3794 — Quantos números pares maiores do que 10.000 se podem formar com os algarismos 0, 2, 5, 7 e 8 e de modo que em cada número não figurem algarismos repetidos?

R: *Os números terão que conter 5 algarismos e* P_5 *será o seu número total contando aqueles que começam por zero em número de* P_4; *estão em* P_5 *incluídos também os que terminam por* 7 *e por* 5. *De modo que para obtermos o número pedido teremos que subtrair a* P_5 *o número* P_4 *e depois* $(P_4-P_3)\times 2$ *porque* P_4-P_3 *é o número de números formados com aqueles algarismos que terminam por* 5 *ou* 7 *e não começam por zero. Assim teremos*

$$P_5-P_4-2(P_4-P_3)=P_5-3P_4+2P_3=$$
$$=2.3.4.5-3.2.3.4+2.2.3=2.3(20-12+2)=60.$$

II

3795 — Calcule $f(x)=\left[\sec\left(x+\frac{7\pi}{2}\right)-\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}\right]:$ $:\operatorname{sen} x$ para $x=\pi/4$.

R: $f(\pi/4)=[\operatorname{sen}(\pi/4+7\pi/2)+\operatorname{tg} 5.\pi/4]:\operatorname{sen}\pi/4=$ $=(\sqrt{2}-1):\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}$ por ser $\operatorname{tg} 5\pi/4=1$, $\operatorname{sen}\pi/4=\sqrt{2}/2$ e $\sec 15\pi/4=\sqrt{2}$.

3796 — Verifique a identidade

$(\operatorname{cosec} x+\sec x)^2:(\operatorname{cosec}^2 x+\sec^2 x)=1+\operatorname{sen} x\cos x$.

R: *Como* $\operatorname{cosec} x+\sec x=(\operatorname{sen} x+\cos x):(\operatorname{sen} x\cos x)$ *será o primeiro membro de igualdade proposta:* $(\operatorname{sen} x+\cos x)^2$ *e portanto igual a* $1+2\operatorname{sen} x\cos x$.

III

3797 — Quais são os números inferiores a 200 cuja *diferença* é 96 e cujo *máximo divisor comum* é 24? Justifique a resposta.

R: *Sejam* a *e* b *os números e* d *o seu máximo divisor comum. Será* $a=d.p$ *e* $b=d.q$ *onde* p *e* q *são números primos entre si. Assim será* $a=24.p$ *e* $b=24.q$ *e* $a-b=96=24(p-q)$ *de modo que é* $p-q=4$, *por outro lado tem que ser* $a=24.p<200$ *e* $b<200$ *donde é* $p<9$ *e* $q<9$. *Os valores de* p *e* q *só podem por isso ser ou* 7 *e* 3 *ou* 5 *e* 1. *Os números serão então ou* 168 *e* 72 *ou* 120 *e* 24.

3798 — Demonstre que a soma de quatro inteiros *consecutivos* não divisíveis por 5 é divisível por 5, mas não é divisível por 4.

R: *Sejam* $5n+1$, $5n+2$, $5n+3$ *e* $5n+4$ *os números consecutivos nas condições do enunciado. A sua soma é* $20n+10$ *que é múltiplo de* 5. *Esta soma não é um múltiplo de* 4 *porque sendo-o a primeira parcela, o não é a segunda.*

Soluções dos n.os 3781 a 3798 de J. Silva Paulo

MATEMÁTICAS SUPERIORES
PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS
MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — **1.º Exame de frequência — 25 de Março de 1954.**

3799 — Sendo $f(x)=\frac{a+x}{a-x}$ resolva os seguintes problemas:

a) Determine os pontos de intersecção da imagem de $f(x)$ com os eixos e escreva a equação da circunferência que passa por esses pontos, com centro na recta $X=1$.

b) Escreva a equação geral da tangente à imagem de $f(x)$.

Calcule a por forma que a recta $Y=X+1$ faça um ângulo de 60º com a tangente à curva no ponto $x=0$.

c) Calcule $f^{(n)}(x)$, $Pf(x)$ e $P(Pf(x))$.

