MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — MATEMÁTICAS GERAIS — 2.º Exame de Frequência, 1952-53.

3826 — Calcular k de modo que o sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 4y - 5z = 0 \\ 3x + ky + 2z = 0 \end{cases}$$

tenha soluções não nulas, e determinar essas soluções.

R: $k = 3/13$. *Soluções:* $x = -7\,C/9$, $y = 13\,C/9$ *e* $z = C$, *com* C *qualquer.*

3827 — Estudar e representar gràficamente a função

$$y = 1/(x^2 - x - 2).$$

R: *Pontos de descontinuidade* $x = -1$ *e* $x = 2$, *em que* y *se torna infinita com mudança de sinal* ($y > 0$ *para* $x < -1$, *e* $x > 2$; *e* $y < 0$ *para* $-1 < x < 2$). *A função tem um máximo* $M = -4/9$ *para* $x = 1/2$. *Não há pontos de inflexão, e além das duas já indicadas há ainda a assíntota* $y = 0$.

3828 — Calcular a área limitada pela curva $y = 1/+\sqrt{x}$, pelos eixos coordenados e pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

R: $2\sqrt{b} - \dfrac{1}{a}$.

3829 — Demonstrar o teorema de LAGRANGE.

3830 — Demonstrar a regra para a derivação de um determinante de terceira ordem, quando os seus elementos são funções de uma variável x.

Soluções dos n.os 3826 a 3828 de L. M. de Albuquerque

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 1.º Exame de Frequência — 8 de Abril de 1954

3831 — Dadas as circunferências $C_1)$ $(x - \alpha)^2 + (y-2)^2 = 5$ e $C_2)$ $(x+1)^2 + (y+2)^2 = R^2$ resolva os seguintes problemas:

a) Determine α e R por forma que a recta $Y = \dfrac{X}{2}$ seja tangente comum a C_1 e C_2. Determine também as coordenadas dos pontos de tangência.

b) Sendo $R = \sqrt{5}$, determine α por forma que C_1 e C_2 sejam tangentes exteriormente. Escreva a equação da tangente comum no ponto de contacto de C_1 e C_2.

R: *As distâncias dos centros à recta, iguais aos respectivos raios:* $R^2 = \left(\dfrac{-4+1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \dfrac{9}{5}$, $R = +\dfrac{3}{\sqrt{5}}$; $\left(\dfrac{4-\alpha}{\sqrt{5}}\right)^2 = 5$, $4 - \alpha = \pm 5$.

Como os raios são iguais e as circunferências tangentes exteriormente, a distância entre os centros é igual à soma dos raios $(\alpha+1)^2 + 16 = (2\sqrt{5})^2 = 20$, $(\alpha+1)^2 = 4$ $\alpha + 1 = \pm 2$.

A recta que une os centros tem a equação $\dfrac{Y-2}{4} = \dfrac{X-\alpha}{\alpha+1} = \dfrac{X \mp 2 + 1}{\pm 2}$ *e o seu coeficiente angular é* $\pm\dfrac{4}{2} = \pm 2$.

Sendo os raios iguais as circunferências têm contacto no ponto médio do segmento que une os centros: $\xi = \dfrac{\alpha+1}{2}$ $\eta = \dfrac{4}{2} = 2$ *ou* $\xi = \dfrac{\mp 2 - 1 + 1}{2} = \pm 1$, $\eta = 2$.

A equação da tangente: $Y - 2 = \mp\dfrac{1}{2}(X \mp 1)$.

3832 — Defina conjunto fechado. Pode ser fechado o conjunto (u_n) dos valores dos termos duma sucessão? Porquê?

Prove que todo o ponto de acumulação de (u_n) é limite de subsucessões da sucessão u_n. Se na sucessão u_n não há termo indefinidamente repetido e o conjunto (u_n) tem um ponto de acumulação c, menor do que todos os outros, que é c em relação à sucessão u_n, e também em relação ao conjunto dos pontos de acumulação de (u_n)? Poderá haver um número infinito de termos u_n inferiores a $\underline{\lim}\, u_n$? e inferiores a $K < \underline{\lim}\, u_n$? justifique as suas respostas.

Sendo $u_n = \dfrac{e^{1+\frac{1}{n}} - e}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1}$ e $v_n = 1 - \sqrt[n]{\log n}$ calcular $\lim\limits_{n=\infty} u_n$, $\lim\limits_{n=\infty} v_n$; escolher α por forma que o conjunto $[u_n, v_n, 0, 1]$ seja fechado.

R: *Todo o ponto de acumulação de* (u_n) *é sub-limite de* u_n; *portanto* c *sendo o menor dos pontos de acumulação é um sub-limite, e é o menor dos sub-limites, porque não pode haver outro sub-limite menor, por não haver termo indefinidamente repetido.*

Em relação ao conjunto dos pontos de acumulação de

(u_n), e *é o mínimo (limite inferior de* WEIERSTRASS *que pertence ao conjunto).*

$$\frac{e\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1}=\frac{e\left(1+\frac{\xi_n}{n}-1\right)}{1+\frac{\gamma_n}{n}-1}=e\,\frac{\xi_n}{\gamma_n};$$

$$\lim_{n=\infty} u_n=e\cdot\frac{\lim\limits_{n=\infty}\xi_n}{\lim\limits_{n=\infty}\gamma_n}=e\cdot\frac{1}{\alpha}$$

$$\frac{\log(n+1)}{\log n}=\frac{\log n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}=\frac{\log n+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}=1+$$

$$+\frac{\xi_n}{n\log n} \quad \textit{com} \quad \lim_{n=\infty}\xi_n=1\,.$$

Ora, se $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *tem limite* $(u_n>0)$ *também* $\sqrt[n]{u_n}$ *tem limite que é igual; resulta pois* $\lim\limits_{n=\infty} v_n=0$.

Para que o conjunto $[u_n, v_n, 0, 1]$ *contenha* $\frac{e}{\alpha}$ *deverá ser* $\alpha=e$.

3833 — Sendo $\sum a_n$ uma série de termos positivos, onde $a_n \to 0$, prove que a divergência de $\sum a_n^2$ implica a divergência de $\sum a_n$; a convergência de $\sum a_n^2$ implica a convergência de $\sum a_n\sqrt{\frac{a_n}{n}}$.

Prove que associando termos consecutivos numa série convergente, se obtém uma série ainda convergente e com a mesma soma. Verifique a proposição associando dois a dois os termos de $\sum\limits_0^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$. Considerando a mesma série, altere-se a ordem dos termos do seguinte modo $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+$ $+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2(2n+1)}-$ $\frac{1}{2(2n+2)}+\cdots$; some-se, em seguida, cada termo positivo com o termo negativo seguinte, obtendo-se $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots$. Mostre que se manteve a convergência mas que se alterou a soma. Justifique este resultado, enunciando os princípios teóricos que julgue necessários.

R: *Como* $a_n \to 0$, *a partir de certa ordem teremos*

$$1>a_n>a_n^2>a_n^3>\frac{a_n^3}{n}>\sqrt{\frac{a_n^3}{n}}\,.$$

Na série $\sum\limits_0^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$ *temos:* $S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-$ $-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$ *e na série* $\sum\limits_1^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$, *que se obtem da anterior associando-lhe os termos dois a dois, temos* $\sigma_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+$ $+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$.

