edição da «Enziklopädie des Mathematischen Wissenschaften»: ARNOLD SCHMIDT, Mathematische Grundlagenforschung (Band I 1, Heft 1, Teil II, 1950); H. HERMES e H. SCHOLZ, Mathematische Logik (Band I 1, Heft 1, Teil I, 1952).

Um livro recente muito acessível sobre estes assuntos é o seguinte:

S. C. KLEENE, *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam (1952).

NOTA DA REDACÇÃO — O precedente artigo é uma tradução de apontamentos cedidos amàvelmente pelo Prof. G. KÖTHE à Gazeta de Matemática. Ao ilustre professor manifestamos aqui a nossa viva gratidão por nos ter oferecido a possibilidade de tornar conhecida de todos os leitores da Gazeta o conteúdo desta sua conferência de tão vasto interesse, documentando assim um momento da sua brilhante actuação no nosso meio.

Sobre a equivalência de normas em espaços vectoriais

por *Jaime Campos Ferreira* (*)

O artigo presente tem primeiramente o objectivo de chamar a atenção e, se possível, o interesse de alguns estudantes de Matemática das nossas Escolas Superiores para um campo particularmente atraente da Análise moderna. De acordo com esse objectivo, procurou-se dar-lhe uma forma bastante acessível.

Serve ainda para apresentar um pequeno resultado — relativo à possibilidade de definir normas não equivalentes em qualquer espaço vectorial de dimensão infinita [1] — ao qual não me foi possível encontrar qualquer referência, se bem que, pela sua simplicidade, pareça bem pouco provável que não se encontre já publicado.

1. Espaços vectoriais relativos ao corpo real.

No que se segue E representa um conjunto cujos elementos, de natureza qualquer, serão designados por letras latinas minúsculas. O conjunto dos números reais será representado por R e os seus elementos, em geral, por letras gregas minúsculas.

1.1. O conjunto E diz-se um *espaço vectorial relativo ao corpo real*, ou simplesmente um *espaço vectorial real*, se

1.º — A cada par $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ de elementos de E corresponde um e um só elemento do mesmo conjunto, que se chamará a *soma de* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ e se representará por $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, de tal forma que resultem verificadas as condições seguintes:

a) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ para quaisquer elementos $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in E$;

b) $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ para quaisquer elementos $\mathbf{x},\mathbf{y}\in E$;

c) Dados dois elementos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ de E existe sempre pelo menos um $\mathbf{x}\in E$ tal que $\mathbf{a}+\mathbf{x}=\mathbf{b}$.

2.º — A cada par $(\xi,\mathbf{x})$ constituido por elementos $\xi\in\mathrm{R}$ e $\mathbf{x}\in E$ corresponde um único elemento $\xi\,.\,\mathbf{x}$ ou $\xi\mathbf{x}\in E$, (*o produto de* ξ *por* $\mathbf{x}$), por forma que:

d) $\xi(\eta\,\mathbf{x})=(\xi\,\eta)\,\mathbf{x}$ quaisquer que sejam $\xi,\eta\in\mathrm{R}$ e $\mathbf{x}\in E$;

e) $(\xi+\eta)\,\mathbf{x}=\xi\,\mathbf{x}+\eta\,\mathbf{x}$ quaisquer que sejam $\xi,\eta\in\mathrm{R}$ e $\mathbf{x}\in E$;

f) $\xi(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\xi\,\mathbf{x}+\xi\,\mathbf{y}$ para todo o $\xi\in\mathrm{R}$ e quaisquer $\mathbf{x},\mathbf{y}\in E$;

g) $1\,.\,\mathbf{x}=\mathbf{x}$ para todo o $\mathbf{x}\in E$.

Obs. — Na definição precedente o corpo real R pode ser substituido por um corpo qualquer K; E dir-se-á então um espaço vectorial relativo ao corpo K. Para maior simplicidade, porém, só consideraremos aqui espaços vectoriais relativos ao corpo real, o que deve ser sempre subentendido.

