues à celles que nous avions déjà suivies dans notre systématisation de la théorie des fonctionnelles analytiques (voir [19]) et qui peuvent également servir pour la recherche des applications linéaires continues d'un espace de distributions dans un espace localement convexe quelconque. Cette recherche est en rapport direct avec l'étude des *noyaux distributions* (voir [18]) et, en particulier, avec le concept de *produit de composition*. Nous indiquons aux 21, 22 et 25 les premiers résultats dans cette direction. Il s'agit essentiellement de caractérier certaines fonctions indéfiniment dérivables, à valeurs dans un espace fonctionnel donné. Avec cette orientation, l'analogie entre la théorie des distributions et la théorie des fonctionnelles analytiques se révèle très étroite, plus encore que l'on pourrait l'imaginer après les travaux [15], [16], [13], [22] et [23], de Köthe, Grothendieck, Silva Dias et Tillmann.

Mais il y a plusieurs classes importantes de distributions (distributions à support compact, distributions bornées, distributions tempérées, etc.), comme il y a plusieurs classes de fonctions (fonctions continues, fonctions à carré sommable, etc.). Et, pour chacune de ces classes de distributions (comme pour chacune de ces classes de fonctions), il existe une structure topologique, spécialement indiquée. Il s'agirait donc, maintenant, de faire l'étude *directe* de ces espaces particuliers de distributions, dont M. Schwartz a fait des applications profondes. Nous nous bornons à esquisser cette étude pour les espaces de distributions à support compact (n.° 26).

Il reste aussi à examiner le cas des distributions dans une variété indéfiniment différentiable quelconque. Nous croyons que dans ce cas on devra faire un usage plus étendu du principe du recollement des morceaux, avec les méthodes de la topologie algébrique.

Nous tenons à remercier ici vivement Monsieur G. Köthe de l'aide précieuse qu'il a bien voulu nous prêter, soit en nous faisant connaître la Thèse de König après que nous avons obtenu nos premiers résultats, soit en nous renseignant sur plusieurs points de la théorie des espaces localement convexes, soit encore en acceptant de faire la revision critique de notre manuscrit qui a pu être amélioré en plusieurs points après ses remarques, surtout dans l'analyse logique du n.° 11.

Nous tenons aussi à remercier vivement Monsieur L. Schwartz des renseignements et des conseils éclairés qu'il a été bien aimable de nous donner. C'est lui qui, dans une lettre, nous a suggéré le «recollement des morceaux» comme moyen pour gagner les distributions d'ordre infini en partant des distributions d'ordre fini. Nous avions essayé de le faire par complétion topologique, ce qui est possible, mais moins naturel.

....

....

[§ 1, n.° 14] Définition axiomatique du concept de distribution dans un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Nous sommes parvenus au point de pouvoir formuler une axiomatique des distributions, en termes de «fonctions continues», «domaine de existence», «restriction», «addition» et «dérivations». L'universe logique, pour cette axiomatique, sera l'ensemble de toutes les distributions définies dans des ouverts Ω de $\mathbf{R}^n$. Notre axiomatique se compose des 8 axiomes suivants:

Axiome 1 — *Toute fonction complexe, définie et continue dans un ouvert de* $\mathbf{R}^n$, *est une distribution.*

Axiome 2 — *À chaque distribution* T *correspond un ouvert* Ω *de* $\mathbf{R}^n$, *nommé le* **domaine d'existence** *(ou seulement le* **domaine***) de* T, *de façon que, si* T *est une fonction continue, le domaine de* T *est le domaine d'existence de cette fonction au sens usuel.*

Axiome 3 — *Il existe une opération, nommée addition, qui, à chaque couple de distributions* T_1, T_2, *à domaine* Ω *commun, fait correspondre une distribution de domaine* Ω, *nommée la* **somme de** T_1 **avec** T_2 *et notée* T_1+T_2 *de façon que, si* T_1 *et* T_2 *sont des fonctions continues,* T_1+T_2 *est la somme de ces fonctions au sens usuel.*

Axiome 4 — *À chaque distribution* T *de domaine* Ω *et à chaque indice* $i=1,2,\cdots,n$, *correspond une distribution de domaine* Ω, *nommée la* **dérivée partielle de** T **par rapport à** x_i *et notée* $D_{x_i}T$ *de façon que*: I) *si* T *est une fonction qui admet dérivée partielle par rapport à* x_i, *continue dans* Ω *(au sens usuel)*, $D_{x_i}T$ *coïncide avec cette dérivée;* II) *si* T *et* U *sont deux distributions à domaine commun, on a* $D_{x_i}(T+U) = D_{x_i}T + D_{x_i}U$, *pour* $i=1,\cdots,n$; III) $D_{x_i}D_{x_k}T = D_{x_k}D_{x_i}T$, *quels que soient la distribution* T *et les indices* i, k.

