COLÓQUIO INTERNACIONAL DE GEOMETRIA DIFERENCIAL — Estraburgo, 1953

O «Centre National de la Recherche Scientifique» francês promoveu a organização dum colóquio internacional de Geometria Diferencial que teve lugar em Estraburgo de 26 a 31 de Maio deste ano. No colóquio participaram numerosos matemáticos franceses e estrangeiros. Deve-se principalmente aos Profs. C. Ehresmann e A. Lichnerowicz a organização desta reunião científica.

Realizaram-se as seguintes conferências, seguidas, como é habitual, de discussão:

E. T. Davies, (Southampton) — *Invariant theory of contact transformations.*

P. Dedecker, (Bruxelles) — *Calcul des variations; formes différentielles et champs géodésiques.*

H. Rund, (Bonn) — *Finsler geometry applied analytical dynamics.*

M. Villa, (Bologna) — *Recherche de types particuliers de transformations ponctuelles.*

T. J. Willmore, (Durham) — *Local and global properties of the harmonic riemannian spaces.*

E. Heinz, (Goettigen) — *Ein Satz über die Gaussche Krümmung ein Minimalfläche mit einer eineindentigen Projection auf eine Ebene.*

E. Bompiani (Roma) — *Procédés différentiels pour trouver des caractères de certaines variétés algébriques.*

S. S. Chern, (Chicago) — *Infinite continuous groups.*

Ch. Ehresmann, (Strasbourg) — *Structures infinitésimales et pseudogroupes de Lie.*

P. Libermann, (Strasbourg) — *Sur certaines structures infinitésimales régulières.*

A. Lichnerowicz, (Paris) — *Espaces homogènes kählériens.*

B. Eckmann, (Zurich) — *Sur les structures complexes et presque complexes.*

N. H. Kuiper, (Wageningen) — *Sur les surfaces localement affines.*

J. L. Koszul, (Strasbourg) — *Sur certains espaces de Lie.*

A. Weil, (Chicago) — *Points infiniment voisins sur les variétés.*

R. Thom, (Strasbourg) — *Variétés différentiables cobordantes.*

L. Schwartz, (Paris) — *Courant associé à une forme différentielle méromorphe sur une variété analytique complexe.*

Souriau, (Tunis) — *Géométrie différentielle symplectique.*

G. Reeb, (Strasbourg) — *Sur certaines propriétés des espaces de Finsler et de Cartan.*

M. Z.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DE EXAME DO 3.º CICLO DO ENSINO LICEAL E DE EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Exames de aptidão para frequência dos preparatórios para a Faculdade de Engenharia — Ano de 1954 — Ponto 1.

3781 — Resolva a inequação

$$1-\frac{2(x-1)^3}{3}<\frac{1}{6}(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})-\frac{2}{3}x^3$$

R: *A inequação proposta é equivalente sucessivamente às seguintes:* $6-4(x^3-3x^2+3x-1)<x^2-2-$ $-4x^3$; $11x^2-12x+12<0$. *Os zeros do primeiro membro da última inequação são os números* $x_1=$ $=(6+i\sqrt{96}):11$ *e* $x_2=(6-i\sqrt{96}):11$ *e o trinómico, para qualquer valor real de* x *toma sempre o sinal do coeficiente de* x^2; *por isso a inequação não tem soluções reais.*

3782 — Simplifique a fracção

$$\frac{x^2+(\sqrt{a}-\sqrt{b})x-\sqrt{ab}}{x^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})x+\sqrt{ab}}$$

R: *A fracção pode escrever-se:* $[(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{b})]:$ $:[(x-\sqrt{a})(x-\sqrt{b})]$ *por serem* $-\sqrt{a}$ *e* $+\sqrt{b}$ *as raizes do numerador e* $+\sqrt{a}$ *e* $+\sqrt{b}$ *as raizes do denominador. A fracção simplificada será* $(x+\sqrt{a}):(x-\sqrt{a})$.