1.2. Com facilidade se prova que das condições impostas na definição anterior resultam várias propriedades para as operações representadas pelos símbolos $+$ e $\cdot$, operações que se denominam, respectivamente, *adição* e *multiplicação por escalares*. Em particular, prova-se que existe um e um só elemento $\mathbf{u}$ de E tal que

$$\mathbf{u}+\mathbf{x}=\mathbf{x} \quad \text{para todo o} \quad \mathbf{x}\in E$$

e também que, para cada $\mathbf{z}\in E$, existe um e um só $\mathbf{z}'\in E$ que verifica a igualdade

$$\mathbf{z}+\mathbf{z}'=\mathbf{u}.$$

O elemento acima designado por $\mathbf{u}$ chama-se o *zero* de E; em geral, prefere-se para o representar o símbolo $\mathbf{0}$. $\mathbf{z}'$, o *simétrico de* $\mathbf{z}$, pode representar-se por $-\mathbf{z}$.

(*) Bolseiro do Instituto de Alta Cultura (Centro de Estudos Matemáticos).

(1) Ver 3.5.

Vê-se ainda fàcilmente que a solução da equação $\mathbf{a}+\mathbf{x}=\mathbf{b}$, exigida em $c)$, é única e precisamente $\mathbf{x}=\mathbf{b}+(-\mathbf{a})$. A expressão $\mathbf{b}+(-\mathbf{a})$ pode simplicar-se para $\mathbf{b}-\mathbf{a}$.

Algumas outras propriedades de demonstração muito simples são as seguintes:

$$\begin{array}{ll} \xi\,.\,\mathbf{0}=\mathbf{0} & \text{para todo o } \xi\in\mathrm{R}\,; \\ 0\,.\,\mathbf{x}=\mathbf{0} & \quad\text{»}\quad\text{»}\quad\text{»}\ \mathbf{x}\in E\,; \\ (-1)\,.\,\mathbf{x}=-\mathbf{x} & \quad\text{»}\quad\text{»}\quad\text{»}\ \mathbf{x}\in E\,; \\ \xi\,.\,\mathbf{x}=\mathbf{0} & \text{implica } \xi=0 \text{ ou } \mathbf{x}=\mathbf{0}. \end{array}$$

1.3. Vejamos agora alguns exemplos de espaços vectoriais reais:

1.º — *O espaço cartesiano a* n *dimensões reais*, R^n, constituido por todos os elementos $\mathbf{x}$ da forma

$$\mathbf{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n),$$

em que $\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n$ é uma sucessão de n números reais.

A multiplicação pelo escalar $\alpha\in\mathrm{R}$ é definida pela relação

$$\alpha\,\mathbf{x}=(\alpha\,\xi_1,\alpha\,\xi_2,\cdots,\alpha\,\xi_n)$$

e a adição por

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n),$$

para $\mathbf{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ e $\mathbf{y}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$.

2.º — O espaço $\mathbf{P}$, constituido por todos os polinómios na variável real ζ, com elementos da forma

$$\mathbf{x}=\alpha_0\zeta^k+\alpha_1\zeta^{k-1}+\cdots+\alpha_k$$

em que k é um inteiro não negativo e $\alpha_0,\alpha_1,\cdots\alpha_k$ são números reais quaisquer (só podendo ser $\alpha_0=0$ se $k=0$). As definições de adição de dois polinómios e de multiplicação de um polinómio por um número real são as usuais.

3.º — O espaço constituido por todas as funções reais da variável real ζ com um mesmo domínio de existência é também um espaço vectorial. O mesmo se passa com o espaço das funções limitadas, ou das funções contínuas, ou ainda das funções diferenciáveis num mesmo domínio. A adição e a multiplicação por escalares supõem-se definidas pela forma habitual.

Seria possível dar muitos mais exemplos, mas estes bastam para nos apercebermos da generalidade do conceito de espaço vectorial. Muitos conjuntos de grande interesse na Análise, em especial determinadas classes de funções, podem ser encarados, de uma forma absolutamente natural, como espaços vectoriais; em consequência, todos os resultados que se deduzem no estudo do conceito abstrato de espaço vectorial são inteiramente aplicáveis a esses conjuntos, sem necessidade de demonstrações particulares para cada caso.

