Tomando as duas normas

$$p_1(\mathbf{x}) = \sum_\alpha f_1(\mathbf{x}_\alpha) \left| \xi_\alpha^{\mathbf{x}} \right| \quad \text{e} \quad p_2(\mathbf{x}) = \sum_\alpha f_2(\mathbf{x}_\alpha) \left| \xi_\alpha^{\mathbf{x}} \right| ,$$

e designando por M um número real arbitrário, é

$$\frac{p_2(\mathbf{x}_n^*)}{p_1(\mathbf{x}_n^*)} = \frac{\sum_\alpha f_2(\mathbf{x}_\alpha) \left| \xi_\alpha^{\mathbf{x}_n^*} \right|}{\sum_\alpha f_1(\mathbf{x}_\alpha) \left| \xi_\alpha^{\mathbf{x}_n^*} \right|} = \frac{f_2(\mathbf{x}_n^*)}{f_1(\mathbf{x}_n^*)} = n > M ,$$

desde que n seja suficientemente grande.

As normas $p_1(\mathbf{x})$ e $p_2(\mathbf{x})$ não são, portanto, equivalentes, ficando assim provado o que se propunha (1).

É evidente que na definição das aplicações f_1 e f_2 se pode usar uma larga margem de arbitrariedade, sem deixar de atingir o mesmo resultado. No caso de f_2, por exemplo, pode substituir-se a expressão $f_2(\mathbf{x}_n^*) = n$, (para todo o $\mathbf{x}_n^* \in C$), por $f_2(\mathbf{x}_n^*) = \varphi(n)$, sendo $\varphi(n)$ um qualquer infinitamente grande com n. Escolhendo infinitamente grandes de ordens diversas, obter-se-ão sempre normas não equivalentes (duas a duas), vendo-se portanto imediatamente que *há possibilidade de determinar infinitas normas por forma que todas introduzam em* E *topologias distintas.*

A noção de corpo rígido em Relatividade Restrita (*)

por **Ruy Luís Gomes**

Em cinemática clássica diz-se que *um corpo ou sistema de pontos materiais é rígido se a distância de dois quaisquer dos seus pontos não varia com o tempo.*

Mas é preciso não esquecer que (em cinemática clássica), tanto o tempo como a distância (de posições simultâneas) têm carácter absoluto, isto é, não dependem do sistema admissível (2) em que são medidos.

Esta simples observação mostra que se quizermos utilizar aquela definição no domínio da Relatividade Restrita, temos de a interpretar convenientemente, pois é necessário esclarecer em que referencial devemos calcular distâncias e tempo, uma vez que os seus valores variam de referencial para referencial.

Ora quem pela primeira vez considerou o problema dos corpos rígidos em Relatividade Restrita foi o célebre físico alemão, MAX BORN, que adoptou a seguinte definição (3): *um corpo move-se (em relação a um sistema admissível) como um corpo rígido, se as linhas de universo dos seus pontos são curvas equidistantes.* Mas este enunciado tem ainda uma certa ambiguidade.

Na verdade, se considerarmos o caso particular de um corpo rígido em repouso num sistema admissível, as linhas de universo de dois dos quaisquer dos seus pontos terão equações da forma

$$x_i = v_i\, t + a_i$$
$$x_i = v_i\, t + b_i$$

e embora a sua distância (4) $I_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}}$ se mantenha constante (no tempo de qualquer sistema admissível), o certo é que o seu valor depende de um elemento u, estranho ao corpo em questão.

Consequentemente, só a distância $I^{\mathbf{v}}$ está ligada *apenas* ao próprio corpo e este facto é que leva a completar a definição de M. BORN nos seguintes termos: *um corpo move-se como corpo rígido, se as linhas de universo dos seus pontos são curvas equidistantes no espaço e no tempo do próprio corpo.*

Para estudar o problema da rigidês em Relatividade Restrita temos, pois, de calcular $I^{\mathbf{v}}$, mas adaptando a doutrina desenvolvida no nosso artigo anterior (4) ao caso de P e Q terem movimentos quaisquer.