3783 — Desenvolva

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$$

Simplificando os seus termos. Verifique o desenvolvimento para $x=4$.

R: *Será* $(\sqrt{x}+1/\sqrt{x})^8=(x+1)^8:(\sqrt{x})^8=$ $=(x^8+8x^7+28x^6+56x^5+70x^4+56x^3+28x^2+$ $+8x+1):x^4=x^4+8x^3+28x^2+56x+70+56:x+$ $+28:x^2+8:x^3+1:x^4$.

3784 — Escreva a equação do 1.º grau que tem para raizes

$$x=13t+5$$
$$y=10t-1$$

Sendo t um número inteiro qualquer.

R: *O enunciado do problema não é suficientemente claro pois uma solução seria* $x + y = 23t + 4$ *e há uma infinidade de equações que, nestes termos, verificam o enunciado como fàcilmente se reconhece. Julga-se que se pretende uma equação em* x *e* y *do 1.º grau cujas soluções inteiras sejam dadas por aquelas fórmulas e nessas condições a equação será* $x = 13 \times (y+1) : 10 + 5$ *ou ainda* $10x - 13y = 63$.

3785 — Defina permutações de 4 letras. Escreva-as de modo a mostrar a sua lei de formação e verifique o seu número pela fórmula respectiva.

R: $P_4 = 4! = 24$.

3786 — A área dum rectângulo é igual a 20 m² e o seu perímetro igual a 16 m. Determine o ângulo que fazem entre si as diagonais.

R: *Se forem* x *e* y *os lados do rectângulo as suas medidas serão as raizes da equação* $X^2 - 8X + 20 = 0$ *e portanto* $X = 4 \pm 2i$; *logo não existe nenhum rectângulo com aquelas medidas.*

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, Ciências Físico-Químicas e Ciências Geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos — Ano de 1954 — Ponto n.º 1.

3787 — Provar que, se dois números naturais não são divisíveis por 3, ou a sua soma ou a sua diferença é divisível por 3.

R: *Se dois números naturais não são divisíveis por* 3 *ou são da forma* $3n+1$ *ou da forma* $3p-1$. *Se os dois são da mesma forma, digamos* $3n+1$ *e* $3m+1$ *a sua diferença* $3n+1-(3m+1) = 3(n-m)$ *é um múltiplo de* 3. *Se são um da forma* $3m+1$ *o outro da forma* $3p-1$ *a sua soma* $3m+1+3p-1 = 3(m+p)$ *é um múltiplo de* 3.

3788 — Determinar o menor quadrado perfeito que é múltiplo de 4536.

R: *Como* $4536 = 2^3 \times 3^4 \times 7$ *o número pedido é evidentemente* $4536 \times 2 \times 7 = 63504$.

3789 — Quais os valores de a para os quais $50 + a$ é divisível por a? Justificar.

R: *Como* a *tem de dividir* 50 *por dividir a outra parcela da soma,* a *será um divisor de* 50 *e portanto um dos números* 1, 2, 5, 10, 25, *ou* 50.

3790 — Determinar os três menores múltiplos inteiros positivos de 28 que divididos por 15 dão o resto 9.

R: *Os múltiplos de* 28 *são da forma* $28x$ *onde* x *é um inteiro, e portanto terá que ser* $28x = 15y + 9$ *para que divididos por* 15 *dêm resto* 9. *Trata-se agora de determinar as três menores (para* x*) soluções inteiras e positivas daquela equação. Por simples substituição é fácil ver que* 3 *é o primeiro valor de* x *para o qual se verifica o enunciado e as soluções daquela equação são da forma* $x = 3 + 15m$ *e* $y = 5 + 28m$. *Como só nós interessam os valores de* x *teremos os valores* 3, 18 *e* 33 *e portanto os múltiplos de* 28 *pedidos são* **84, 504** *e* **924**.