Axiome 5 — *À chaque distribution* T *de domaine* Ω *et à chaque ouvert* $\Omega_1 \subset \Omega$, *correspond une distribution* T_{Ω_1} *de domaine* Ω_1, *nommée la* **restriction de T à** Ω_1, *de façon que:* I) *si* T *est une fonction continue,* T_{Ω_1} *est la restriction de cette fonction à* Ω_1, *au sens usuel;* II) *si* Ω_2 *est une partie ouverte de* Ω_1, *on a* $(T_{\Omega_1})_{\Omega_2} = T_{\Omega_2}$, *pour toute distribution* T *de domaine* Ω; III) $(T+U)_{\Omega_1} = T_{\Omega_1} + U_{\Omega_1}$, *pour tout couple de distributions* T, U *de domaine* Ω; IV) $(D_{x_i}T)_{\Omega_1} = D_{x_i}T_{\Omega_1}$ *quels que soient la distribution* T *dans* Ω *et l'indice* i.

Axiome 6 — (Principe du recollement des morceaux) *Si, étant donné un ouvert* Ω *de* $\mathbf{R}^n$, *on fait correspondre, à chaque* $\mathbf{x} \in \Omega$, *un voisinage ouvert* $\Omega_\mathbf{x}$ *de* $\mathbf{x}$ *et une distribution* $T_\mathbf{x}$ *de domaine* $\Omega_\mathbf{x}$, *de façon que, si les voisinages* $\Omega_\mathbf{x}, \Omega_\mathbf{y}$ *de deux points* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *de* Ω *ont une intersection non vide, les restrictions de* $T_\mathbf{x}$ *et* $T_\mathbf{y}$ *à* $\Omega_\mathbf{x} \cap \Omega_\mathbf{y}$ *coïncident, alors il existe une (et seulement une) distribution* T *de domaine* Ω, *dont la restriction à* $\Omega_\mathbf{x}$ *est* $T_\mathbf{x}$, *quel que soit* $\mathbf{x} \in \Omega$.

Conventions — Si $\mathbf{p}$ est une n-uple quelconque $(p_1, \cdots, p_n)$ de *nombres entiers non négatifs*, nous posons $D^{\mathbf{p}} = D_{x_1}^{p_1} \cdots D_{x_n}^{p_n}$, où $D_{x_i}^{p_i}$ désigne la p_i-ième puissance de l'opérateur D_{x_i} $(i=1, \cdots, n)$. Étant donnés $\mathbf{p} = (p_1, \cdots, p_n)$ et $\mathbf{q} = (q_1, \cdots, q_n)$, on écrit $\mathbf{p} \leqslant \mathbf{q}$ comme abréviation de $p_1 \leqslant q_1, \cdots, p_n \leqslant q_n$. Nous disons qu'une distribution T est *indépendante* de x_i si sa dérivée $D_{x_i} T$ est nulle $(i=1, \cdots, n)$.

AXIOME 7 — *Pour toute distribution* T *et tout intervalle* Q *de* $\mathbf{R}^n$, *ouvert et borné, dont l'adhérence est contenue dans le domaine de* T, *il existe une fonction* f(x) *définie et continue dans* Q, *et une* n-*uple* $\mathbf{p}$, *tels que* $\mathrm{T} = \mathrm{D}^{\mathbf{p}} \mathrm{f}$.

AXIOME 8 — *Si* T *est une distribution indépendante de* x_i *ayant pour domaine un intervalle* Q *de* $\mathbf{R}^n$ *et si l'on a* $\mathrm{T} = \mathrm{D}^{\mathbf{p}} \mathrm{f}$, f *étant une fonction définie et continue dans* Q *et* $\mathbf{p}$ *une n-uple d'entiers, il existe une autre n-uple* $\dot{\mathbf{p}} \leqslant \mathbf{p}$ *et une fonction* $\dot{\mathrm{f}}$ *continue dans* Q, *indépendante de* x_i *au sens usuel, telles que* $\mathrm{T} = \mathrm{D}^{\dot{\mathbf{p}}} \dot{\mathrm{f}}$ $(\mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{n})$.

L'analyse développée dans tous les n.$^{\text{os}}$ précédents nous permet d'établir que cette axiomatique est *compatible* et *catégorique*; c'est-à-dire : *a*) elle admet au moins une réalisation; *b*) deux réalisations de cette axiomatique sont nécessairement isomorphes.

