

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.*ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda.—Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º, Dto.—Telef. 771943—LISBOA-N.

## Sobre a não contradição da Matemática

por *Gottfried Köthe*

(Conferência realizada na Faculdade de Ciências de Lisboa em 27 de Abril de 1954)

Foi em fins do século passado que, na teoria dos conjuntos, surgiram alarmantes contradições. A primeira destas antinomias foi descoberta por BURALIFORTI em 1897: por um lado consegue-se demonstrar que existe um número ordinal maior do que todos os outros, por outro lado demonstra-se que, para cada número ordinal, existe um outro número ordinal maior do que esse. O próprio fundador da teoria dos conjuntos, G. CANTOR, descobriu em 1899 que a noção de conjunto  $C$  de todos os conjuntos é em si contraditória: o número cardinal de  $C$  deveria ser maior que qualquer outro número cardinal; por outro lado, o conjunto de todos os subconjuntos de  $C$  deveria ter um número cardinal maior que o de  $C$ , segundo um teorema geral da teoria dos conjuntos.

Reconheceu-se em breve que tais contradições estão intimamente ligadas a certas antinomias de carácter puramente lógico. Uma destas antinomias era conhecida pelos filósofos gregos como o *paradoxo do mentiroso*: «O que eu digo neste momento é falso».

Ainda de carácter puramente lógico é o paradoxo relativo a noções impredicáveis, descoberto pelo filósofo e matemático inglês BERTRAND RUSSELL. Um predicado (ou uma noção) diz-se *predicável*, quando pode ser afirmado a respeito de si próprio; caso contrário, diz-se impredicável. Por exemplo, a noção de «noção» é ela mesma uma noção—logo «noção» é um predicado predicável. Mas já a noção de «casa» é impredicável, pois não faz sentido dizer que a noção de «casa» é uma casa.

Consideremos agora a noção de «impredicável». Será esta uma noção impredicável? Não, porque nesse caso seria predicável. É então predicável? Também não, porque nesse caso seria impredicável. Como se vê, ambas as hipóteses conduzem a uma contradição.

Uma outra antinomia lógica é o chamado paradoxo de RICHARD. Existem certamente números naturais que podem ser definidos com menos de trinta sílabas. Mas, sendo assim, a definição

«O mais pequeno número natural que não pode ser definido com menos de trinta sílabas»

conduz a uma contradição, pois é feita na realidade com menos de trinta sílabas.

H. POINCARÉ por um lado e B. RUSSELL por outro adoptaram o seguinte ponto de vista para explicar as antinomias. As noções predicáveis correspondem a entidades do tipo do conjunto  $C$  de todos os conjuntos, que tem por elemento esse mesmo conjunto: tais noções apresentam o carácter de um círculo vicioso, devendo por isso ser eliminadas. Esta qualidade de círculo vicioso patenteia-se claramente no paradoxo de RICHARD e, nos outros casos, é sempre um tal círculo vicioso que aparece como origem da antinomia.

Parecia então muito simples sair da dificuldade: tratava-se unicamente de evitar as definições com essa índole problemática. Mas infelizmente há muitas definições de tal natureza em matemática, sobretudo na análise clássica. Basta dar como exemplo a noção de máximo duma função contínua  $f(x)$  num intervalo  $[a, b]$ , expressa usualmente pela notação

$$\max_{a \leq x \leq b} f(x).$$

Na verdade, o máximo é ele mesmo um dos valores numéricos, pelo conjunto dos quais o máximo é definido.

Mas como é possível que, em matemática, se tenham adoptado definições com tal natureza problemática? Como é possível que somente os paradoxos da teoria dos conjuntos nos tenham conduzido a reconhecer este facto deveras inquietante?