2. Independência linear; base e dimensão de um espaço vectorial

2.1. Os elementos $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_k$ de um espaço vectorial E dizem-se *linearmente independentes* se a igualdade $\xi_1\mathbf{x}_1+\xi_2\mathbf{x}_2+\cdots+\xi_k\mathbf{x}_k=\mathbf{0}$ implica $\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_k=0$.

A definição anterior é aplicável apenas no caso em que os elementos considerados são em número finito. O conceito de independência linear pode, porém, definir-se para além desse caso, pela forma seguinte: diz-se que os elementos de um subconjunto infinito C do espaço vectorial E são *linearmente independentes*, quando toda a parte finita de C for constituida por elementos linearmente independentes.

Ex.: No espaço cartesiano R^n, os elementos $\mathbf{e}_1=(1,0,0,\ldots,0),\mathbf{e}_2=(0,1,0,\ldots,0),\ldots,\mathbf{e}_n=(0,0,0,\ldots,1)$ são linearmente independentes. No espaço $\mathbf{P}$ do ex. 2.º de 1.3, são linearmente independentes as potências inteiras não negativas da variável ζ.

Um conjunto $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ (finito ou infinito) de elementos de um espaço vectorial E diz-se uma *base* de E quando

1.º — $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ é constituido por elementos linearmente independentes.

2.º — Todo o elemento $\mathbf{x}\in E$ é susceptível de uma representação da forma

$$\mathbf{x}=\sum_\alpha \xi_\alpha\,\mathbf{x}_\alpha$$

subentendendo-se, naturalmente, que os coeficientes ξ_α serão todos nulos, excepto um número finito. (Atendendo à independência linear dos elementos de $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ imediatamente se reconhece que uma tal representação tem de ser única).

Ex.: É fácil verificar que o conjunto constituido pelos elementos $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n$, acima considerados, é uma base do espaço R^n; também o conjunto $(1,\zeta,\zeta^2,\cdots\zeta^n,\cdots)$ constitui uma base do espaço vectorial $\mathbf{P}$.

2.2. A propósito do conceito de base surgem já naturalmente algumas questões interessantes: em primeiro lugar, *todo o espaço vectorial terá uma base?*

Desde que se admita o célebre axioma de ZERMELO, *pode dar-se a esta pergunta uma resposta afirmativa* (1); e é logo imediato o reconhecimento da existência de uma infinidade de bases distintas, para qualquer espaço vectorial.

Assim, por exemplo, no caso do espaço R^n, poderemos tomar como base qualquer conjunto de n elementos da forma

$$(\xi_1,0,0,\cdots,0),(0,\xi_2,0,\cdots,0),\cdots,(0,0,0,\cdots,\xi_n),$$

(1) Supõe-se sempre excluido o caso de um espaço vectorial constituido por um único elemento: o zero.

desde que seja $\xi_i \neq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$. Outra base de $\mathbf{R}^n$ é o conjunto constituído pelos elementos

$$(1,0,0,\cdots,0),(1,1,0,\cdots,0),\cdots,(1,1,1,\cdots,1).$$

Também sob a condição $\xi_i \neq 0,(i=1,2,\cdots,n)$, qualquer conjunto da forma $(\xi_1,\xi_2\zeta,\xi_3\zeta^2,\cdots,\xi_{n+1}\zeta^n,\cdots)$ é uma base do espaço vectorial $\mathbf{P}$.

Nestes últimos exemplos observa-se que todas as bases do espaço $\mathbf{R}^n$ que considerámos têm o mesmo número — n — de elementos; no caso do espaço $\mathbf{P}$, as bases indicadas são também sempre constituídas por uma infinidade numerável de elementos do espaço. Apresenta-se-nos assim uma outra questão de grande importância: *terão todas as bases de um dado espaço vectorial o mesmo número de elementos?*

A resposta é de novo afirmativa: *pode provar-se que o número cardinal da base de um espaço vectorial não varia quando essa base se substitui por outra*, constituindo precisamente esse número uma característica do espaço, à qual se dá o nome de *dimensão*.