Ora tratando um corpo sólido como um caso particular de um meio contínuo tridimensional, os seus diferentes pontos ficarão completamente individuados por meio de três parâmetros η_1, η_2, η_3. E a linha de universo do ponto genérico (η_1, η_2, η_3) terá as equações

$$(1) \qquad x_i = x_i(\eta_1, \eta_2, \eta_3, t),$$

sendo x_i, t coordenadas admissíveis quaisquer.

É evidente que (1) generalizam (3), artigo anterior.

Introduzindo um *tempo local* (5), nomeadamente o *tempo próprio* τ do ponto (η_1, η_2, η_3) do corpo em

(1) Daqui se segue imediatamente o recíproco do teorema citado em (3); portanto: *condição necessária e suficiente para que sejam idênticas todas as topologias localmente convexas separadas sobre um espaço vectorial* E *é que a dimensão de* E seja *finita.*

(*) Não temos notícia de este assunto ter sido já tratado por autores portugueses e isso constitui, só por si, motivo para o considerarmos nesta revista, tanto mais que permite acrescentar novos esclarecimentos ao problema das *distâncias próprias.*

(2) O tempo é até independente de todo o referencial e a própria distância de posições simultâneas é um invariante de um grupo mais amplo do que o de GALILEU.

(3) *Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips* — Annalen der Physik, 30 (1909).

(4) Sobre a noção de distância em Relatividade Restrita, *Gazeta de Matemática*, n.° 57, p. 3, 4.

(5) Consultar G. HERGLOTZ — *Über den vom Standpunkt des Relativitätsprinzips aus als «starr» zu bezeichnenden Körper*, Annalen der Physik, 31 (1910).

questão, tempo que varia com t segundo uma equação da forma

$$\tau = \tau(\eta_1, \eta_2, \eta_3, t), \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} > 0, \tag{2}$$

podemos representar as linhas de universo dos pontos do corpo pelas equações paramétricas

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \tau) \\ t &= t\ (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \tau) \end{aligned}, \tag{3}$$

com a vantagem de ficar em evidência o *tempo próprio* τ e não o tempo admissível t.

Nestes termos um deslocamento elementar dx_i, dt do ponto (η_1, η_2, η_3) é caracterizado por

$$\begin{aligned} dx_i &= \frac{\partial x_i}{\partial \tau} d\tau \\ dt &= \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \end{aligned}, \tag{4}$$

pois $d\eta_1 = d\eta_2 = d\eta_3 = 0$. E as equações (4) substituem (6'), artigo anterior.

Anàlogamente as equações (6), artigo anterior, são substituídas por

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \sum \frac{\partial x_i}{\partial \eta_k} \delta \eta_k + \frac{\partial x_i}{\partial \tau} \delta \tau \\ \delta t &= \sum \frac{\partial t}{\partial \eta_k} \delta \eta_k + \frac{\partial t}{\partial \tau} \delta \tau \end{aligned}, \tag{5}$$

em que não figura um deslocamento finito $\Delta' x_i, \Delta' t$ mas apenas um deslocamento elementar $\delta x_i, \delta t$, e entre dx_i, dt e δx_i, δt, subsiste a relação de ortogonalidade

$$\Sigma \delta x_i \, dx_i - c^2 \delta t \, dt = 0. \tag{6}$$

Finalmente, a distância de dois pontos vizinhos η_i e $\eta_i + \delta \eta_i$, medida na variedade própria de η_i e no instante τ é dada por

$$\delta \sigma^2 = \Sigma \delta x_i^2 - c^2 \delta t^2. \tag{7}$$

E dizer que o corpo ou sistema dos pontos η_i se move como corpo rígido é dizer que $\delta \sigma^2$ não depende de τ.

É esta a interpretação que deve ser dada ao enunciado de MAX BORN e foi precisamente nela que se baseou G. HERGLOTZ para *demonstrar* [1] *que um corpo rígido tem apenas três graus de liberdade e não seis como na cinemática clássica.*

Deixamos essa demonstração para um outro artigo; neste queremos acrescentar sòmente a expressão de $\delta \tau^2$ em termos de η_i e τ.

Substituindo em (7) δx_i e δt pelos seus valores (5), virá

$$\delta \sigma^2 = \sum_{p,q} g^{pq} \delta \eta_p \delta \eta_q, \qquad p, q = 1, \cdots, 4, \tag{8}$$

em que $\eta_4 = \tau$.