A verdade é que só nesse momento se tomou plena consciência de que os matemáticos trabalhavam com uma hipótese filosófica, a que se deu o nome de *ponto de vista platónico*. Consiste esta hipótese em admitir que os números, os conjuntos de números, etc. têm de certo modo uma existência independente de nós, de forma que já está previamente decidido, de maneira independente dos nossos conhecimentos, qual é a solução dum dado problema matemático, qualquer que ele seja. Ao matemático competiria unicamente «achar» a solução dos problemas, «descobrir» a verdade ou falsidade das proposições. Encarada deste ponto de vista, a definição de máximo é certamente justificada: os valores numéricos de  $f(x)$ , embora em número infinito, *existem* no sentido platónico — fora de nós, independentemente dos nossos conhecimentos — e a definição limita-se a escolher um desses números, o maior deles.

Foi principalmente CANTOR quem sustentou o ponto de vista platónico: para ele os conjuntos infinitos eram entidades efectivamente existentes, e não apenas ficções lógicas. De resto, toda a teoria dos conjuntos, como hoje é ensinada nos cursos universitários, é fundada sobre este ponto de vista: os números cardinais, bem como os números ordinais, só com essa atitude mental podem ser concebidos.

Mas houve sempre filósofos que se opuseram e negaram categoricamente a possibilidade da existência actual dum conjunto infinito. No tempo de CANTOR era sobretudo KRONECKER quem atacava a teoria dos conjuntos por este lado.

Além disso, o fenómeno dos paradoxos veio demonstrar que o ponto de vista platónico é contraditório: pelo menos para conjuntos *quaisquer* (cujos elementos podem ser, já por si, conjuntos, conjuntos de conjuntos, etc.).

Levanta-se pois a seguinte questão inquietante: se o ponto de vista platónico é inadmissível para os conjuntos infinitos, qual é a garantia de que se possa mantê-la para os números reais ou mesmo para os números naturais? Foi o matemático holandês L. E. J. BROUWER quem, de maneira mais genuína, formulou e desenvolveu o ponto de vista que se exprime abreviadamente nos seguintes termos: a afirmação de que existe um número, verificando tal ou tal propriedade, só tem sentido, quando é dado um processo para calcular esse número, mediante um número *finito* de operações elementares; qualquer outra interpretação é desprovida de sentido. E, na verdade, parece-me bastante difícil compreender o que se pretende significar com uma frase como esta: «Os números naturais existem», desde que se queira interpretá-la no sentido platónico.

Em conformidade com tal crítica, BROUWER deu-se

ao cuidado de reconstruir a matemática sobre novos alicerces. Porém esta nova matemática — apelidada de intuicionista — é muito mais difícil do que a matemática clássica; muitos teoremas simples da análise deixam de ser válidos na matemática intuicionista, sendo substituídos por teoremas deveras complicados. A escola holandesa tem mantido até hoje o ponto de vista brouweriano e continua a trabalhar no desenvolvimento da matemática intuicionista.

Pode bem dizer-se que, na actualidade, a crítica radical de BROUWER é reconhecida como inteiramente justificada: o *ponto de vista construtivo* é o único método aceitável para uma reedificação da matemática. Mas, por outro lado, sentiu-se a necessidade de procurar uma solução menos drástica, porquanto a matemática intuicionista se afasta exageradamente da matemática clássica. A verdade é que os paradoxos, origem de todo este movimento, se manifestaram num domínio bem distante da análise clássica, na qual nenhum paradoxo se tinha apresentado. Foi D. HILBERT quem procurou uma solução que, por um lado, satisfizesse à crítica de BROUWER e, por outro lado, salvaguardasse a análise clássica. O seu programa era demonstrar que a análise clássica não conduz nunca a uma contradição. Sendo assim, mesmo que o ponto de vista platónico fosse na realidade desprovido de sentido, seria possível adoptar como até aqui este ponto de vista e continuar a fazer investigações matemáticas na linha tradicional, sem o perigo de chegar a resultados contraditórios. Mas esta demonstração da não contradição da matemática clássica deveria ser feita por um método construtivo no sentido de BROUWER.

Eu vou tentar esboçar nalgumas palavras o que se entende segundo HILBERT por *métodos construtivos* ou *finitistas*. Estes métodos devem, primeiro que tudo, ter um carácter de evidência, que os dispense de qualquer outro fundamento.