R: $(-a,0)$ *e* $(0,1)$ *são os traços. Sejam* $\alpha=1$ *e* β *as coordenadas do centro; a substituição das coordenadas dos traços na equação* $(x-1)^2+(y-\beta)^2=r^2$ *conduz a:* $1+(1-\beta)^2=r^2$ *e* $(a+1)^2+\beta^2=r^2$ *daqui resultam:* $\beta=\frac{1-2a-a^2}{2}$ $\quad r^2=1+\frac{(a+1)^4}{4}$.

A equação da circunferência é:

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{1-2a-a^2}{2}\right)^2=1+\frac{(a+1)^4}{4}.$$

A equação geral da tangente:

$$Y-\frac{a+x}{a-x}=\frac{2a}{(a-x)^2}(X-x)$$

que no ponto $x=0$ *conduz à equação* $Y=\frac{2}{a}X+1$.

Para determinar a *de modo que* $Y=X+1$ e $Y=\frac{2}{a}X+1$ *façam ângulo de* 60º *deverá ser*

$$\sqrt{3}=\left|\frac{1-\frac{2}{a}}{1+\frac{2}{a}}\right| \quad \textit{donde vem} \quad 3\left(1+\frac{2}{a}\right)^2=\left(1-\frac{2}{a}\right)^2$$

ou $a^2+8a+4=0$; $a=-4\pm 2\sqrt{3}$.

$$f(x)=\frac{a+x}{a-x}\ ;\ f'(x)=\frac{2a}{(a-x)^2}\ ;\ f''(x)=$$
$$=2a\cdot\frac{2}{(a-x)^3}\ ;\ f'''(x)=2a\cdot 2\cdot\frac{3}{(a-x)^4}\ ;\cdots;$$
$$;\ f^{(n)}(x)=\frac{2a\cdot n!}{(a-x)^{n+1}}$$

$$\frac{x+a}{-x+a}=-1+\frac{2a}{-x+a}$$ *donde* $P\,f(x)=-x-$

$-2a\log(a-x)+C^{te}\quad P(P\,f(x))=-\frac{x^2}{2}-$

$=2a\,P\log(a-x)+x\cdot C^{te}+C^{te}$ *onde se deve substituir*

$$P\,1\cdot\log(a-x)=x\cdot\log(a-x)+P\frac{x}{a-x}=$$
$$=x\log(a-x)+P-1+\frac{a}{a-x}=x\log(a-x)-$$
$$-x-a\log(a-x).$$

II

3800 — Prove que uma sucessão de termos positivos decrescentes tem limite finito. Considere uma sucessão $S)\,u_1, k, u_2, k, \cdots, k, u^n, k\cdots$ onde a constante k alterna com os termos positivos decrescentes da sucessão u_n de limite $l\geqslant 0$: com $k<l, k=l, k>l$ indique para cada caso, os limites máximo e mínimo da sucessão S) e os limites de Weierstrass do conjunto dos valores dos seus termos. Quando é que a sucessão S) tem limite? Justifique todas as suas respostas.

Tome a sucessão em que os termos $u^n=\frac{\log n}{n}+\frac{a\cdot n+1}{n+1}$ alternam com $v_n=b\cdot\log\left(\frac{n+b}{n}\right)^n$. Determine a relação entre as constantes a e b para que a sucessão tenha limite. Conclua que a sucessão não tem limite sempre que $a<0$ e indique, neste caso, os valores dos limites máximo e mínimo.

R: $\lim\frac{\log n}{n}+\lim\frac{a\,n+1}{n+1}=a\,;\,b.\lim n.\log\left(1+\frac{b}{n}\right)=$ $=b\cdot\lim n\cdot\frac{\xi b}{n}=b^2\cdot\lim\xi=b^2$. *Os sub-limites deverão ser iguais e portanto* $a=b^2$ *nunca possível se* $a<0$.