3. Espaços normados

3.1. Suponhamos agora que a cada elemento $\mathbf{x}$ de um determinado espaço vectorial real E se associa um número real $p(\mathbf{x})$, por forma que se satisfaçam as condições seguintes:

a) $p(\mathbf{x}) \geqslant 0$ para todo o $\mathbf{x} \in E$;

b) $p(\mathbf{x}) = 0$ se é só se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

c) $p(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \leqslant p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{y})$ para todo o par de elementos $\mathbf{x},\mathbf{y} \in E$;

d) $p(\xi\mathbf{x}) = |\xi|\,p(\mathbf{x})$ para todo o $\mathbf{x} \in E$ e todo o $\xi \in \mathbf{R}$.

Diz-se então que $p(\mathbf{x})$ é uma *norma sobre o espaço* E, ou que este espaço é um *espaço normado* (pela norma $p(\mathbf{x})$).

Obs. — A noção de espaço normado pode ser dada com maior generalidade. Pode definir-se da mesma maneira uma norma sobre um conjunto E que seja um espaço vectorial relativo a um corpo K, desde que em K esteja definido um valor absoluto, isto é, uma aplicação $\xi \to |\xi|$ de K em $\mathbf{R}$ satisfazendo as condições: $|\xi| \geqslant 0$; $|\xi| = 0$ se e só se $\xi = 0$; $|\xi+\eta| \leqslant |\xi| + |\eta|$; $|\xi\eta| = |\xi|\,|\eta|$, para quaisquer $\xi,\eta \in K$.

3.2. Vejamos alguns exemplos simples de normas:

1.º — A distância euclideana do ponto $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ à origem $\mathbf{0}=(0,0,\cdots 0)$, definida pela expressão

$$p_1(\mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}$$

é uma norma sobre o espaço $\mathbf{R}^n$.

Ainda no mesmo espaço, sendo $\mathbf{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, qualquer das expressões

$$p_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|$$

$$p_3(\mathbf{x}) = \max(|\xi_1|,|\xi_2|,\cdots,|\xi_n|)$$

determina uma norma.

2.º — No espaço vectorial constituído por todas as funções reais de variável real definidas e limitadas num mesmo domínio D, o extremo superior dos módulos dos valores assumidos por cada função no domínio D é uma norma.

3.3. Sabe-se bem que, partindo, por exemplo, do conceito de distância euclideana, é possível introduzir no espaço $\mathbf{R}^n$ certas noções de grande interesse, como as de vizinhança de um ponto, de conjunto aberto, de interior de um conjunto, etc; e sabe-se também que é primordial o papel desempenhado por tais noções na definição de alguns conceitos fundamentais da Análise (como os de limite e de continuidade, por exemplo), e no estudo de propriedades que com esses conceitos se relacionam.

É fácil ver agora que uma norma $p(\mathbf{x})$ sobre um determinado espaço vectorial E permite definir nesse espaço noções inteiramente análogas, facto que se pode exprimir dizendo que a norma $p(\mathbf{x})$ introduz uma *topologia* no espaço E.

Assim, sendo $\mathbf{x}_0$ um elemento qualquer de E e ε um número positivo, podemos definir a *vizinhança* ε *de* $\mathbf{x}_0$ como o conjunto $V_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ de todos os elementos $\mathbf{x} \in E$ tais que

$$p(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) < \varepsilon$$

As definições de conjunto aberto, conjunto fechado, interior, exterior e fronteira de um conjunto, etc., decorrem agora da anterior definição de vizinhança exactamente como no caso do espaço $\mathbf{R}^n$. Por exemplo, um subconjunto M de E será um *conjunto aberto* se, para todo o $\mathbf{x} \in M$ existe um $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset M$.

E também o conceito de limite de uma sucessão se pode introduzir por uma forma idêntica à habitual: diz-se que a sucessão $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_n,\cdots$ de elementos de E tem por *limite* o elemento $\mathbf{x}_0 \in E$ quando para cada $\varepsilon > 0$ existe um número natural N_ε tal que para $n > N_\varepsilon$ seja $\mathbf{x}_n \in V_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$.