Os objectos das deduções finitistas são sempre agrupamentos finitos de sinais elementares, tais como  $|$ ,  $||$ ,  $\cup$ ,  $\cap$ , etc. Não se diz nunca que um tal objecto existe sem dar um método de o construir. Um exemplo típico é a representação dos números naturais: começa-se por  $|$ ,  $||$ ; cada sinal que possa ser obtido pela adjunção dum novo traço  $|$  a um sinal já construído representa um número natural. Não se concebe nunca a classe de todos estes objectos como um conjunto acabado. Quando se diz que uma dada proposição é verdadeira para *todo* o número natural  $n$ , pretende-se dizer que é conhecido um processo demonstrativo que habilita a verificar essa proposição para cada valor particular atribuído a  $n$ .

Portanto, o afirmar que uma proposição é verdadeira para *todo* o número  $n$ , implica que se está na

posse duma tal demonstração construtiva; dizer que a proposição é falsa para algum valor de  $n$  significa que se possui um contra-exemplo, o qual por sua vez, terá de ser controlável por um método construtivo. Neste sentido, o princípio lógico do terceiro excluído deixa de ser válido, pois não se tem a certeza de que toda a questão possa vir a ser decidida pela afirmativa ou pela negativa, podendo assim haver porventura proposições, a respeito das quais não faça sentido dizer que são verdadeiras ou falsas.

Seguindo este método obtém-se uma teoria dos números, de carácter construtivo, que não contém toda a teoria clássica elementar dos números naturais. Portanto, o problema mais simples que se apresenta no programa hilbertiano é o de demonstrar a não contradição da teoria clássica dos números.

A ideia de HILBERT é a seguinte: Analisando os processos clássicos de demonstração há-de reconhecer-se que é impossível chegar com esses processos a uma contradição. Existe um só caminho para alcançar este fim. A teoria dos números é dedutível dos cinco axiomas de PEANO por meio das regras da lógica clássica. Só os teoremas demonstráveis deste modo pertencem à teoria clássica dos números.

Ora, para poder analisar as deduções clássicas de maneira precisa, é indispensável *formalizar* a teoria clássica dos números. Quere isto dizer que cada axioma deverá ser dado como um certo agrupamento de sinais elementares (fórmula) e que as deduções deverão consistir em certas operações combinatórias, que transformem uma fórmula dada numa outra que simboliza o resultado da dedução. Estudando tais operações, há então que demonstrar, por deduções finitistas, que é impossível chegar, por essas operações lógicas formalizadas, a um agrupamento de sinais que seja a formalização duma contradição.

A descrição das leis de estrutura duma teoria formalizada, das leis de operações com sinais e as deduções finitistas sobre a teoria formalizada constituem as chamadas *investigações metamatemática sobre a teoria ou a metateoria*.

Com esta orientação, a teoria dos números torna-se uma espécie de jogo com sinais, segundo regras bem definidas. É talvez necessário salientar a importância duma tal formalização. A formalização da lógica clássica tinha já sido efectuada por BOOLE e FREGUE, de cujos resultados HILBERT se serviu. Esta formalização dá em princípio a possibilidade de obter teoremas na teoria dos números, de maneira puramente mecânica. As modernas máquinas electrónicas de calcular utilizam já, numa certa medida, estas descobertas, pois podem executar operações lógicas elementares; eis aí um campo de aplicação, deveras interessante, da lógica e da teoria dos números formalizada.