Mas como a relação de ortogonalidade, expressa também em η_i e τ, tem a forma geral.

$$\sum_{p,q} g_{pq} \delta \eta_p \, d\eta_q = 0, \tag{9}$$

resulta, no caso que nos interessa,

$$\sum_p g_{p4} \delta \eta_p = 0, \tag{10}$$

pois os deslocamentos $d\eta_p$ de um ponto de corpo são caracterizados por $d\eta_1 = d\eta_2 = d\eta_3 = 0$ e $d\eta_4 = d\tau \neq 0$.

Eliminando agora $\delta \eta_4$ por intermédio de (10) ou (1)

$$\delta \eta_4 = \frac{\sum_i g_{i4} \delta \eta_i}{-g_{44}}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{10'}$$

vem

$$\delta \sigma^2 = \sum g_{ik} \delta \eta_i \delta \eta_k + \frac{(\Sigma g_{i4} \delta \eta_i)^2}{-g_{44}} \tag{11}$$

ou seja finalmente

$$\delta \sigma^2 = \sum \gamma_{ik} \delta \eta_i \delta \eta_k, \tag{12}$$

em que

$$\gamma_{ik} = g_{ik} + \frac{g_{i4} \, g_{k4}}{-g_{44}}. \tag{13}$$

A condição de rigidez exprime-se, portanto, pelas equações

$$\frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial \tau} = 0:$$

um corpo move-se como corpo rígido se os coeficientes γ_{ik} da forma (12), *que dá a distância própria do corpo, não dependem do tempo próprio τ.*

Assim, em particular, os sistemas de inércia são sistemas rígidos, pois neles

$$\delta \sigma^2 = \sum \delta x_i^2$$

não depende do tempo próprio t.

NOTA — O último artigo saiu com numerosas gralhas, quási todas felizmente de fácil correcção.

Assim, na página 4 deve escrever-se, na primeira coluna,

$$I_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}} = -\frac{(\mathbf{v} \mid \mathbf{r})^2}{v^2 - c^2} + \mathbf{r}^2,$$

e na segunda

$$\theta = \frac{\pi}{2} \to I_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}} = I_{\mathbf{0}}^{\mathbf{v}}$$

$$\theta = 0 \to I_{\mathbf{0}}^{\mathbf{v}} = (1 - \beta^2) \, I_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}},$$

e, três linhas abaixo, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

---

(1) $g_{44} \neq 0$ pois todo ponto material tem velocidade menor que a luz e isso exige $g_{pq} \, d\eta_p \, d\eta_q = g_{44} (d\eta_4)^2 < 0$, dando efectivamente $g_{44} < 0$, para $d\eta_i = 0$.

Finalmente as fórmulas (14′) e (15) devem escrever-se

$$(14') \qquad (v^2-c^2)\,\mathbf{u}|\mathbf{r}-2 \qquad \mathbf{v}|\mathbf{r}\,(\mathbf{u}|\mathbf{v}-c^2)=0$$

$$(15) \qquad \mathbf{u}|[(v^2-c^2)\,\mathbf{r}-2\,\mathbf{v}|\mathbf{r}\,.\,\mathbf{v}]=-2\,\mathbf{v}|\mathbf{r}\,.\,c^2.$$

Além destas gralhas é necessário ainda observar, como salientou o Prof. MIRA FERNANDES [1], que as soluções u, dadas pela equação (15), *não constituem um plano, como aí erradamente se disse.*

Fazendo

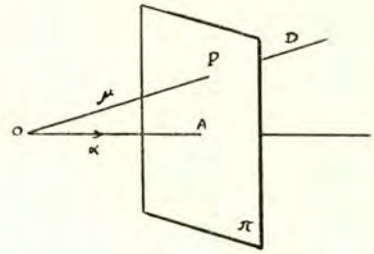
$$-\boldsymbol{\alpha}=\frac{v-c}{\mathbf{v}|\mathbf{r}}\,\mathbf{r}-2\,\mathbf{v},$$

(15) toma a forma

$$\mathbf{u}|\boldsymbol{\alpha}=-2\,c^2,$$

donde se conclui que a projecção de **u** sobre $\boldsymbol{\alpha}$ é igual a $\dfrac{2\,c^2}{\operatorname{mod}\boldsymbol{\alpha}}$.