Suponhamos agora que E e F são dois espaços vectoriais, $p(\mathbf{x})$ uma norma sobre E e $q(\mathbf{y})$ uma norma sobre F. Se $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é uma *aplicação* de E em F (isto é, uma função unívoca definida em E e de contradomínio contido em F), dizemos que, quando $\mathbf{x}$ tende para $\mathbf{x}_0 \in E$, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ tende para o *limite* $\mathbf{y}_0 \in F$, e escrevemos

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0$$

se a cada δ corresponde um ε por forma que

$$0 < p(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) < \varepsilon \quad \text{implique} \quad q(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0) < \delta .$$

A generalização da definição de continuidade é igualmente imediata, podendo também usar-se os mesmos termos do caso clássico: $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é *contínua* no ponto $\mathbf{x}_0 \in E$ se para cada vizinhança W de $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ existe uma vizinhança V de $\mathbf{x}_0$ tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in W$ para todo o $\mathbf{x} \in V$.

Se acrescentarmos que, ao longo deste processo de generalização, se conserva a maior parte das propriedades essenciais relativas aos conceitos considerados, ver-se-á com clareza até que ponto o caminho seguido é natural.

3.4. O conceito de norma, que acima se introduziu, e as considerações que a seu respeito foram feitas, sugerem-nos agora mais alguns problemas:

1.º — *Será sempre possível definir uma norma sobre um dado espaço vectorial?*

2.º — *Se* $p(\mathbf{x})$ *e* $q(\mathbf{x})$ *são duas normas sobre um mesmo espaço* E, *qual é a condição para que as duas normas introduzam nesse espaço a mesma topologia?*

Verificaremos adiante que *é sempre possível definir num espaço vectorial uma infinidade de normas*, ficando assim resolvida a primeira questão. Quanto à segunda comecemos por esclarecê-la um pouco melhor: o que se pretende é saber as condições em que, dos dois sistemas de vizinhanças de cada elemento $\mathbf{x}_0 \in E$ que, a partir das normas $p(\mathbf{x})$ e $q(\mathbf{x})$, são definidos pelas expressões

$$p(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) < \varepsilon \qquad q(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) < \delta$$

(ε e δ números positivos arbitrários), resultam exactamente os mesmos conjuntos abertos, os mesmos conjuntos fechados, a mesma noção de limite, etc.

Segundo um resultado elementar da Topologia Geral, *condição necessária e suficiente para que tal aconteça é que qualquer das vizinhanças de cada um desses sistemas contenha uma vizinhança do outro* (para todo o $\mathbf{x}_0 \in E$). E é fácil reconhecer que *esta condição é satisfeita se e só se existem dois números positivos* α *e* β *tais que*

$$\alpha\, p(\mathbf{x}) \leqslant q(\mathbf{x}) \leqslant \beta\, p(\mathbf{x}) \qquad \text{qualquer que seja } \mathbf{x} \in E .$$

Quando existem dois números α e β nas condições anteriores, as normas $p(\mathbf{x})$ e $q(\mathbf{x})$ dizem-se *equivalentes:* elas introduzem então, no espaço vectorial E, a mesma topologia.

Assim, as três normas $p_1(\mathbf{x})$, $p_2(\mathbf{x})$, $p_3(\mathbf{x})$ sobre o espaço $\mathbf{R}^n$, que foram definidas em **3.2.**, são equivalentes, como se vê pelas relações

$$p_3(\mathbf{x}) \leqslant p_1(\mathbf{x}) \leqslant p_2(\mathbf{x}) \leqslant n\, p_3(\mathbf{x})$$

cuja justificação é imediata.

De resto, não é difícil demonstrar que *quaisquer duas normas sobre o espaço* $\mathbf{R}^n$ *são equivalentes*, isto é que, sobre um espaço de dimensão finita, todas as normas introduzem a mesma topologia (¹).