3791 — Determinar m de modo que $x^2 - 2mx + 5m + 6$ seja positivo para todos os valores reais de x.

R: *Como se trata de um trinómio do segundo grau, em* x, *basta que o descriminante seja negativo, isto é, que seja* $m^2 - (5m+6) < 0$, *ou* $m^2 - 5m - 6 < 0$; *como as raizes deste segundo trinómio são* $m_1 = 6$ *e e* $m_2 = -1$ *basta que seja* $-1 < m < 6$ *para que se verifiquem as condições do enunciado.*

3792 — Determinar os valores de x que tornam iguais o 4.º e o 5.º termos do desenvolvimento de $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x-3}\right)^7$.

R: *Os 4.º e 5.º termos do desenvolvimento são da forma* $T_4 = {}^7C_3\left(-\frac{1}{x-3}\right)^3 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^4$ *e* $T_5 = {}^7C_4 \times \left(-\frac{1}{x-3}\right)^4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^3$. *Como além disso é* ${}^7C_3 = {}^7C_4$ *obtem-se* $-\left(\frac{1}{x-3}\right)^3 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{x-3}\right)^4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^3$ *ou ainda* $-\frac{x}{2} = \frac{1}{x-3}$ *e* $x(x-3) + 2 = 0$ *ou* $x^2 - 3x + 2 = 0$ *equação que tem as raizes* $x_1 = 2$ *e* $x_2 = 1$ *que por serem diferentes de* 3 *são os valores procurados.*

Exame de aptidão para frequência do Instituto de Ciências Económicas e Financeiras—Ano de 1954

I

3793 — As raizes da equação $x^2 - (2m+1)x + 4m = 0$ (em que $m > 1$) representam as medidas dos catetos dum triângulo rectângulo. Exprima a medida da hipotenusa do referido triângulo em função do parâmetro m. (Atendo ao teorema de Pitágoras).

R: *Se forem* x_1 *e* x_2 *as raizes da equação é* $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$; *se designarmos por* h *a hipotenusa será* $h^2 = x_1^2 + x_2^2$, *e, por isso,* $h^2 = (2m+1)^2 - 8m = (2m-1)^2$ *donde é* $h = 2m - 1$; *a solução* $1 - 2m$ *não serve por ser* $m > 1$, *pois seria então* $1 - 2m < 0$.

3794 — Quantos números pares maiores do que 10.000 se podem formar com os algarismos 0, 2, 5, 7 e 8 e de modo que em cada número não figurem algarismos repetidos?

R: *Os números terão que conter 5 algarismos e* P_5 *será o seu número total contando aqueles que começam por zero em número de* P_4; *estão em* P_5 *incluídos também os que terminam por* 7 *e por* 5. *De modo que para obtermos o número pedido teremos que subtrair a* P_5 *o número* P_4 *e depois* $(P_4 - P_3) \times 2$ *porque* $P_4 - P_3$ *é o número de números formados com aqueles algarismos que terminam por* 5 *ou* 7 *e não começam por zero. Assim teremos*

$$P_5 - P_4 - 2(P_4 - P_3) = P_5 - 3P_4 + 2P_3 =$$
$$= 2.3.4.5 - 3.2.3.4 + 2.2.3 = 2.3(20 - 12 + 2) = 60.$$

II

3795 — Calcule $f(x) = \left[\sec\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) - \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}\right]:$ $: \operatorname{sen} x$ para $x = \pi/4$.

R: $f(\pi/4) = [\operatorname{sen}(\pi/4 + 7\pi/2) + \operatorname{tg} 5.\pi/4] : \operatorname{sen} \pi/4 = = (\sqrt{2} - 1) : \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\,(\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$ por ser $\operatorname{tg} 5\pi/4 = 1$, $\operatorname{sen}\pi/4 = \sqrt{2}/2$ e $\sec 15\pi/4 = \sqrt{2}$.