III

3801 — Demonstre que, com $H>0$, a série $H\varepsilon_1-H\varepsilon_2+H\varepsilon_3-\cdots$ onde $\lim\limits_{n=\infty}\varepsilon_n=+0$, é convergente. Mostre também que, se $\lim\limits_{n-\infty}n^\alpha\cdot\varepsilon_n=l\neq 0,\infty$ a mesma série é absolutamente convergente com $\alpha>1$ e simplesmente convergente com $\alpha\leqslant 1$. Determine o intervalo de convergência absoluta da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+2^{n-1})\,x^{n-1}$ e mostre que a sua soma é

$$S=\frac{x^2-4x+2}{(1-x)^2(1-2x)}.$$

R: *Pondo* $u_n=(-1)^{n-1}\cdot H\cdot\varepsilon_n$ *vem*

$$|S_{n+p}-S_n|=|u_{n+1}+\cdots+u_{n+p}|=|(-1)^n H\,\varepsilon_{n+1}+$$
$$+\cdots+(-1)^{n+p-1}H\,\varepsilon_{n+p}|=H\cdot|\varepsilon_{n+1}-(\varepsilon_{n+2}-\varepsilon_{n+3})-\cdots|$$

se supusermos agora que o simbolo $\lim\limits_{n=\infty}\varepsilon_n=+0$ *significa que* ε_n *tende monotonamente para zero, então os parêntesis* $(\varepsilon_{n+2}-\varepsilon_{n+3})\cdots$ *são positivos e pode concluir-se que* $|S_{n+p}-S_n|\leqslant H\cdot\varepsilon_{n+1}$ *donde se conclui, só então, a convergência da série.*

Como $|u_n|=|(-1)^{n-1}H\,\varepsilon_n|=H\,\varepsilon_n$ *a razão*

$$\frac{|u_n|}{\frac{1}{n^\alpha}}=H\cdot n^\alpha\cdot\varepsilon_n,$$

por ser $\lim n^\alpha\,\varepsilon_n=l\neq 0,\infty$, *tende para limite finito. As duas séries terão a mesma natureza.*

Para calcular o intervalo de convergência absoluta da série tem-se que calcular o limite de $|x|\cdot\frac{n+1+2^n}{n+2^{n-1}}$. *Como* 2^{n-1} *tende mais ràpidamente para infinito que* n, *o cociente* $\frac{n+1+2^n}{n+2^{n-1}}$ *tem o mesmo limite que o cociente* $\frac{2^n}{2^{n-1}}$.

Então o intervalo de convergência é dado por $2|x|<1$. *Como o termo geral* $(n+2^{n-1})\,x^{n-1}$ *se decompõe em* $n\,x^{n-1}+(2x)^{n-1}$ *a soma da série, para valores de* x *tais que* $|x|<\frac{1}{2}$, *é igual à soma das somas das duas séries* $\sum\limits_{n=1}n\,x^{n-1}$ *e* $\sum\limits_{n=1}(2x)^{n-1}$.

Para a primeira série tem-se

$$(1-x)\,S_n=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}-n\,x^n=$$
$$=\frac{1-x^n}{1-x}-n\,x^n$$

o que nos dá $\sum\limits_{n-1}n\,x^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$.

Por outro lado

$$\sum_{n=1}(2x)^{n-1}=\frac{1}{1-2x}.$$

Temos pois

$$S=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-2x}=\frac{2-4x+x^2}{(1-x)^2(1-2x)}.$$

IV

3802 — Seja $f(x)$ limitada no seu domínio X e $\underline{a}$ um ponto de acumulação deste conjunto. Defina $\overline{f(a)}$, $\underline{f(a)}$ e a oscilação $w(a)$ de $f(x)$.

Que pode afirmar sobre o $\lim\limits_{x=a} f(x)$ quando $w(a)=0$? Prove a sua afirmação.

Estude a continuidade de $f(x)=e^{-x^2}$ e $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ em $x\,\infty$ e mostre que a uma das funções se pode aplicar o teorema de Rolle no intervalo $(-\infty\,,+\infty)$.

Demonstre o teorema de Rolle.

R: *Se forem* $L(a,\varepsilon)$ *e* $l(a,\varepsilon)$ *os limites superior e inferior weierstrassianos dos valores da função na parte nunca vazia do domínio* X *que cai na vizinhança* ε *do ponto* a, *vem:* $\overline{f(a)}=\lim\limits_{\varepsilon=0} L(a,\varepsilon)$; $\underline{f(a)}=\lim\limits_{\varepsilon=0} l(a,\varepsilon)$; $w(a)=\overline{f(a)}-\underline{f(a)}$.