3.5. Surge naturalmente nesta altura uma nova questão: *serão os espaços* $\mathbf{R}^n$ *os únicos que gosam desta propriedade ou, pelo contrário, haverá espaços de dimensão infinita em que todas as normas sejam equivalentes?*

Responderemos a esta pregunta mostrando que, *dado um espaço vectorial de dimensão infinita, é sempre possível definir sobre ele normas não equivalentes.*

Seja E um espaço vectorial real (²) de dimensão finita ou infinita e $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ uma base de E. Se $\mathbf{x}$ designa um elemento qualquer do espaço E, sabe-se que existe uma representação da forma $\mathbf{x} = \sum\limits_{\alpha} \xi_\alpha^{\mathbf{x}}\, \mathbf{x}_\alpha$, em que os coeficientes $\xi_\alpha^{\mathbf{x}}$ são números reais (todos nulos, excepto um número finito), univocamente determinados pelo elemento $\mathbf{x}$.

Designemos por f uma qualquer aplicação da base $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ no conjunto $\mathbf{R}^+$ dos números positivos. Nestas condições, verifica-se imediatamente que a expressão

$$p_f(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} f(\mathbf{x}_\alpha)\, \left| \xi_\alpha^{\mathbf{x}} \right| ,$$

em que $f(\mathbf{x}_\alpha)$ representa o valor da aplicação f no ponto $\mathbf{x}_\alpha$ da base, define uma norma sobre E. (Repare-se que assim se confirma a resposta que foi dada à 1.ª questão enunciada em **3.4.**).

Admitamos agora que a dimensão de E é infinita. Existe então sempre um conjunto numerável $C = (\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \cdots, \mathbf{x}_n^*, \cdots)$, contido na base $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ do espaço E. Consideremos duas aplicações f_1 e f_2 (de $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ em $\mathbf{R}^+$), que satisfaçam as condições:

$$f_1(\mathbf{x}_n^*) = 1 \qquad f_2(\mathbf{x}_n^*) = n$$

para todo o $\mathbf{x}_n^* \in C$, sendo arbitrária a definição de f_1 e f_2 nos pontos do complementar de C em $\{\mathbf{x}_\alpha\}$.

(¹) Segundo um teorema da teoria do espaços localmente convexos, *são idênticas todas as topologias localmente convexas separadas sobre qualquer espaço de dimensão finita*, resultado de que o facto acima apontado é um caso particular.

(²) De acordo com a observação final de **1.1.**, supõe-se que E é um espaço vectorial real; a demonstração serve, porém, passo por passo, para o caso mais geral de um espaço vectorial relativo a um corpo qualquer munido de um valor absoluto, a que se fez referência em **3.1.** (Obs.).

Tomando as duas normas

$$p_1(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} f_1(\mathbf{x}_\alpha) \left| \xi_\alpha^{\mathbf{x}} \right| \quad \text{e} \quad p_2(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} f_2(\mathbf{x}_\alpha) \left| \xi_\alpha^{\mathbf{x}} \right|,$$

e designando por M um número real arbitrário, é

$$\frac{p_2(\mathbf{x}_n^*)}{p_1(\mathbf{x}_n^*)} = \frac{\sum_{\alpha} f_2(\mathbf{x}_\alpha) \left| \xi_\alpha^{\mathbf{x}_n^*} \right|}{\sum_{\alpha} f_1(\mathbf{x}_\alpha) \left| \xi_\alpha^{\mathbf{x}_n^*} \right|} = \frac{f_2(\mathbf{x}_n^*)}{f_1(\mathbf{x}_n^*)} = n > M,$$

desde que n seja suficientemente grande.

As normas $p_1(\mathbf{x})$ e $p_2(\mathbf{x})$ não são, portanto, equivalentes, ficando assim provado o que se propunha [1].