Mas tornemos ao nosso problema da não-contradição da aritmética. Como vimos, é possível formalizar a teoria dos números de tal modo que, deixando de parte unicamente o axioma do terceiro excluído, se obtem a teoria dos números construtiva. Trata-se então de demonstrar que a adunção deste axioma não conduz a contradição. Conseguiu-se facilmente demonstrar a não-contradição de certas partes da teoria dos números por métodos bastante elementares, mas o problema geral resistiu durante muito tempo a todos os esforços. No ano de 1931, um trabalho célebre do matemático austriaco KURT GÖDEL veio criar uma situação verdadeiramente dramática. Demonstrava ele que, com os métodos finitistas conhecidos nesse tempo, era impossível dar uma demonstração da não-contradição da aritmética. A ideia essencial da sua demonstração consiste em traduzir a metateoria na própria teoria dos números, estabelecendo uma correspondência biunívoca entre agrupamentos de sinais elementares (fórmulas) e números naturais: consegue-se assim demonstrar que é impossível dar uma demonstração da não-contradição duma teoria formalizada por meio duma metateoria que esteja contida na própria teoria. GÖDEL demonstrou ao mesmo tempo que existiam teoremas na aritmética formalizada que não podiam ser decididas no âmbito deste formalismo: a teoria formalizada era pois incompleta.

Após o primeiro momento de perplexidade ocasionada por este trabalho, teve-se a intuição de que existia ainda um caminho pelo qual podia haver a esperança de chegar ao fim em vista, que era dar uma demonstração da não-contradição da aritmética. Seria ainda necessário, evidentemente, continuar a fazer uso de métodos finitistas, mas existiriam porventura métodos mais gerais que os anteriores, que não se deixassem, como estes, traduzir na linguagem da aritmética formalizada. E foi o aluno de D. HILBERT, G. GENTZEN, quem finalmente, em 1936, conseguiu demonstrar a não-contradição da aritmética, empregando a indução transfinita até ao número ordinal

$$\varepsilon = \omega^{\omega^{\omega^{\dots}}}$$

Mais precisamente, o resultado de GENTZEN consiste no seguinte: é possível ordenar as demonstrações da teoria dos números de modo tal que, utilizando os ordinais daquele tipo, se consegue fazer uma espécie de enumeração de todas as demonstrações, pela qual se torna então possível reconhecer que nunca pode ser construída uma combinação de símbolos representativa duma contradição.

À primeira vista fica-se talvez um pouco na dúvida, sobre se esta indução transfinita é ainda um método construtivo; mas essa dúvida desfaz-se prontamente, ao aprofundar o assunto.

Uma outra demonstração mais simples do mesmo facto foi dada em 1951 por P. LORENTZEN [4], que emprega uma espécie de indução ramificada, seguindo a ordem natural de formação das demonstrações, e renunciando portanto a dispô-las artificialmente num conjunto bem ordenado (1). O método usado por LORENTZEN na sua demonstração tem isto ainda de notável: é um método algébrico; a não-contradição da aritmética surge ali como consequência do seguinte teorema de álgebra:

«Dado um conjunto parcialmente ordenado  $C$ , existe sempre uma álgebra de BOOLE completa,  $B$ , que contem  $C$  e tal que toda a álgebra de BOOLE completa contendo  $C$  é imagem homomorfa de  $B$ ».

Um outro método ainda mais simples, para demonstrar a não-contradição da aritmética, é desenvolvido por LORENTZEN em [5]. A demonstração apoia-se sobre uma formalização da matemática intuicionista.

O método de LORENTZEN é ainda aplicável para obter uma demonstração da não-contradição duma grande parte da análise. Mas é preciso notar que não se trata agora exactamente da análise clássica. Partindo do sistema  $Z_0$  não contraditório da lógica clássica e da aritmética, podem definir-se conjuntos e funções sobre  $Z_0$  por métodos construtivos. Os conjuntos e funções assim definidos fornecem os números reais de *primeiro grau*. O sistema  $Z_1$  de números, conjuntos e funções assim obtido é não contraditório e pode-se de novo, a partir de  $Z_1$ , definir conjuntos, funções, números reais do *segundo grau*, etc. A reunião de todos os  $Z_n$ , para  $n = 1, 2, \dots$  constitui o chamado *primeiro renque*,  $H_1$  (2). E neste primeiro renque obtém-se agora uma análise que já difere muito pouco da análise clássica. Até a teoria de LEBESGUE sobre a integração pode ser reproduzida sem mudança essencial na análise construtiva (LORENTZEN [7]).

Desde logo se reconhece que os graus e os renques desta nova fundamentação da análise estão relacionados com a teoria dos tipos de BERTRAND RUSSELL.