Sendo O uma origem qualquer a partir da qual construímos o vector $\boldsymbol{\alpha}$, e π um plano ortogonal a $\boldsymbol{\alpha}$, cortando a direcção de $\boldsymbol{\alpha}$ no ponto A tal que $\mathbf{OA}=\dfrac{2\,c^2}{\operatorname{mod}\boldsymbol{\alpha}}$, *em qualquer direcção* **OD** que encontra π no ponto P, o vector $\mathbf{u}=P-0$ satisfaz ao problema.



As soluções de (15) são, pois, *uma* para cada direcção*:* aquela cuja projecção sobre $\boldsymbol{\alpha}$ é a constante $\dfrac{2\,c^2}{\operatorname{mod}\boldsymbol{\alpha}}$.

Se tivermos em conta a condição suplementar $u^2<c^2$, as soluções possíveis formarão um *cone* de raio $\mathbf{AP}=c^2\dfrac{d^2}{1+d^2}$, em que $d^2=\dfrac{(v^2-c^2)}{(\mathbf{v}|\mathbf{r})^2}\left(\dfrac{r}{2\,c}\right)$.

[1] Numa carta que nos dirigiu, donde *transcrevemos* os desenvolvimentos que seguem.

A classroom note on the proof of Schur's lemma [*]

by Hugo Ribeiro

Let $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ be vector spaces over the same field, $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ non void families of linear mappings respectively on $\mathfrak{M}$ into $\mathfrak{M}$ and on $\mathfrak{N}$ into $\mathfrak{N}$, and F a linear mapping on $\mathfrak{N}$ into $\mathfrak{M}$ such that for any $B\in\mathfrak{B}$ there is $A\in\mathfrak{A}$ for which $AF=FB$. Schur's lemma says, now, that if $\mathfrak{B}$ is irreducible [2] then either F is the null mapping or it is non singular (and $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ have same dimension).

To prove this we first, remark that if we disregard, above, the word «linear» and substitute «vector spaces over the same field» by «sets», then we immediately obtain the following (involving just sets and mappings): if $\mathfrak{O}\subset\mathfrak{M}$ is such that for any $A\in\mathfrak{A}$, $A(\mathfrak{O})\subset\mathfrak{O}$ and if $\mathfrak{Z}$ is the set of all elements of $\mathfrak{N}$ having image in $\mathfrak{O}$, under F, then for any $B\in\mathfrak{B}$, $B(\mathfrak{Z})\subset\mathfrak{Z}$. (In fact, for any $B\in\mathfrak{B}$, $AF(\mathfrak{Z})=FB(\mathfrak{Z})$ for some $A\in\mathfrak{A}$, but $A(\mathfrak{O})\subset\mathfrak{O}$, hence $AF(\mathfrak{Z})\subset\mathfrak{O}$, so that $B(\mathfrak{Z})\subset\mathfrak{Z}$).

We have now the Schur's lemma, as a corollary, by just taking as $\mathfrak{O}$ the null subspace of $\mathfrak{M}$ and using some basic knowledge on linear mappings: for, then, $\mathfrak{Z}$ is a subspace of $\mathfrak{N}$ and, since on one hand for any $B\in\mathfrak{B}$, $B(\mathfrak{Z})\subset\mathfrak{Z}$ and on the other hand $\mathfrak{B}$ is supposed irreducible, we will have that either $\mathfrak{Z}$ is $\mathfrak{N}$ or it is the null subspace of $\mathfrak{N}$, hence either F is the null mapping or it is non-singular [3].

[*] We are grateful to Prof. N. JACOBSON for the following references to the same type of reasoning used in this proof: N. JACOBSON, The Theory of Rings, Am. Math. Soc., 19, p. 57, R. BRAUER, On sets of matrices with coefficients in a division ring. Tran. Am. Math. Soc., vol. 49, 1941, p. 514.

[2] That is, no proper subspace of $\mathfrak{N}$ is left invariant by all $B\in\mathfrak{B}$.

[3] Presented to the 1951 meeting of the Nebraska Section of the Mathematical Association of America.