Estes limites existem sempre, próprios ou impróprios, qualquer que seja o modo como ε *tende para zero.*

A oscilação $w(a)$ *é positiva ou nula, e acaba-se a sua definição dizendo que* $w(a)=+\infty$ *sempre que um ou dois limites* $\underline{f(a)}\,,\overline{f(a)}$ *forem impróprios.*

Tem-se sempre $L(a,\varepsilon)\geqslant f(x)\geqslant l(a,\varepsilon)$ *e portanto* $\overline{f(a)}\geqslant f(a+0)\geqslant f(a-0)\geqslant \underline{f(a)}$ *e os limites laterais existem sempre* $w(a)=0$ *e necessàriamente iguais: a função tem sempre limite quando a oscilação é nula e esse limite é igual ao valor comum, finito,* $\overline{f(a)}=\underline{f(a)}=\lim\limits_{x=a}(x)$.

Se o ponto a *pertence ao domínio* X *então:*

$$\lim_{x=a} f(a)=f(a)\cdot\lim_{x=-\infty} e^{-x^2}=\lim_{x=+\infty} e^{-x^2}=0\,;$$

$$;\ \lim_{x=-\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}=0\,;\ \lim_{x=+\infty}\frac{1}{1-e^{-x}}=1\,.$$

O teorema de Rolle *aplica-se à primeira função.*

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º Exame de frequência — 3 de Junho de 1954.

I

3803 — Dada a função $z=f(x,y)$ assim definida:

1.º — $f(x,y)=0$ se $x+\pi y=0$.

2.º — $f(x,y)=x\cdot y\cdot\cos\dfrac{\pi x+\dfrac{\pi^2}{2}y}{x+\pi y}$ para qualquer outro par de valores (x,y).

a) Calcular $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$, $f''_{xy}(0,0)$ e $f''_{yx}(0,0)$. É aplicável o teorema de Schwarz no ponto $(0,0)$?

b) Mostrar que a função é homogénea e verificar com $f(x,y)$ a identidade de Euler.

R: *Os cálculos das derivadas em* $(0,0)$ *são directos, a partir das definições:* $\lim\limits_{x=0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=f'_x(0,0)$; *a origem é um dos pontos que faz* $x+\pi y=0$ *e portanto* $f(0,0)=0$, $f(x,0)$, *quando* $x\neq 0$, *é dado pela segunda expressão analítica* $f(x,0)=0$; *então a razão incremental é sempre* $\dfrac{0}{x}=0$, *logo* $f'_x(0,0)=0$. *Do mesmo modo se calcula* $f'_y(0,0)=0$.

Para calcular $f''_{xy}(0,0)$ *temos que calcular* $\lim\limits_{y=0}\dfrac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y}$ *e para isso vamos calcular em primeiro lugar* $f'_x(0,y)$. Tem-se por definição: $f'_x(0,y)=\lim\limits_{x=0}\dfrac{f(x,y)-f(0,y)}{x}$ *mas* $f(0,y)=0$ *e*

$$portanto\ \lim_{x=0} y\cdot\cos\frac{\pi x+\dfrac{\pi^2}{2}y}{x+\pi y}=y\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0\,.$$

Então resulta $f''_{xy}(0,0)=0$.

Para calcular $f''_{yx}(0,0)=\lim\limits_{x=0}\dfrac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x}$ *temos que calcular em primeiro lugar o valor de* $f'_y(x,0)$. *Este é dado por* $\lim\limits_{y=0}\dfrac{f(x,y)-f(x,0)}{y}=$

$$=\lim_{y=0} x\cos\frac{\pi x+\dfrac{\pi^2}{2}y}{x+\pi y}=x\cos\pi=-x\,.$$ *Resulta então* $f''_{yx}(0,0)=-1$.

A homogeneidade e a identidade de Euler, *verifica-se como para qualquer outra função em qualquer região do plano onde não há pontos da recta* $x+\pi y=0$.

Vai-se portanto tirar o que for preciso à segunda expressão analítica da função.

II

3804 — Defina zero simples e prove que tal zero é isolado e que a função muda de sinal quando x passa por ele.

Se no intervalo (a,b) a sucessão de Fourier é de 5.ª ordem e apresenta as seguintes variações:

	a	b
$f\ (x)$	+	—
$f'\ (x)$	—	+
$f''\ (x)$	+	+
$f'''\ (x)$	—	0
$f^{IV}\ (x)$	+	+
$f^{V}\ (x)$	—	—

Indique, justificando, o o número de zeros de $f(x)$ em (a,b). Baseando-se na resposta anterior diga se $f(x)$ poderia ser um polinómio de grau par e coeficientes reais sendo a e b respectivamente os limites deficiente e excedente dos zeros. Porque?