Os números reais  $e, \pi$  são já números reais do primeiro grau e, para todas as aplicações da análise, não chega a sair-se do primeiro renque.

Eu creio que com estes resultados se encontrou já uma base bastante larga. Tem-se mesmo a impressão de que tais resultados são de certo modo definitivos.

Também, sob o aspecto filosófico, é deveras interessante a possibilidade de demonstrar que tudo se passa como se o ponto de vista platónico fosse legítimo

para os números naturais. Mas, em compensação, parece impossível legitimar o mesmo ponto de vista para o contínuo clássico, isto é, para o corpo dos números reais. Com efeito, é impossível fazer uma teoria construtiva de todos os números reais. É sempre possível, sim, a partir de cada sistema formalizado de números reais, construir um outro sistema que englobe o primeiro — mas nunca se poderá construir definitivamente um formalismo que domine a totalidade dos números reais. Neste sentido o contínuo é inegotável.

Por esta ordem de ideias, é-se conduzido a uma certa relativização do conceito de número real e mesmo da lógica. Até para a lógica se obtém toda uma hierarquia de diferentes lógicas, cada vez mais ricas: neste sentido, cada demonstração é uma demonstração relativa a determinada lógica. Este campo de investigações lógicas deu origem a uma ciência inteiramente *sui generis*, que se desenvolve na actualidade.

Mas regressemos ao nosso problema inicial, à teoria dos conjuntos. Aqui a situação é talvez a mais difícil. Por exemplo, a noção de numeralidade tornou-se uma noção relativa. Segundo a teoria de LORENTZEN, um conjunto pode ser não-numerável num dado renque e passar a sê-lo num renque superior. E não se vê qual possa ser agora o sentido dos números cardinais superiores da teoria «naïve» de CANTOR.

Um outro facto notável é este: o axioma de ZERMELO torna-se demonstrável nos domínios construtivos. E GÖDEL [3] demonstrou mesmo que, se um sistema de axiomas para a teoria dos conjuntos é dado e não contraditório, então é possível juntar-lhe o axioma da escolha e mesmo a hipótese do contínuo, sem risco de contradição.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] G. GENTZEN, Math. Annalen **112** (1936), 493-565.
- [2] K. GÖDEL, Monatshefte F. Math. Phys. **38** (1931), 173-198.
- [3] K. GÖDEL, *The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory*, Princeton, Univ. Press, 1940.
- [4] P. LORENTZEN, Journ. of symbolic logic **16** (1951), 81-106.
- [5] P. LORENTZEN, Math. Zeitschrift **53** (1950), 162-201.
- [6] P. LORENTZEN, Math. Zeitschrift **54** (1951), 1-24.
- [7] P. LORENTZEN, Math. Zeitschrift **54** (1951), 275-290.

Para uma orientação sobre as questões dos fundamentos da matemática, bem como sobre a lógica matemática, podem servir os dois artigos da nova

(1) Os números entre colchetes referem-se à Bibliografia, que se encontra no fim do artigo (N. de R.).

(2) À falta de melhor, traduzimos aqui por «renque» o termo «marche» empregado pelo autor (N. da R.).

edição da «Enzyklopädie des Mathematischen Wissenschaften»: ARNOLD SCHMIDT, *Mathematische Grundlagenforschung* (Band I 1, Heft 1, Teil II, 1950); H. HERMES e H. SCHOLZ, *Mathematische Logik* (Band I 1, Heft 1, Teil I, 1952).

Um livro recente muito acessível sobre estes assuntos é o seguinte:

S. C. KLEENE, *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam (1952).

NOTA DA REDACÇÃO — O precedente artigo é uma tradução de apontamentos cedidos amavelmente pelo Prof. G. KÖTTE à Gazeta de Matemática. Ao ilustre professor manifestamos aqui a nossa viva gratidão por nos ter oferecido a possibilidade de tornar conhecida de todos os leitores da Gazeta o conteúdo desta sua conferência de tão vasto interesse, documentando assim um momento da sua brilhante actuação no nosso meio.