....

....

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOCHNER, *Vorlesungen über Fouriersche Integral*, Leipzig (1932).

[2] N. BOURBAKI, *Théorie des ensembles*, Act. Scient. Ind., n.$^{\text{os}}$ 846–1141, Hermann, Paris (1951).

[3] ——, *Topologie générale*, chapitres I–II, Act. Scient. Ind., n.$^{\text{os}}$ 858 — 1142, Hermann, Paris (1934).

[4] ——, *Topologie générale*, chapitre IX Act. Scient. Ind., n.° 1045, Hermann, Paris (1948).

[5] ——, *Topologie générale*, chapitre X, Act. Scient. Ind., n.° 1045, Hermann, Paris (1949).

[6] ——, *Algèbre*, chapitre II, Act. Scient. Ind., n.° 1032, Hermann, Paris (1947).

[7] ——, *Espaces vectoriels topologiques*, chapitres I – II, Act. Scient. Ind., n.° 1189, Hermann, Paris (1953).

[8] ——, *Intégration*, chapitres I–IV, Act. Scient. Ind., n.° 1175, Hermann, Paris (1952).

[9] J. DIEUDONNÉ, *Recent developments in the theory of locally convex vector spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 59 (1953), pp. 495-512.

[10] J. DIEUDONNÉ et L. SCHWARTZ, *La dualité dans les espaces* (*F*) *et* (*LF*), Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 1 (1949), pp. 61-101 (1950).

[11] R. L. GOMES, *Integral de Lebesgue-Stieltjes*, Junta de Investigação Matemática, Porto (1952).

[12] A. GROTHENDIECK, *Sur les espaces* (*F*) *et* (*DF*), à paraître dans Summa Bras. Math.

[13] ——, *Sur certains espaces de fonctions holomorphes*, J. Reine Angew. Math., vol. 192 (1953), pp. 35-64 et 77-95.

[14] H. KÖNIG, *Neue Begründung der Theorie der «Distributionen» von L. Schwartz*, Math. Nachrichten, vol. 9 (1953), pp. 129-148.

[15] G. KÖTHE, *Dualität in der Funktionentheorie*, J. Reine Angew. Math., vol. 191 (1953) pp. 29-49.

[16] ——, *Die Randverteilungen analytischer Funktionen*, Math. Zeitschr., vol. 57 (1952), pp. 13-33.

[17] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, I, II, Act. Scient. Ind., n.° 1091, Hermann, Paris (1950).

[18] ——, *Théorie des noyaux*, Proc. Int. Cong. Math. 1950, pp. 220-230.

[19] J. SEBASTIÃO E SILVA, *As funções analíticas e a análise funcional*, Thèse, 1948 (Port. Math. 1950).

[20] ——, *Sui fondamenti della teoria dei funzionali analitici*, Port. Math. vol. 12 (1953), pp. 1-46.

[21] ——, *Su certi spazi localmente convessi importanti per le applicazioni*, à paraître dans Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma.

[22] C. DA SILVA DIAS, *Espaços vectoriais topológicos e sua aplicação na teoria dos espaços funcionais analíticos*, Thèse, Univ. São Paulo (1951).

[23] H. — G. TILLMANN, *Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen*, Math. Zeitschr., vol. 59, pp. 61-83 (1953).

[24] A. WEIL, *L'intégration dans les groupes topologiques*, Act. Scient. Ind., n.° 869, Hermann, Paris, (1940).

NOTE — Pour chaque n-uple $\mathbf{p} = (p_1, \cdots, p_n)$ d'entiers, l'ensemble $\hat{N}(D^{\mathbf{p}})$, dont il est question dans l'introduction (lorsqu'il s'agit de définir l'égalité de deux dérivées formelles), est constitué par les fonctions Θ de la forme

$$\Theta(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=0}^{p_1-1} x_1^{\nu} \gamma_{1,\nu}(\mathbf{x}) + \sum_{\nu=0}^{p_2-1} x_2^{\nu} p_{2,\nu}(\mathbf{x}) + \cdots + \sum_{\nu=0}^{p_n-1} x_n^{\nu} p_{n,\nu}(\mathbf{x}),$$

où $\gamma_{i,\nu}(\mathbf{x})$ est une fonction continue indépendante de x_i $(i=1, \cdots, n, \nu=0, 1, \cdots, p_i-1)$. L'axiome 8 permet d'établir que ces fonctions sont toutes les solutions possibles de l'équation $D^{\mathbf{p}} T = 0$, lorsque l'inconnue est une fonction continue.