Vê-se que é $S_{2n}=\sigma_n$, *e portanto se existe* $\lim\limits_{n=\infty} S_{2n}=S$ *também existe* $\lim\limits_{n=\infty}\sigma_n$, *e este limite é igual ao primeiro.*

A série donde se partiu é convergente: $\sum\limits_0^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$; *a série a que se chegou depois de efectuar as transformações indicadas, é:* $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots=$ $=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right)=\frac{1}{2}\cdot\sum\limits_0^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$; *logo, conservou-se visìvelmente a convergência, mas alterou-se a soma.*

3834 — Seja $f(x)=(x-a)\,\varphi(x)$, $f(a)=0$, uma função contínua no intervalo (a,b). Se $\varphi(a+0)=$ $=+\infty$, $\varphi(x)$ admitir derivada finita para todos os pontos de (a,b) e $\varphi(b)=\varphi'_e(b)=0$, prove que $f(x)$ tem derivada de a a b e que essa derivada passa por todos os valores positivos.

Sendo $F(x)=(x-c)\,\theta(x)$, com $\theta(x)$ contínua em $x=c$, qual deve ser o valor $\theta(c)$ para que $|F(x)|$ tenha derivada em $x=c$? No caso em que não existe derivada, indique os valores das derivadas laterais de $|F(x)|$ em $x=c$.

Defina em $x=0$ a função $g(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}+x+1}$ de forma que ela fique contínua nesse ponto. A função é contínua no conjunto fechado $(0,+\infty)$? Porquê?

Calcule $g'_d(0)$ e $g'_e(0)$. Há derivada no ponto $x=0$?

R: $f(x)$ *é contínua em* (a,b) *e por ser* $f'(x)=$ $=\varphi(x)+(x-a)\,\varphi'(x)$ *vê-se que* $f'(x)$ *existe finita em* (a,b); $f(x)$ *é uma função regular em* (a,b).

É $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\varphi(x)$ *e quando* x *tende para* a *por valores maiores, vem:* $f'_d(a)=+\infty$. *Podemos escrever* $f'_e(x)=\varphi(x)+(x-a)\,\varphi'_e(x)$ *o que dá:* $f'_e(b)=0$.

A derivada duma função regular não passa dum valor a outro sem passar por todos os valores intermédios.

Temos $\frac{|F(x)|-|F(c)|}{x-c}=\frac{|x-c|\cdot|\theta(x)|}{x-c}$ *visto que, por ser* $\theta(x)$ *contínua no ponto* $x=c$, *vem* $F(c)=0$.

Calculando os limites laterais desta fracção obtemos

$\pm|\theta(c)|$ *e temos assim os valores das derivadas laterais. Para haver derivada no ponto* c *deverá ser* $\theta(c)=0$.

Dividindo ambos os membros de $g(x)$ *por* $e^{\frac{1}{x}}$, *vem:* $\lim\limits_{x=0} g(x)=1$, *faça-se pois* $g(0)=1$ *para a função ficar contínua.*

A função é contínua no intervalo fechado $(0,+\infty)$ *porque, já se definiu com continudiade para* $x=0$, *é contínua em todos os pontos interiores, e é contínua para* $x=+\infty$, *porque existe finito o* $\lim\limits_{x=\infty} g(x)=0$.

Visto que $g(0)=1$, *vem:*
$$\frac{g(x)-g(0)}{x}=-\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}+x+1}$$
e então é: $g'_e(0)=-1$, $g'_d(0)=0$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **Exame final — 15 de Outubro de 1953.**

3835 — Determine a constante k por forma que a função $y=x^2.e^{-x}+k$ tenha 2 por valor mínimo e determine as assíntotas da sua imagem.

Desenvolva depois a função em série inteira na vizinhança do ponto $x=1$.

R: *A derivada é* $y'=-x(x-2)e^{-x}$.

x		0		2	
y	↘	$=2$ m	↗	M	↘
y'	$-$	0	$+$	0	$-$

$k=2$ *porque para* $x=0$ *deverá ser* $y=2$. *O mínimo é absoluto visto que* $\lim\limits_{x=+\infty} x^2e^{-x}+2=2$.

Para desenvolver em série faça-se

$$y=2+e^{-1}\left[e^{-(x-1)}+2(x-1)e^{-(x-1)}+(x-1)^2e^{-(x-1)}\right].$$

Ora de $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$

vem $e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots$

donde
$$e^{-(x-1)}=1-(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2!}-\frac{(x-1)^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{n!}+\cdots$$

$$2(x-1)e^{-(x-1)}=2(x-1)-2(x-1)^2+2\frac{(x-1)^3}{2!}-2\frac{(x-1)^4}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}.2\frac{(x-1)^n}{(n-1)!}+\cdots$$

$$(x-1)^2e^{-(x-1)}=(x-1)^2-(x-1)^3+\frac{(x-1)^4}{2!}-\frac{(x-1)^5}{3!}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{(x-1)^n}{(n-2)!}+\cdots.$$

Portanto

$$y=2+e^{-1}\left[1+(x-1)+(x-1)^2\left(\frac{1}{2!}-1\right)+\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n\left(\frac{1}{n!}-\frac{2}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}\right)\right].$$

3836 — Determine a parábola cúbica que para $x=0,1,2,3$ assume os valores $y=1,6,21,52$ respectivamente. Empregue a condensação de matrizes.

R: *A parábola procurada é* $y=A+Bx+Cx^2+Dx^3$ *e as condições dão*

$$\begin{cases}1=A\\ 6=A+B+C+D\\ 21=A+2B+4C+8D\\ 52=A+3B+9C+27D\end{cases}$$

ou

$$\begin{cases}A=1\\ B+C+D=5\\ 2B+4C+8D=20\\ 3B+9C+27D=51\end{cases}$$

Condensando a matriz do sistema vem sucessivamente

$$\begin{Vmatrix}1&1&1&5\\2&4&8&20\\3&9&27&51\end{Vmatrix}\to\begin{Vmatrix}1&1&1&5\\0&2&6&10\\0&6&24&36\end{Vmatrix}\to\begin{Vmatrix}1&1&1&5\\0&1&3&5\\0&1&4&6\end{Vmatrix}\to\begin{Vmatrix}1&1&1&5\\0&1&3&5\\0&0&1&1\end{Vmatrix}$$

Temos pois o sistema equivalente

$$\begin{cases}A=1\\ B+C+D=5\\ C+3D=5\\ D=1\end{cases}\quad\text{ou}\quad\begin{cases}A=1\\ B=2\\ C=2\\ D=1\end{cases}$$
e a parábola vem $y=1+2x+2x^2+x^3$

3837 — Deduza as equações da recta r que passa pelo ponto $z=t$ do eixo $\overline{OZ}$ e vai apoiar-se sobre as duas rectas

$$r_1\begin{cases}x=z-4\\ y=2z+1\end{cases}\qquad r_2\left\{\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{4}=\frac{z}{1}\right..$$

Ache o lugar geométrico dos pontos médios do segmento que nessa recta determinam o eixo e a recta r_1.

Escreva a equação carteziana da projecção ortogonal sobre o plano XOY daquele lugar geométrico.