Utilizando a sucessão de Fourier verifique que o polinómio $x^4-4x^3+8x^2-8x+4$ só tem raízes imaginárias. Calcule-as sabendo que uma raiz é dupla e apresente a decomposição do polinómio em factores primos.

R: *Provemos que* $f'''(x)$ *imediatamente à esquerda de* b *tem sinal negativo; com efeito, se em* $b-\varepsilon$ *tivesse sinal positivo,* $f'''(x)$ *teria um zero no interior de* (a, b) *e teria entre esse zero e* b, *um máximo o que daria para* $f^{IV}(x)$ *um zero no interior de* (a, b) *que não é acusado pela respectiva sucessão de* FOURIER.

Então em $b-\varepsilon$ *os sinais da sucessão de* FOURIER *de* f(x) *são os mesmos que na coluna* b *depois de substituir o zero pelo sinal negativo.*

A função $f''(x)$ *não tem zeros no intervalo* (a, b); *pode pois encurtar-se a sucessão de* FOURIER, *de acordo com a definição, e ficarmos apenas com as tres primeiras funções. Perda de uma variação, logo,* f(x) *tem um só zero real no intervalo* (a, b).

Os limites deficiente e excedente dos zeros do polinómio $x^4-4x^3+8x^2-8x+4$ *são respectivamente* 0 *e* 1.

	0	1
$x^4-4x^3+8x^2-8x+4$	+	+
$4(x^3-3x^2+4x-2)$	—	0
$4(3x^2-6x+4)$	+	+
$24(x-1)$	—	0
24	+	+

Por um estudo semelhante ao anterior tomam-se os sinais em $1-\varepsilon$, *substituindo os zeros por sinais negativos. A sucessão reduz-se às duas primeiras funções e o polinómio não tem zeros reais. Representando por* $a+bi$ *a raiz dupla, a soma das raizes é* $4a=4$ *donde* $a=1$. *O produto das raizes é* $(a^2+b^2)^2=4$ *donde* $1+b^2=\pm 2$ *ou* $b^2=\pm 2-1$ *e como* b *tem de ser real vem* $b=\pm 1$. *Então* $f(x)=(x-1+i)(x-1+i)(x-1-i)(x-1-i))=[(x-1)^2+1]^2$.

III

3805 — Diga o que entende por uma função $f(x,y)$ diferenciável em $P(a,b)$ e deduza daí a fórmula da diferencial total.

Prove que sendo $x=\varphi(t)$ e $y=\psi(t)$ diferenciáveis no ponto t_0 e $f(x,y)$ diferenciável no ponto correspondente $x_0=\varphi(t_0)$, $y_0=\psi(t_0)$ também a função composta $F(t)=f(\varphi,\psi)$ é diferenciável no ponto t_0. Deduza também a expressão de $F'(t_0)$.

Dadas as funções $f(x,y)$, $x=\varphi(u,v)$ e $y=\psi(u,v)$ e feita composição $F(u,v)=f(\varphi,\psi)$ enuncie uma proposição que constitua a generalização do teorema anterior, indicando também as expressões de $\frac{\partial F}{\partial u}$ e $\frac{\partial F}{\partial v}$.

Tome a curva plana de equação $x^2+2y^2-3=0$ e deduza a equação da superfície gerada pela sua revolução em torno de $\overline{Ox}$.

R: *A equação da superfície é* $y^2+z^2=\dfrac{3-x^2}{2}$ *ou* $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{3/2}+\dfrac{z^2}{3/2}=1$.

IV

3806 — Demonstre que um determinante é nulo quando tiver duas filas iguais ou proporcionais.

Determine as soluções da equação
a) sem desenvolver o determinante
b) Desenvolvendo o determinante pelo teorema de LAPLACE.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3x & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

R: *Multiplicando por dois a primeira linha, ela ficará igual à segunda quando* $6x=4$ *donde* $x=\frac{2}{3}$. *As duas últimas linhas serão iguais se* $x=1$. *São estes os zeros da equação.*

Desenvolvendo segundo os elementos da primeira coluna: $4(x-1)-2\cdot 3x\cdot(x-1)=2(x-1)(2-3x)=0$.