## Sobre a equivalência de normas em espaços vectoriais

por Jaime Campos Ferreira (\*)

O artigo presente tem primeiramente o objectivo de chamar a atenção e, se possível, o interesse de alguns estudantes de Matemática das nossas Escolas Superiores para um campo particularmente atraente da Análise moderna. De acordo com esse objectivo, procurou-se dar-lhe uma forma bastante acessível.

Serve ainda para apresentar um pequeno resultado — relativo à possibilidade de definir normas não equivalentes em qualquer espaço vectorial de dimensão infinita (†) — ao qual não me foi possível encontrar qualquer referência, se bem que, pela sua simplicidade, pareça bem pouco provável que não se encontre já publicado.

### 1. Espaços vectoriais relativos ao corpo real.

No que se segue  $E$  representa um conjunto cujos elementos, de natureza qualquer, serão designados por letras latinas minúsculas. O conjunto dos números reais será representado por  $\mathbb{R}$  e os seus elementos, em geral, por letras gregas minúsculas.

1.1. O conjunto  $E$  diz-se um *espaço vectorial relativo ao corpo real*, ou simplesmente um *espaço vectorial real*, se

1.º — A cada par  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  de elementos de  $E$  corresponde um e um só elemento do mesmo conjunto, que se chamará a *soma de  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$*  e se representará por  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ , de tal forma que resultem verificadas as condições seguintes:

a)  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$  para quaisquer elementos  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in E$ ;

b)  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$  para quaisquer elementos  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ ;

c) Dados dois elementos  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  de  $E$  existe sempre pelo menos um  $\mathbf{x} \in E$  tal que  $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

2.º — A cada par  $(\xi, \mathbf{x})$  constituído por elementos  $\xi \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{x} \in E$  corresponde um único elemento  $\xi \cdot \mathbf{x}$  ou  $\xi \mathbf{x} \in E$ , (o *produto de  $\xi$  por  $\mathbf{x}$* ), por forma que:

d)  $\xi(\eta \mathbf{x}) = (\xi \eta) \mathbf{x}$  quaisquer que sejam  $\xi, \eta \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{x} \in E$ ;

e)  $(\xi + \eta) \mathbf{x} = \xi \mathbf{x} + \eta \mathbf{x}$  quaisquer que sejam  $\xi, \eta \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{x} \in E$ ;

f)  $\xi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \xi \mathbf{x} + \xi \mathbf{y}$  para todo o  $\xi \in \mathbb{R}$  e quaisquer  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ ;

g)  $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$  para todo o  $\mathbf{x} \in E$ .

Obs. — Na definição precedente o corpo real  $\mathbb{R}$  pode ser substituído por um corpo qualquer  $K$ ;  $E$  dir-se-á então um espaço vectorial relativo ao corpo  $K$ . Para maior simplicidade, porém, só consideraremos aqui espaços vectoriais relativos ao corpo real, o que deve ser sempre subentendido.

1.2. Com facilidade se prova que das condições impostas na definição anterior resultam várias propriedades para as operações representadas pelos símbolos  $+$  e  $\cdot$ , operações que se denominam, respectivamente, *adição* e *multiplicação por escalares*. Em particular, prova-se que existe um e um só elemento  $\mathbf{u}$  de  $E$  tal que

$$\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{x} \quad \text{para todo o } \mathbf{x} \in E$$

e também que, para cada  $\mathbf{z} \in E$ , existe um e um só  $\mathbf{z}' \in E$  que verifica a igualdade

$$\mathbf{z} + \mathbf{z}' = \mathbf{u}.$$

O elemento acima designado por  $\mathbf{u}$  chama-se o *zero* de  $E$ ; em geral, prefere-se para o representar o símbolo  $0$ .  $\mathbf{z}'$ , o *simétrico de  $\mathbf{z}$* , pode representar-se por  $-\mathbf{z}$ .

(\*) Bolseiro do Instituto de Alta Cultura (Centro de Estudos Matemáticos).

(†) Ver 3.5.