R: *O ponto* $(0,0,t)$ *e a recta* r_1 *definem um plano* π_1 *que contém a recta* r. *O ponto* $(0,0,t)$ *e a recta* r_2 *definem um plano* π_2 *que também contém* r. *As equações de* r *serão pois as equações de* π_1 *e* π_2 *consideradas simultâneamente.*

Para achar a equação do plano π_1, *considere-se a equação do feixe dos planos que contêm* r_1

$$(x - z + 4) + \lambda_1 (y - 2z - 1) = 0$$

e determine-se aquele que contém o ponto $(0, 0, t)$, *isto é:*

$$-t + 4 + \lambda_1(-2t - 1) = 0 \qquad \lambda_1 = \frac{4-t}{2t+1}$$

$$\pi_1 \equiv x - z + 4 + \frac{4-t}{2t+1}(y - 2z - 1) = 0.$$

Precisamente do mesmo modo obtínhamos a equação do plano $\pi_2 \equiv x - 3z + 1 + \dfrac{1-3t}{4t-3}(y - 4z + 3) = 0$.

Procuramos o ponto de encontro das rectas

$$r_1 \begin{cases} x = z - 4 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$$

e

$$r \begin{cases} x - z + 4 + \dfrac{4-t}{2t+1}(y - 2z - 1) = 0 \\[2mm] x - 3z + 1 + \dfrac{1-3t}{4t-3}(y - 4z + 3) = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de três destas quatro equações, temos depois de eliminar x *entre a 1.ª, 3.ª e 4.ª*.

$$\begin{cases} y - 2z - 1 = 0 \\ (1 - 3t)y + (2 + 4t)z + 12 - 21t = 0 \end{cases}$$

donde

$$x = z - 4 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 21t - 12 & 2 + 4t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 - 3t & 2 + 4t \end{vmatrix}} = \frac{23t - 11}{2 - t} \qquad z = \frac{24t - 13}{2(2-t)}.$$

As coordenadas do ponto de encontro de r *com* r_1 *são:*

$$x = \frac{16t - 29}{2(2-t)} \qquad y = \frac{23t - 11}{2 - t} \qquad z = \frac{24t - 13}{2(2-t)}$$

e as coordenadas do ponto médio

$$X = \frac{16t - 29}{4(2-t)} \qquad Y = \frac{23t - 11}{2(2-t)} \qquad Z = \frac{-2t^2 + 28t - 13}{4(2-t)}.$$

Estas são também as equações paramétricas do lugar geométrico. A projecção ortogonal sobre XOY *desta curva, tem por equações paramétricas*

$$X = \frac{16t - 29}{4(2-t)} \qquad Y = \frac{23t - 11}{2(2-t)}.$$

Eliminando o parâmetro t *obtém-se a equação carteziana; da primeira vem* $t = \dfrac{8X + 29}{4(X+4)}$ *que substituida na segunda conduz a* $140X - 6Y + 491 = 0$. *A projecção é uma recta.*

Soluções do n.º 3831 a 3837 de J. R. Albuquerque

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. L. — Geometria Descritiva — **2.º Exame de Frequência — 15 de Maio de 1951.**

Ponto n.º 1

3838 — Dada uma superfície cónica $[\gamma]$, definida pelo vértice V e pela directriz circular existente em ν_0, e dado um ponto P, conduzir por P duas tangentes à superfície, sendo uma de nível e fazendo outra um ângulo de 60° com a primeira. Indicar os pontos de contacto.

3839 — Seja $\overline{AB}$ um segmento de 4 cm, paralelo a LT, de cota e afastamento iguais a 5 cm; e $\overline{CD}$ um segmento vertical de 5 cm, complano com $\overline{AB}$ e tal que os dois segmentos se cortam ao meio.

a) Que nome tem a superfície gerada pela elipse de eixos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ quando roda em torno de CD?

b) Qual a envolvente da família de planos tangentes à superfície que fazem um ângulo de 60° com ν_0 e tocam a superfície em pontos acima do equador?

c) Determine o plano da família anterior que passa por um ponto dado.

3840 — Definido um hiperbolóide de revolução de uma folha pelo eixo vertical e uma geratriz, e dada uma recta r, determinar um plano π—•—r que corte o hiperbolóide segundo uma parábola. Indicar a direcção do eixo da secção. Apresenta alguma particularidade o plano tangente ao hiperbolóide paralelo a π?

3841 — Dados 3 pontos A'_3, B'_4, C'_5, determinar o centro da circunferência que por êles passa, e o ponto de encontro, com a circunferência, da recta do seu plano que passa por A e faz com ν_0 um ângulo de 45°. Resolução no sistema de projecções cotadas.

F. C. L. — Geometria Descritiva — **2.º Exame de Frequência — 22 de Maio de 1951.**

Ponto n.º 2

3842 — Dada uma superfície cónica $[\gamma]$, definida pelo vértice V e pela directriz circular existente em ν_0, e dado um ponto P conduzir por P uma tangente a $[\gamma]$ que diste d em da projectante vertical do vértice? Indicar o ponto de contacto.

3843 — Definida uma superfície cónica [γ] pelo vértice V e pela directriz circular existente em φ_0, e dada uma recta r:

a) escolher um plano $\alpha -\!\bullet\!- r$ que produza em [γ] uma secção hiperbólica;

b) determinar o centro da hipérbole.

c) determinar um ponto da secção em que a tangente seja horizontal.

3844 — Definido um hiperbolóide de revolução de uma folha pelo eixo vertical e uma geratriz, conduzir-lhe planos tangentes passando por uma recta dada.

3845 — Dado um plano $\alpha \equiv n_3 \cdot P_6$, determinar uma recta do plano α que faça um ângulo dado com ν_0 e diste 2 cm do ponto P. Resolução no sistema de projecções cotadas.

F. C. L. — Geometria Descritiva — **1.º Exame de Frequência — 29 de Janeiro de 1952.**

Ponto n.º 1

3846 — Dada a projecção vertical de um triângulo, a projecção horizontal de um dos vértices e a intersecção do plano do triângulo com o segundo bissector, determinar:

a) a projecção horizontal do triângulo;

b) os traços do seu plano;

c) o lugar geométrico dos pontos deste plano de cota igual ao afastamento.

3847 — Dadas duas rectas concorrentes $r -\!\bullet\!- \beta_{1,3}$ e $s -\!\bullet\!- \beta_{2,4}$, determinar as bissectrizes dos ângulos que elas formam, e os pontos de cota c que estão a igual distância das rectas dadas.

3848 — Conduza por $M(0,0,0)$ uma recta de φ_0 que forme um ângulo de 45° com LT e considere o plano α definido pelo ponto $P(3,2,1)$ e pela recta anterior. Seja R um segundo ponto do plano de abcissa 6 e cota 3. Determinar as projecções do quadrado do plano α de diagonal PR e o vértice da pirâmide regular de aresta lateral igual a 3 e cuja base é o referido quadrado.

3849 — É dado um triângulo $[ABC]$ sobre φ_0. Determine uma direcção d tal que o triângulo $[ABC]$ projectado sobre ν_0, segundo d, dê origem a um triângulo equilátero.

F. C. L. — Geometria Descritiva — **1.º Exame de Frequência — 5 de Fevereiro de 1952.**

Ponto n.º 2

3850 — Dado um plano α definido por 3 pontos $A(0,2,0)$, $B(1,0,2)$ e $C(3/2,1,3/2)$ e β, definido por uma recta de maior inclinação, determinar:

a) os traços do plano β.

b) a intersecção dos dois planos.

c) o ponto da intersecção de cota igual ao afastamento e o ponto da mesma recta de cota e afastamento simétricos.

3851 — Dados os pontos $A -\!\bullet\!- \beta_{1,3}$, $B -\!\bullet\!- \beta_{2,4}$ e C qualquer, determinar:

a) o ângulo $A\hat{C}B$.

b) a projecção vertical de um ponto M, de que se conhece M^1, sabendo que o ponto está a igual distância de A e B.