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — **Exame final — 20 de Julho de 1954.**

I

3807 — Dada a função $f(u,v)=e^{2u+3v}$ com $u=x+y$, $v=x-y$ e designando por $F(x,y)$ a função composta, calcular $\frac{\partial^n F}{\partial x^n}$ e $\frac{\partial^n F}{\partial y^n}$.

Considere a superfície $z=e^{-2u-3v}\left(x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)$ e determine o plano tangente paralelo ao plano $x+y+z+1=0$.

R: $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=2e^{2u+3v}+3e^{2u+3v}=5e^{2u+3v}$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x}=10e^{2u+3v}+15e^{2u+3v}=5^2\cdot e^{2u+3v}$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\frac{\partial v}{\partial x}=5^3e^{2u+3v}$$

. . . .

$$\frac{\partial^n F}{\partial x^n}=5^n\cdot e^{5x-y}.$$

Do mesmo modo, ou por qualquer outro caminho, se tem: $\dfrac{\partial^n F}{\partial y^n}=(-1)^n e^{5x-y}$. *O plano tangente à superfície* $Z=25x^2+y^2$ *tem por equação* $Z-z_0=50x_0(X-x_0)+2y_0(Y-y_0)$ *que ordenada convenientemente dá* $-50x_0X-2y_0Y+Z+50x_0^2+2y_0^2-z_0=0$. *Este plano deverá ser paralelo a* $x+y+z+1=0$ *e portanto temos as condições* $\dfrac{-50x_0}{1}=\dfrac{-2y_0}{1}=1$ *que dão imediatamente o ponto de contacto.*

II

3808 — Dadas as equações:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z + u = 0 \\ x + y + z + u = 0 \\ x - y - z = 1 \\ x + z - u = 2 \\ 4y + 3z + \alpha u = -3 \\ \beta x + u = 1. \end{cases}$$

Determinar α e β por forma que as duas últimas sejam uma combinação linear das quatro primeiras. Determinar neste caso a solução do sistema.

R: *Condense-se a matriz*

$$\left|\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & \alpha & -3 \\ \beta & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right| \to \left|\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & \alpha & -3 \\ 0 & -2\beta & -2\beta & 1-\beta & 1 \end{array}\right| \to$$

$$\to \left|\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\beta & 1 \end{array}\right| \to \left|\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\beta & 1 \end{array}\right| \to$$

$$\to \left|\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\beta \end{array}\right|$$

portanto: $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, $u = -1$.

III

3809 — Utilize a sucessão de Fourier para a separação dos zeros do polinómio $f(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1$. O polinómio tem raizes imaginárias? Porquê?

Calcule a maior raíz pelo método de aproximação de Newton (utilizar apenas a primeira aproximação).

R: *A sucessão de* Fourier *apresenta-se do seguinte modo.*

	-2	-1	0	$1/3$	1	2
$f\ (x)$	$-$	$+$	$+1$	$+$	-2	$+15$
$f^{I}\ (x)$	$+$	$-$	-3	$-$	-2	$+57$
$f^{II}\ (x)$	$-$	$-$	$+2$	$-$	$+10$	$+$
$f^{III}\ (x)$	$+$	$+$	-12	$-$	$+48$	$+$
$f^{IV}\ (x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f^{V}\ (x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
V	5	4	4	2	1	0

A tangente a $f(x)$ *no ponto* $x = 0$ *corta* $\overline{OX}$ *no ponto* $x = 1/3$; *entre* 0 *e* $1/3$ *não há zeros de* $f(x)$ *(condição* Fourier*)* $f(x)$ *só tem três zeros reais.*

$f''(x)$ *mantem sinal no intervalo* $(1, 2)$: *o extremo favorável é* 2; $r = 2 - \frac{15}{57}$.

Enunciados e soluções dos n.os 3799 a 3809 de J. R. Albuquerque.

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. C. — Geometria Descritiva — 2.° Exame de Frequência, 1952-53.

3810 — *Triedros.* Por um ponto de LT conduzir uma recta que faça ângulos de 40° com o plano vertical de projecção e com um plano vertical inclinado 70°.

3811 — *Secções planas.* Dado um plano vertical inclinado 40° sobre o plano vertical de projecção, conduzir por um dos seus pontos as rectas que lhe pertencem e fazem ângulos de 40° com um plano de perfil.