É evidente que na definição das aplicações f_1 e f_2 se pode usar uma larga margem de arbitrariedade, sem deixar de atingir o mesmo resultado. No caso de f_2, por exemplo, pode substituir-se a expressão $f_2(\mathbf{x}_n^*) = n$, (para todo o $\mathbf{x}_n^* \in C$), por $f_2(\mathbf{x}_n^*) = \varphi(n)$, sendo $\varphi(n)$ um qualquer infinitamente grande com n. Escolhendo infinitamente grandes de ordens diversas, obter-se-ão sempre normas não equivalentes (duas a duas), vendo-se portanto imediatamente que *há possibilidade de determinar infinitas normas por forma que todas introduzam em* E *topologias distintas.*

A noção de corpo rígido em Relatividade Restrita [*]

por **Ruy Luís Gomes**

Em cinemática clássica diz-se que *um corpo ou sistema de pontos materiais é rígido se a distância de dois quaisquer dos seus pontos não varia com o tempo.*

Mas é preciso não esquecer que (em cinemática clássica), tanto o tempo como a distância (de posições simultâneas) têm carácter absoluto, isto é, não dependem do sistema admissível [2] em que são medidos.

Esta simples observação mostra que se quizermos utilizar aquela definição no domínio da Relatividade Restrita, temos de a interpretar convenientemente, pois é necessário esclarecer em que referencial devemos calcular distâncias e tempo, uma vez que os seus valores variam de referencial para referencial.

Ora quem pela primeira vez considerou o problema dos corpos rígidos em Relatividade Restrita foi o célebre físico alemão, MAX BORN, que adoptou a seguinte definição [3]: *um corpo move-se (em relação a um sistema admissível) como um corpo rígido, se as linhas de universo dos seus pontos são curvas equidistantes.* Mas este enunciado tem ainda uma certa ambiguidade.

Na verdade, se considerarmos o caso particular de um corpo rígido em repouso num sistema admissível, as linhas de universo de dois dos quaisquer dos seus pontos terão equações da forma

$$x_i = v_i\, t + a_i$$
$$x_i = v_i\, t + b_i$$

e embora a sua distância [4] $I_{\mathrm{u}}^{\mathrm{v}}$ se mantenha constante (no tempo de qualquer sistema admissível), o certo é que o seu valor depende de um elemento u, estranho ao corpo em questão.

Consequentemente, só a distância I^{v} está ligada *apenas* ao próprio corpo e este facto é que leva a completar a definição de M. BORN nos seguintes termos: *um corpo move-se como corpo rígido, se as linhas de universo dos seus pontos são curvas equidistantes no espaço e no tempo do próprio corpo.*

Para estudar o problema da rigidês em Relatividade Restrita temos, pois, de calcular I^{v}, mas adaptando a doutrina desenvolvida no nosso artigo anterior [4] ao caso de P e Q terem movimentos quaisquer.

Ora tratando um corpo sólido como um caso particular de um meio contínuo tridimensional, os seus diferentes pontos ficarão completamente individuados por meio de três parâmetros η_1, η_2, η_3. E a linha de universo do ponto genérico (η_1, η_2, η_3) terá as equações

$$x_i = x_i(\eta_1, \eta_2, \eta_3, t), \tag{1}$$

sendo x_i, t coordenadas admissíveis quaisquer.

É evidente que (1) generalizam (3), artigo anterior.

Introduzindo um *tempo local* [5], nomeadamente o *tempo próprio* τ do ponto (η_1, η_2, η_3) do corpo em

(1) Daqui se segue imediatamente o recíproco do teorema citado em (3); portanto: *condição necessária e suficiente para que sejam idênticas todas as topologias localmente convexas separadas sobre um espaço vectorial* E *é que a dimensão de* E seja *finita.*

(*) Não temos notícia de este assunto ter sido já tratado por autores portugueses e isso constitui, só por si, motivo para o considerarmos nesta revista, tanto mais que permite acrescentar novos esclarecimentos ao problema das *distâncias próprias.*

(2) O tempo é até independente de todo o referencial e a própria distância de posições simultâneas é um invariante de um grupo mais amplo do que o de GALILEU.

(3) *Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips* — Annalen der Physik, 30 (1909).

(4) Sobre a noção de distância em Relatividade Restrita, *Gazeta de Matemática*, n.º 57, p. 3, 4.

(5) Consultar G. HERGLOTZ — *Über den vom Standpunkt des Relativitätsprinzips aus als «starr» zu bezeichnenden Körper*, Annalen der Physik, 31 (1910).