3796 — Verifique a identidade $(\operatorname{cosec} x + \sec x)^2 : (\operatorname{cosec}^2 x + \sec^2 x) = 1 + \operatorname{sen} x \cos x$.

R: *Como* $\operatorname{cosec} x + \sec x = (\operatorname{sen} x + \cos x) : (\operatorname{sen} x \cos x)$ *será o primeiro membro de igualdade proposta:* $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2$ *e portanto igual a* $1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x$.

III

3797 — Quais são os números inferiores a 200 cuja *diferença* é 96 e cujo *máximo divisor comum* é 24? Justifique a resposta.

R: *Sejam* a *e* b *os números e* d *o seu máximo divisor comum. Será* $a = d.p$ *e* $b = d.q$ *onde* p *e* q *são números primos entre si. Assim será* $a = 24.p$ *e* $b = 24.q$ *e* $a - b = 96 = 24(p - q)$ *de modo que é* $p - q = 4$, *por outro lado tem que ser* $a = 24.p < 200$ *e* $b < 200$ *donde é* $p < 9$ *e* $q < 9$. *Os valores de* p *e* q *só podem por isso ser ou* 7 *e* 3 *ou* 5 *e* 1. *Os números serão então ou* 168 *e* 72 *ou* 120 *e* 24.

3798 — Demonstre que a soma de quatro inteiros *consecutivos* não divisíveis por 5 é divisível por 5, mas não é divisível por 4.

R: *Sejam* $5n+1, 5n+2, 5n+3$ *e* $5n+4$ *os números consecutivos nas condições do enunciado. A sua soma é* $20n + 10$ *que é múltiplo de* 5. *Esta soma não é um múltiplo de* 4 *porque sendo-o a primeira parcela, o não é a segunda.*

Soluções dos n.[os] 3781 a 3798 de J. Silva Paulo

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **1.º Exame de frequência — 25 de Março de 1954.**

3799 — Sendo $f(x) = \dfrac{a+x}{a-x}$ resolva os seguintes problemas:

a) Determine os pontos de intersecção da imagem de $f(x)$ com os eixos e escreva a equação da circunferência que passa por esses pontos, com centro na recta $X = 1$.

b) Escreva a equação geral da tangente à imagem de $f(x)$.

Calcule a por forma que a recta $Y = X + 1$ faça um ângulo de 60° com a tangente à curva no ponto $x = 0$.

c) Calcule $f^{(n)}(x)$, $Pf(x)$ e $P(Pf(x))$.

R: $(-a, 0)$ *e* $(0, 1)$ *são os traços. Sejam* $\alpha = 1$ *e* β *as coordenadas do centro; a substituição das coordenadas dos traços na equação* $(x-1)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ *conduz a:* $1 + (1-\beta)^2 = r^2$ *e* $(a+1)^2 + \beta^2 = r^2$ *daqui resultam:* $\beta = \dfrac{1 - 2a - a^2}{2}$ $\quad r^2 = 1 + \dfrac{(a+1)^4}{4}$.

A equação da circunferência é:

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{1 - 2a - a^2}{2}\right)^2 = 1 + \frac{(a+1)^4}{4}.$$

A equação geral da tangente:

$$Y - \frac{a+x}{a-x} = \frac{2a}{(a-x)^2}(X - x)$$

que no ponto $x = 0$ *conduz à equação* $Y = \dfrac{2}{a}X + 1$.

Para determinar a *de modo que* $Y = X + 1$ e $Y = \dfrac{2}{a}X + 1$ *façam ângulo de* 60° *deverá ser*

$$\sqrt{3} = \left|\frac{1 - \dfrac{2}{a}}{1 + \dfrac{2}{a}}\right| \quad \textit{donde vem} \quad 3\left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 = \left(1 - \frac{2}{a}\right)^2$$

ou $a^2 + 8a + 4 = 0$; $a = -4 \pm 2\sqrt{3}$.