3852 — Dados os pontos $A(0,4,2)$, $B(3,6,3)$ e $C(5,5,1)$, determinar o centro da esfera que por eles passe e cujo raio é igual a 4.

3853 — Dado um trapésio $[ABCO]$, determinar o centro, o eixo e as rectas limites de uma homologia que transforme o trapézio num quadrado de lado dado.

F. C. L. — Geometria Descritiva — **2.º Exame de Frequência — 20 de Maio de 1952.**

Ponto n.º 1

3854 — Para resolver no sistema de projecções cotadas:

Dadas duas rectas p e q e um ponto P, determinar $r \begin{cases} -\!\bullet\!- P \\ \perp p \\ \perp q \end{cases}$ e o ângulo de r com ν_0. Unidade para as cotas: 2 cm.

3855 — Definida uma superfície cónica pelo vértice e pela directriz existente em φ_0, conduzir por um ponto dado P uma tangente à superfície de projecção paralelas e indicar a distância de P ao ponto de contacto da tangente com a superfície.

3856 — Seja $\overline{AB}$ um segmento paralelo a LT, de comprimento 5 cm e $\overline{CD}$ um segmento de 4 cm, perpendicular a ν_0, e tal que os dois segmentos se cortam ao meio. Tomando $\overline{CD}$ para eixo transverso e $\overline{AB}$, para eixo imaginário de uma hipérbole $[h]$, qual a superfície $[\varepsilon]$ gerada por $[h]$ quando roda em torno do eixo vertical? Existe alguma recta que gere a mesma superfície? Definir pelo vértice e por uma directriz o cone assintótico da superfície (se existir). Qual o plano polar de $O \equiv AB \cdot CD$ em relação à superfície? Determinar um dos planos tangentes a $[\varepsilon]$ que fazem um ângulo de 45° com ν_0 e passam por um ponto dado.

3857 — Seja $[c]$ uma circunferência de φ_0 e $[\varepsilon]$ um hiperbolóide de revolução de uma folha definido pelo eixo vertical e por uma geratriz. Considerando um plano assintótico α do hiperbolóide cujo traço horizontal forme com LT um ângulo de 45°, determinar o vértice de uma superfície cónica de directriz [c] que seja cortada por α segundo uma hipérbole. Indicar as assintotas da secção e um ponto de tangente horizontal e determinar os vértices e focos da projecção vertical da hipérbole.

F. C. L. — Geometria Descritiva — Exame Final — 24 de Junho de 1952.

Ponto n.° 1

3858 — Seja $[\alpha]$ uma superfície cónica de vértice $V(0,1,1)$ e cuja directriz é uma circunferência existente em ν_0, de centro $C(-1,2,0)$ e raio 1. Tomando uma élipse de ν_0, de centro $E(3,3,0)$ e semi-eixos 1 e 2, para directriz de uma segunda superfície cónica $[\beta]$, escolha um vértice para esta superfície por forma que na interseção de $[\alpha]$ com $[\beta]$ haja dois ramos hiperbólicos e um parabólico, e indique a assintota de um dos ramos hiperbólicos.

3859 — Definido um hiperbolóide por $d_1 \perp \nu_0, d_2 \| \varphi_0$ e d_3, determine uma 4.ª geratriz d_4 do mesmo sistema, e defina, pelos traços, o plano tangente à superfície que passa por um ponto dado e contém a geratriz d_4. Indique o ponto de contacto.

3860 — Definido um parabolóide hiperbólico, por duas directrizes e φ_0 como plano director, determine as assíntotas da secção feita por um plano $\perp \nu_0$.

3861 — Dado uma recta $r \| \beta_{24}$ e uma superfície cónica definida pelo vértice e pela directriz circular em ν_0, conduza um plano tangente à superfície paralelo a r. Determine o ângulo que faz com φ_0 o plano obtido e os pontos do plano equidistantes de ν_0 e φ_0.

F. C. L. — Geometria Descritiva — Exame Final — 30 de Junho de 1952.

Ponto n.° 2

3862 — Seja $[\alpha]$ uma superfície cónica de vértice $V(0,1,2)$ e que tem por directriz uma circunferência existente em ν_0, de centro $C(2,{}^3/_2,0)$ e raio 1. Tomando $g \| \beta_{24}$ para direcção das geratrizes de uma superfície cilíndrica $[\beta]$, escolha em φ_0 uma directriz para esta superfície por forma que se verifique um duplo beijamento na intersecção de $[\alpha]$ com $[\beta]$. Indique os pontos duplos da intersecção e determine as tangentes num dêles.

3863 — Definido um hiperbolóide por 3 directrizes $d_1 \perp \nu_0$, $d_2 \| \varphi_0$ e d_3, determine o centro da superfície e o parâmetro da geratriz $g \perp \nu_0$.

3864 — Mostre, a partir da fórmula de Charles, como varia o plano tangente ao longo de uma geratriz de uma superfície empenada. Exemplifique para o caso do parabolóide hiperbólico isósceles definido por 2 directriz e φ_0 como plano director, considerando os planos tangentes em pontos de uma geratriz de frente.

3865 — Dada uma esfera de centro C e raio r, conduza-lhe um plano tangente por um ponto exterior de modo que o ponto de contacto tenha uma cota dada. Conduza por P uma recta do plano obtido que faça um ângulo dado com as frontais do plano.

F. C. L. — Geometria Descritiva — 1.° Exame de Frequência — 29 de Janeiro de 1953.

Ponto n.° 4

3866 — Dados os planos $\alpha \equiv P \cdot r \; (r' \equiv r'')$ e β, definido por uma recta de maior inclinação, determinar:

a) a intersecção dos dois planos.

b) os pontos de α a igual distância de ν_0 e φ_0.

c) os pontos de β tais que cota+afastamento $= K$ (constante).

3867 — Para resolver em geometria cotada: Dada uma recta $r \left\{ \begin{matrix} -\bullet- Q'_5 \\ \nu_0 = 30^\circ \end{matrix} \right.$ e um ponto P'_3, obter sobre r dois pontos M e N a uma distância dada de P e determinar o lugar geométrico dos vértices de todos os triângulos do plano $P \cdot r$ que têm por base $\overline{MN}$ e área dupla da do triângulo $[PMN]$. Unidade para as cotas: 1 cm.

3868 — Seja α um plano definido pelos pontos $M(0,0,0)$, $A(1,2,-2)$ e $P(3,1,1)$. Determinar as projecções do triângulo equilátero de vértice em P e com um dos lados sobre MA e o centro da esfera que passa pelos vértices do triângulo e pelo ponto $R(6,1,1)$.

3869 — Considere os pontos $S(0,0,5)$, $A(0,4,0)$, $B(-1,5,0)$, $C({}^1/_2,7,0)$, $D(2,4,0)$ e $P(3,6,3)$. Colocando em S um foco luminoso e supondo transparentes os planos de projecção, conduzir por P um plano onde o quadrilátero opaco $[ABCD]$ produza uma sombra com a forma de um paralelogramo. Defina a sombra pelas suas projecções. Como determinava um segundo plano onde a sombra fôsse um paralelogramo de área dada?

3870 — Para resolver em geometria cotada: — Dada uma superfície cilíndrica de directriz circular existente em ν_0 e de geratriz com declive igual a $100\,°/_{\circ}$, conduzir por um ponto dado duas tangentes à superfície sendo uma de nível e fazendo a outra um ângulo de K^0 com a primeira. Indicar os pontos de contacto. Unidade para as cotas: 2 cm.

3871 — Dado um elipsóide de revolução de eixo vertical $[\varepsilon]$ e uma recta de nível n, seja $\mathcal{F}$ a família de planos tangentes a $[\varepsilon]$ paralelos a n. Que nome se dá ao lugar geométrico dos pontos de contacto dos planos de $\mathcal{F}$? E ao plano que contém esse lugar geométrico? Determine um plano da família $\mathcal{F}$ que passe por um ponto dado.

3872 — Demonstrar que a intersecção de duas quádricas de revolução, com um plano equatorial comum se projecta ortogonalmente sobre este plano (ou qualquer plano paralelo) segundo uma circunferência. Aplicar o resultado à determinação dos pontos de encontro de uma recta com um elipsóide alongado de revolução.

F. C. L. — Geometria Descritiva — **2.° Exame de Frequência — 20 de Maio de 1953.**

Ponto n.° 4

3873 — De uma superfície cónica de 2.ª ordem conhecem-se 5 geratrizes, uma das quais de nível e outra de frente.

a) Determinar o género da directriz da superfície em ν_0.

b) Conduzir por P (dado) um plano que seccione a superfície segundo uma hipérbole de que sejam direcções assintóticas as geratrizes de nível e de frente dadas.

c) Determinar as assíntotas da secção e indicar como se podem obter os eixos, vértices e focos da sua projecção vertical.

ANÁLISE INFINITESIMAL

F. C. C. — Cálculo Infinitésimal — **2.° Exame de Frequência — 1952-53.**

3874 — Determinar as trajectórias ortogonais da família de curvas $y^2 + y = k\,x$.

R: $4\,x^2 + 2\,(y^2 + y) - \log(1 + 2\,y) = C$.

3875 — Determinar a curva integral da equação

$$(x+1)\,y\,y'' + (x+1)\,y'^2 = y\,y'$$

que contem os pontos $A(0,0)$ e $B(-1,1)$.

R: *Trata-se de uma equação de* Liouville *que tem por integral geral* $y^2 = C\,(x^2 + 2\,x) + 2\,C'$. *A curva integral que contem os pontos dados corresponde aos valores* $C' = 0$ *e* $C = -1$ *das constantes.*

3876 — Determine a área da região limitada pelas curvas $y = \log x$, $x = 0$, $y = 0$ e $y = 1$.

R: $e - 1$.

3877 — Mostre como se pode integrar a equação $y' = f(y/x)$.

3878 — Demonstre o teorema de Du Bois Reymond.

I. S. C. E. F. — Análise Infinitésimal — **1.° exame de frequência extraordinário prático — 19-3-954.**

I

3879 — Calcular $\displaystyle\int \frac{x^2 - 2\,x + 1}{x^3\,(x^4 - 1)\,(x+1)^2}\,dx$.

R: $$\int \frac{x^2 - 2\,x + 1}{x^3\,(x^4-1)\,(x+1)^2}\,dx = \int \frac{x-1}{x^3\,(x+1)^3\,(x^2+1)}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2\,x^2} - \frac{4}{x} - 12\,\log x - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{7}{2\,(x+1)} +$$
$$+ 14\,\log(x+1) + \frac{3}{20}\,\log(x^2+1) + \frac{1}{10}\,\operatorname{arctg} x + K.$$

II

3880 — Determinar uma fórmula de recorrência para o cálculo de $I_{m,n} = \displaystyle\int \frac{(a+x)^m}{(a^2+x^2)^n}\,dx \quad m > 0, n > 0$ e inteiros.

Calcular em particular:

$$a)\int (a+x)^m\,dx \qquad b)\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} \qquad c)\int \frac{a+x}{(a^2+x^2)^3}\,dx.$$

R: $$I_{m,n} = \int \frac{(a+x)^{m-2}\,(a+x)^2}{(a^2+x^2)^n}\,dx =$$
$$= \int \frac{(a+x)^{m-2}\,(a^2+x^2) + 2\,a\,x\,(a+x)^{m-2}}{(a^2+x^2)^n}\,dx =$$
$$= I_{m-2,\,n-1} + a\int \frac{(a+x)^{m-2}\,x}{(a^2+x^2)^n}\,dx = I_{m-2,\,n-1} -$$
$$- \frac{a\,(a+x)^{m-2}}{(n-1)\,(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{a\,(m-2)}{n-1}\,I_{m-3,\,n-1} + C$$

a) $$\int (a+x)^m\,dx = \frac{(a+x)^{m+1}}{m+1} + C$$

b) $$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{a^2+x^2} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{2x^2\,dx}{(a^2+x^2)^2} =$$
$$= \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}$$

c) $$\int \frac{a+x}{(a^2+x^2)^3}\,dx = a\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^3} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(a^2+x^2)^3}\,dx =$$
$$= \frac{1}{a}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(a^2+x^2)^3}\,dx - \frac{1}{4(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} -$$
$$- \frac{1}{2a}\int \frac{2x^2\,dx}{(a^2+x^2)^3} - \frac{1}{4(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{2a^4}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} +$$
$$+ \frac{x}{2a^3(a^2+x^2)} - \frac{1}{4(a^2+x^2)^2} - \frac{1}{2a}\left(\frac{(a^2+x^2)^{-2}}{-2}\,x +\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\int (a^2+x^2)^{-2}\,dx\right) = \frac{1}{2a^4}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^3(a^2+x^2)} -$$
$$- \frac{1}{4(a^2+x^2)^2} + \frac{1}{4a(a^2+x^2)^2} - \frac{1}{8a^4}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} -$$
$$- \frac{x}{8a^3(a^2+x^2)}.$$

III

3881 — Determinar a condição de existência de $I = \int_0^{\infty} \frac{x^m-1}{x^n-1}\,dx$ com $m, n > 0$ inteiros e calcular este integral para $m=2, n=4$ e para $m=1, n=4$.

R: *A condição de existência é* $m < n+1$.

Para $m=2, n=4$ *vem:*

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2-1}{x^4-1}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Para $m=1, n=4$ *vem:*

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x-1}{x^4-1}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} =$$
$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{2(x+1)} - \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2(x^2+1)}\right)dx =$$
$$= \left[\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2}\operatorname{artg} x\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

I. S. C. E. F. — Análise Infinitesimal — 1.º Exame de frequência extraordinário (teórico) — 20-3-954.

I

3882 — *a*) Sendo $P(x, y, z)$ um ponto variável e $P_1(a, b, c)$ um ponto fixo, determine uma função escalar u, só da variável x, que satisfaça à equação

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{(P-P_1)^2}{(P_1-O)^2} = \operatorname{grad} u/(P-P_1)$$

sendo O a origem dos eixos. (coordenadas cartesianas ortogonais).

b) Discussão—Em que domínio existem funções reais $u(x)$ satisfazendo à condição dada?

R: a) *A equação dada equivale a*

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{du}{dx}\,I/[(x-a)\,I+$$
$$+(y-b)\,J+(z-c)\,K] \quad \textit{ou ainda} \quad \frac{6}{a^2+b^2+c^2} =$$
$$= \frac{du}{dx}(x-a)$$
$$du = \frac{6\,dx}{(a^2+b^2+c^2)(x-a)}$$
$$u = \frac{6}{a^2+b^2+c^2}\int\frac{dx}{x-a} = \frac{6\log(x-a)}{a^2+b^2+c^2} + C.$$

b) *O domínio terá de ser evidentemente* $(a, +\infty)$.

II

3883 — Verifique:

1.º) Que o teorema de Peano não é aplicável ao sistema:

$$\begin{cases} y_1 = 3x^2 + 2x^3 \\ y_2 = x^2 + x^3 \\ y_3 = 4x^2 + 3x^3 \quad \text{no intervalo } (-a, a). \end{cases}$$

2.º) Que as funções são linearmente dependentes, qualquer que seja x.

Que conclusão deve tirar-se destes dois factos?

R: 1.º) *O Wronskiano do sistema*

é $$W = \begin{vmatrix} 3x^2+2x^3 & x^2+x^3 & 4x^2+3x^3 \\ 6x+6x^2 & 2x+3x^2 & 8x+9x^2 \\ 6+12x & 2+6x & 8+18x \end{vmatrix}$$ *e como os complementos algébricos da última linha são todos nulos em* $x=0$, *ponto interior* $a(-a, a)$, *não se pode aplicar o teorema de Peano.*

2.º) *Existe um teorema que diz: «Se um sistema de funções for linearmente dependente o Wronskiano das funções é identicamente nulo».*

Ora é evidente que $W=0$ *para qualquer valor* x *(a terceira coluna é a soma das duas primeiras) e então está verificado que as funções são linearmente dependentes.*

Destes dois factos conclue-se que embora o teorema de Peano *não seja aplicável às funções dadas elas são linearmente dependentes. O teorema de* Peano *e o teorema enunciado em 2.º) não são proposições recíprocas.*

III

3884 — Como se sabe, demonstra-se a existência do integral de Stieltjes $\int_a^b f(x)\,dF(x)$ quando $f(x)$

for contínua e $F(x)$ de variações limitada em (a, b). Veja se sabe definir um integral de Stieltjes $\int_b^a f(x)\, dF(x)$ que será finito sem que a função $F(x)$ seja de variação limitada.

IV

3885 — Verifique que div grad $f(r) = \frac{n-1}{r} f'(r) + f''(r)$ sendo $f(r)$ uma função escalar da distância r do ponto variável $P(x_1, x_2, \cdots x_n)$ do espaço n-dimensional à origem $O(0, 0, \cdots 0)$. Supõe-se, bem entendido, que existem as derivadas $f'(r)$ e $f''(r)$ (coordenadas cartesianas ortogonais).

R: $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ *e como:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_k} = \dfrac{d f}{d r} \dfrac{\partial r}{\partial x_k} = f'(r) \dfrac{x_k}{r} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = \dfrac{f''(r)}{r^2} x_k^2 + f'(r) \left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{x_k^2}{r^3} \right) \end{cases}$$ *vem:* div grad $f(r) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = \frac{f''(r)}{r^2} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{f'(r)}{r} - \frac{f'(r)}{r^3} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 =$$

$$= f''(r) + \frac{n f'(r)}{r} - \frac{f'(r)}{r} = \frac{n-1}{r} f'(r) + f''(r).$$

I. S. C. E. F. — Análise Infinitésimal — 2.º Exame de frequência teórico (ordinário) 14-6-54

I

3886 — *a*) Verifique que a equação $yz\,dx - xz\,dy - y^2\,dz = 0$ é completamente integrável.

b) Sabido que $F = \frac{x}{y} - \log z = C$ é integral da equação, verifique que $\lambda = \frac{1}{y^2 z}$ é factor integrante.

II

3887 — Verifique que a equação $yq^2 + xp = z$ é integrável por dualidade e integre-a.

III

3888 — Sendo $P(x_1, x_2, \cdots x_n)$ um ponto do espaço n-dimensional, diga como se extende o conceito de $\int_V f(P)\, dV$ quando:

a) $f(P)$ se torna infinita em V um número finito de vezes; b) $f(P)$ se torna infinita em V um número infinito de vezes; c) o domínio V é ilimitado.

Mostrar que $\iint_A \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\, dx\, dy$ é divergente quando A é o primeiro quadrante.

IV

3889 — Seja $U(x, y) = \text{Const.}$ a equação geral duma família de curvas planas Γ num sistema de eixos rectângulares. Qual é a condição necessária e suficiente a que deve satisfazer $U(x, y)$ para que as curvas que cortam as curvas Γ sob um ângulo constante α sejam representadas, qualquer que seja α, por uma equação da forma $U(x, y) + V(x, y) \operatorname{tg} \alpha = C$ onde $V(x, y)$ é independente de α e C designa uma constante arbitrária.

Explicar o resultado por meio da teoria das funções analíticas duma variável complexa.

V

3890 — Analise os casos de indeterminação, nos problemas do cálculo das variações, relativos:

1.º) ao integral $\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx$;

2.º) ao integral duplo $\iint_A f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$.

I. S. C. E. F. — Análise Infinitesimal — 2.º exame de frequência teórico (extraordinário) — 3-6-954.

I

3891 — Se $v = f(u)$ é uma função que admite as derivadas $f'(u)$ e $f''(u)$ sendo u uma função homogénea de grau n das variáveis x e y mostrar que:

$$x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} =$$
$$= n(n-1)\, u f'(u) + n^2 u^2 f''(u)$$

II

3892 — As fórmulas de Riemann e Ostrogradski no cálculo de áreas planas e de volumes.

III

3893 — Considere a função de variável complexa $w = \operatorname{arctg} z$ $(z = x + iy)$.

1.º) Pôr esta função na forma $P(x,y) + i(Qx,y)$ onde P e Q representam funções reais das variáveis reais x e y.

2.º) Definir as curvas representadas em coordenadas rectangulares pelas equações $P =$ constante, $Q =$ constante.

3.º) Achar o ângulo segundo o qual uma curva da primeira família corta a outra da segunda família.

IV

3894 — Encontrar as expressões gerais das duas funções $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ tais que as duas equações: $dz = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy$

$$dz = 2\,[P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy]$$

sejam uma e outra completamente integráveis. Encontrar a expressão geral das funções $\lambda(x,y,z)$ tais que a equação:

$$dz = \lambda(x,y,z)\,[P(x,y,z)\,dx + Q(x,z,z)\,dy]$$

seja também completamente integrável.

V

3895 — No problema de cálculo das variações respeitante ao integral $\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y',y'')\,dx$ a função $y(x)$ é dada pela equação diferencial 1) $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0.$

Provar que: *a)* a equação 1) é de segunda ordem se $F(x,y,y',y'') = y'' f(x,y,y') + g(x,y,y')$. *b)* a equação 1) reduz-se a uma identidade quando $F(x,y,y',y'') = y'' \frac{\partial \varphi}{\partial y'} + y' \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ onde φ é função de x, y, y'.

I. S. C. E. F. — Análise Infinitésimal — Exame final — Época de Julho — 16-7-954.

I

3896 — Se $F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = \varphi(X,Y,Z)$, onde $X = x_2 x_6 - x_3 x_5$, $Y = x_3 x_4 - x_1 x_6$, $Z = x_1 x_5 - x_2 x_4$, mostrar que:

a) $x_1 F'_{x_4} + x_2 F'_{x_5} + x_3 F'_{x_6} = 0$

b) $x_4 F'_{x_1} + x_5 F'_{x_2} + x_6 F'_{x_3} = 0$.

Demonstrar ainda que, sendo F homogénea de grau n em x_1, x_2, x_3, φ é também homogénea de grau n em X, Y, Z e F homogénea de grau n em x_4, x_5, x_6.

R: a) $x_1 F'_{x_4} + x_2 F'_{x_5} + x_3 F'_{x_6} = x_1(\varphi'_Y x_3 - \varphi'_Z x_2) + x_2(-\varphi'_X x_3 + \varphi'_Z x_1) + x_3(\varphi'_X x_2 - \varphi'_Y x_1) = 0$.

b) $x_4 F'_{x_1} + x_5 F'_{x_2} + x_6 F'_{x_3} = x_4(-\varphi'_Y x_6 + \varphi'_Z x_5) + x_5(\varphi'_X x_6 - \varphi'_Z x_4) + x_6(-\varphi'_X x_5 + \varphi_Y x_4) = 0$.

Sendo F *homogénea de grau* n *em* x_1, x_2, x_3, *tem-se, segundo o teorema de* Euler: (1) $x_1 F'_{x_1} + x_2 F'_{x_2} + x_3 F'_{x_3} = n\,F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = n\,\varphi(X,Y,Z)$.

Ora $x_1 F'_{x_1} + x_2 F'_{x_2} + x_3 F'_{x_3} = x_1(-\varphi'_Y x_6 + \varphi'_Z x_5) + x_2(\varphi'_X x_6 - \varphi'_Z x_4) + x_3(-\varphi'_X x_5 + \varphi'_Y x_4) = (x_2 x_6 - x_3 x_5)\varphi'_X + (x_3 x_4 - x_1 x_6)\varphi'_Y + (x_1 x_5 - x_2 x_4)\varphi'_Z = X\varphi'_X + Y\varphi'_Y + Z\varphi'_Z$ *e a igualdade* (1) *dá imediatamente:*

$X\varphi'_X + Y\varphi'_Y + Z\varphi'_Z = n\,\varphi(X,Y,Z)$, c. q. d.

Para demonstrar que F *é homogénea de grau* n *em* x_4, x_5, x_6, *basta notar que:*

$$x_4 F'_{x_4} + x_5 F'_{x_5} + x_6 F'_{x_6} = x_4(\varphi'_X x_3 - \varphi'_Z x_2) + x_5(-\varphi'_X x_3 + \varphi'_Z x_1) + x_6(\varphi'_X x_2 - \varphi'_Y x_1) = (x_2 x_6 - x_3 x_5)\varphi'_X + (x_3 x_4 - x_1 x_6)\varphi'_Y + (x_1 x_5 - x_2 x_4)\varphi'_Z = X\varphi'_X + Y\varphi'_Y + Z\varphi'_Z = n\,\varphi(X,Y,Z) = n\,F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$$

o que mostra que F *é homogénea de grau* n em x_4, x_5, x_6.

II

3897 — Sendo Γ uma curva plana, considerem-se as circunferências de raio r cujos centros estão em Γ. Determinar a envolvente desta família de circunferências e provar que ela é constituida por duas curvas paralelas a Γ à distância r.

R: *Sendo* $y = f(x)$ *a curva* Γ *a família de circunferências de raio* r *cujos centros estão em* Γ *é* $f(x,y,c) = (x-c)^2 + [y - f(c)]^2 - r^2 = 0$ *e para achar a envolvente tem de se eliminar* c *entre as equações:*

$$\begin{cases} f(x,y,c) = 0 \\ f'_c(x,y,c) = 0 \end{cases}$$

ou seja $\begin{cases} (x-c)^2 + [y - f(c)]^2 - r^2 = 0 \\ -2(x-c) - 2[y - f(c)]\,f'(c) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} (x-c)^2 + [y - f(c)]^2 - r^2 = 0 \\ x = c - [y - f(c)]\,f'(c) \end{cases}$$

A envolvente é, pois, em equações paramétricas:

$$\begin{cases} y = f(c) \pm \dfrac{r}{\sqrt{[f'(c)]^2+1}} \\ x = c \mp \dfrac{r\,f'(c)}{\sqrt{[f'(c)]^2+1}} \end{cases}$$

Como $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dc}}{\frac{dx}{dc}} = f'(c)$, *como fàcilmente se pode verificar, fica provado que a envolvente é constituida por duas curvas paralelas a* Γ.

III

3898 — Dada a equação linear:

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)\,y = 0$$

tome-se uma nova variável independente t ligada a x pela relação $t=\varphi(x)$ e a equação (1) é substituída pela nova equação linear:

$$(2)\quad \frac{d^2y}{dt^2}+p_1(t)\frac{dy}{dt}+q_1(t)\,y=0.$$

Encontrar a condição a que devem satisfazer os coeficientes p e q da equação (1) para que seja possível escolher a função φ de modo que a equação (2) tenha os seus coeficientes constantes.

Supondo $p=\frac{2}{x}$, encontrar a expressão geral de $q(x)$ e o integral geral da equação (1) correspondente.

R: *Tem-se* $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\varphi'(x)$ *e* $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}\varphi'^2+\frac{dy}{dt}\varphi''$ *e substituindo estes valores em* (1) *obtém-se a equação* $\varphi'^2\frac{d^2y}{dt^2}+(p\varphi'+\varphi'')\frac{dy}{dt}qy=0$ *e para que ela se reduza à forma* (2) *terá de ser:*

$$\begin{cases} p\varphi'+\varphi''=a\varphi'^2 \\ q=b\varphi'^2 \end{cases}.$$

Derivando em ordem a x *a segunda equação, obtém-se o sistema de 3 equações* $\begin{cases} p\varphi'+\varphi''=a\varphi'^2 \\ q=b\varphi'^2 \\ q'=2b\varphi'\varphi'' \end{cases}$ *e eliminando* φ' *e* φ'' *vem* $\frac{1}{q}\left(p+\frac{q'}{2q}\right)=C$ *que é a relação procurada.*

Sendo $p=\frac{2}{x}$ *e, substituindo na relação já deduzida, obtém-se:* $\frac{2}{x}+\frac{q'}{2q}=\pm\sqrt{\lambda q}$ $(\lambda=\text{const.})$ *equação diferencial que se pode tinearizar fazendo* $\pm\sqrt{\lambda q}=\frac{\lambda}{u}$.

A equação linear é $2u-xu'=\lambda x$ *que integrada dá* $u=\lambda x+\mu x^2$ *e portanto* $q=\frac{k\alpha^2}{x^2(x+\alpha)^2}$ $(\alpha, k$ *constante*$)$.

A equação (1) *é então* $y''+\frac{2}{x}y'+\frac{k\alpha^2}{x^2(x+\alpha)^2}y=0$ *e, fazendo a mudança de variáveis* $t=\log\frac{x}{x+\alpha}$, *obtém-se* $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+ky=0$ *que se integra pelos métodos já conhecidos.*

Soluções dos n.os 3879 e 3898 de Fernando de Jesus

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. L. — Álgebra Superior — **Pontos de frequência do ano de 1953/54.**

3899 — Mostrar que todo o grupo abeliano finito é resolúvel (admite uma série normal de factores abelianos).

3900 — Se um anel $\mathfrak{S}$ tem um número finito de geradores, prove que $\mathfrak{S}^2$ também tem um número finito de geradores. Quais? Generalize o resultado.

3901 — Mostre que um anel simples que é anel zero, isto é, tal que $\mathfrak{S}^2=(0)$, é um grupo finito.

3902 — Seja $\mathcal{M}$ um módulo — Ω. Determine a expressão geral do grupo gerado por x. Note que tal grupo com cada elemento contém os resultados das aplicações dos operadores de Ω, por ser sub-módulo admissível.

3903 — Sejam $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{A}$, dois anéis de características $\gamma_{\mathfrak{B}}$ e $\gamma_{\mathfrak{A}}$. Prove que $\gamma_{\mathfrak{B}}\leq\gamma_{\mathfrak{A}}$.

Mostre que todo o anel $\mathfrak{B}$ se pode mergulhar no anel $\mathfrak{A}$, com unidade, e tal que $\gamma_{\mathfrak{B}}=\gamma_{\mathfrak{A}}$.

3904 — Seja $\mathfrak{S}$ um anel simples que não é anel zero $(\mathfrak{S}^2\neq(0))$. Mostre que o centro $\mathfrak{z}\neq(0)$ é um corpo.

3905 — Seja $\mathfrak{A}$ um anel totalmente redutível. Mostre que

a) Se $\mathfrak{a}$ é um ideal bilateral de $\mathfrak{A}$ então $\mathfrak{a}$ como anel, é totalmente redutível.

b) Se $\mathfrak{R},\mathfrak{R}^*,\mathfrak{R}^{**}$, forem os radicais de $\mathfrak{a}$, então $\mathfrak{a}$ pode-se escrever

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{R}+\mathfrak{b}$$
$$\mathfrak{a}=\mathfrak{R}^*+\mathfrak{b}^*$$
$$\mathfrak{a}=\mathfrak{R}^{**}+\mathfrak{b}^{**}$$

em que $\mathfrak{b},\mathfrak{b}^*,\mathfrak{b}^{**}$, são aneis cujos radicais $\mathfrak{R},\mathfrak{R}^*,\mathfrak{R}^{**}$ São nulos.

3906 — Seja $\mathfrak{A}$ um anel comutativo. Prove que o radical $\mathfrak{R}$ é a intersecção dos ideais bilaterais $\mathfrak{b}$ tais que $\mathfrak{A}/\mathfrak{b}$ tem radical $\mathfrak{R}=0$.

3907 — Considere o determinante

$$\Delta=\det|\Sigma a_{ij}b_{jk}|$$

como função dos vectores

$$\mathfrak{a}_i=|a_{i1},\cdots a_{in}|$$
$$i=1,2,\cdots n$$

admitindo que os b_{jk} são constantes. Tendo em conta que Δ verifica 2 propriedades características dos determinantes há uma proposição que permite deduzir a regra do produto de determinantes. Diga quais são as propriedades verificadas e deduza que efectivamente se tem

$$\Delta = |a_{ij}| \cdot |b_{jk}|.$$

3908 — Seja $\mathfrak{M}$ um módulo — Ω onde Ω é um corpo satisfazendo à condição de cadeia ascendente. Sabendo-se que o elemento unidade do corpo actua como o automorfismo identidade $(x1 = x)$ demonstre

a) que se $\mathfrak{M}$ for simples é $\mathfrak{M} = v\,\Omega$ em que $v \neq 0$ é arbitrário e $v \in \mathfrak{M}$

b) que se não é simples, é soma directa dum número finito de módulos simples.

PROBLEMAS

Problemas propostos ao concurso

SECÇÃO ELEMENTAR

3909 — Provar que

$$(1+\sqrt{3})^n = 6\,(1+\sqrt{3})^{n-2} + 4\,(1+\sqrt{3})^{n-3}$$

3910 — Considere um triângulo equilátero $[A_1, B_1, C_1]$ de área $\mathcal{A}$. Inscrito no triângulo anterior um novo triângulo equilátero $[A_2, B_2, C_2]$ tal que os seus lados sejam respectivamente perpendiculares aos do anterior. Do mesmo modo e indefinidamente triângulos equiláteros, inscritos nos sucessivos triângulos que se vão obtendo por aquele processo.

Calcule o limite da soma das áreas dos triângulos quando o número destes tende para ∞.

SECÇÃO MÉDIA

3911 — Demonstrar que

$$\frac{d^n(\operatorname{arc\,tg} x)}{dx^n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \cdot \operatorname{sen}(n \cdot \operatorname{arc\,cot} x).$$

3912 — Demonstrar que a correspondência $a + b\sqrt{3} \longleftrightarrow a + b\sqrt{5}$ (a e b racionais) não é um isomorfismo, e provar que não pode existir nenhum isomorfismo entre os corpos $R(\sqrt{3})$ e $R(\sqrt{5})$.

Resoluções dos problemas do concurso, propostos no n.º 56

Apresentou soluções correctas dos n.ºs 3730, 3731 e 3732, que se publicam, o Snr. Fernando de Jesus.

3730

R: *Como* $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ *virá* $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x =$

$= \dfrac{2\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \geqslant 0$ *e também é evidente que* $\dfrac{2\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} < 2$ *donde se conclui que* $0 \leqslant \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x < 2$ *o que mostra que é impossível a dupla desigualdade proposta.*

3731

R: *Como* $p = \overline{OP} \cos\alpha$ *e* $p = 2\cos A$ *vem*

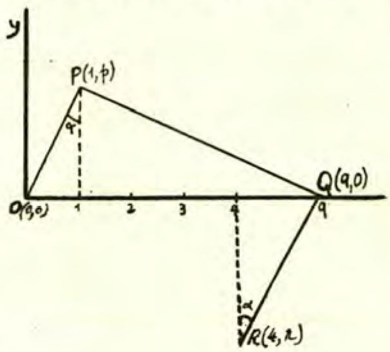
$$\cos\alpha = \frac{2\cos A}{\overline{OP}} = \frac{2\cos A}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{2\cos A}{\sqrt{1+4\cos^2 A}}.$$

Conclui-se também que $\overline{QR} = \dfrac{q-4}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{q-4}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} =$

$= \dfrac{q-4}{\sqrt{1-\dfrac{4\cos^2 A}{1+4\cos^2 A}}} = \dfrac{q-4}{\sqrt{\dfrac{1}{1+4\cos^2 A}}}$. *Então*

$$r = \overline{QR}\cos\alpha = \frac{q-4}{\sqrt{\dfrac{1}{1+4\cos^2 A}}}\;\frac{2\cos A}{\sqrt{1+4\cos^2 A}} =$$

$= 2\cos A\,(q-4)$ *e como* $q = 1 + p^2 = 1 + 4\cos^2 A$ *vem* $r = 2\cos A\,(4\cos^2 A - 3) = 2\cos 3A$ *c. q. d.*



3732

R: *Sendo* $x = n$ *(inteiro) e substituindo este valor na função dada vem* $y = n^2 + (2n+1)(n-n) = n^2$ *que é o mesmo valor que se obtém fazendo* $x = n$ *em* $y = x^2$.

Considerando os inteiros consecutivos n *e* $n+1$ *e sendo* $X = n + \theta$ $(0 < \theta < 1)$ *vem para valor correspondente da função:* $Y = n^2 + (2n+1)\,\theta$.

Ora a equação da recta que passa pelos pontos (n, n^2) $[(n+1), (n+1)^2]$ *pertencentes a* $y = x^2$ *é* $Y - n^2 = (2n+1)(X-n)$ *e fazendo* $X = n + \theta$ *vem* $Y = n^2 + (2n+1)\,\theta$.

Fica assim demonstrado que a representação gráfica da equação é uma poligonal inscrita na parábola $y = x^2$ *cujos vertices correspondem aos valores inteiros da variável independente.*

3733 — Não foram apresentadas soluções.