3812 — *Planos tangentes.* Conduzir por um ponto de LT os planos que distam 3 cm. de uma frontal com 4 cm. de afastamento.

Enunciados dos n.os 3810 a 3812 de Luís Albuquerque.

ANÁLISE INFINITESIMAL

I. S. C. E. F. — Análise Infinitesimal — 1.° Exame de frequência prático — 18 de Janeiro de 1954.

I

3813 — *a*) Integrar a fracção racional

$$\frac{\alpha x + \beta}{(x^2-1)^3 (x^6+1)^m (x^8-1)^n (x^2+1)^2}$$

pelo método de Fubini. (Dispensa-se a determinação das constantes); *b*) Na hipótese de $m = n = 0$, $\alpha = \beta = 1$ decompor a fracção racional, determinando as constantes de decomposição pelos métodos mais convenientes; *c*) Ainda na hipótese da alínea *b*) descreva, sucintamente, os métodos que poderia utilizar na determinação das constantes de decomposição da fracção em fracções elementares.

R: a) $$\int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2-1)^3 (x^6+1)^m (x^8-1)^n (x^2+1)^2} dx =$$

$$= P_{6m+8n-3}(x) \times (x^2-1)^{-(2+n)} \times (x^2+1)^{-(m+n+1)} \times$$

$$\times (x^2 - \sqrt{2}x + 1)^{1-n} \times (x^2 + \sqrt{2}x + 1)^{1-n} \times$$

$$\times\left[\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]^{1-m}\times\left[\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]^{1-m}+$$

$$+A\log(x+1)+B\log(x-1)+D\log(x^2+1)+$$

$$+E\operatorname{arctg}x+F\log(x^2-\sqrt{2}\,x+1)+$$

$$+G\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}+H\log(x^2+\sqrt{2}\,x+1)+$$

$$+I\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}+J\log\left[\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]+$$

$$+K\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}+L\log\left[\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]+$$

$$+M\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}+N.$$

b) $$\int\frac{dx}{(x-1)^3(x+1)^2(x^2+1)^2}=-\frac{1}{32(x-1)^2}+$$

$$+\frac{3}{16(x-1)}+\frac{19}{64}\log(x-1)+\frac{1}{16(x^2+1)}-\frac{1}{16(x^2+1)}-$$

$$-\frac{6}{16}\operatorname{arctg}x-\frac{3}{32}\log(x^2+1)+C.$$

II

3814 — Calcular $I_{m,n}=\int\frac{(1+x)^m}{(1+x)^n}dx$ m e n inteiros, utilizando de preferência uma fórmula recorrente. Calcule em particular os integrais:

a) $\int\frac{1+x}{1-x}dx$ b) $\int(1-x^2)^2\,dx$ c) $\int\frac{dx}{(1-x^2)^3}$.

Há valores fraccionários de m ou n ou de ambos para os quais $I_{m,n}$ seja primitivável sem recurso à integração por séries? Quais são? Integre por séries $I_{m,n}$ para os valores de m e n em que for caso disso, indicando qual o intervalo de legitimidade da utilização de tal processo de integração. Para que valores racionais de m e n existe o integral $I'_{m,n}=\int_{-1}^{+1}\frac{(1+x)^m}{(1-x)^n}dx$. Exprima $I'_{m,n}$ na função β, escolhendo convenientemente os argumentos e determine em particular, utilizando de preferência esta função os seguintes integrais:

a) $I'\,\frac{1}{2},\frac{1}{2}$ b) $I'-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$ c) $I'\,\frac{7}{2},\frac{1}{2}$.

R: 1) $m>0,n>0$ $$\int\frac{(1+x)^m}{(1-x)^n}dx=\frac{(1+x)^m}{(n-1)(1-x)^{n-1}}-$$

$$-\frac{m}{n-1}\int\frac{(1+x)^{m-1}}{(1-x)^{n-1}}dx,\ \textit{isto é:}$$

$$I_{m,n}=\frac{(1+x)^m}{(n-1)(1-x)^{n-1}}-\frac{m}{n-1}I_{m-1,n-1}.$$

2) $m>0,n<0$ $$I_{m,n}=-\frac{1}{(m-n+1)(1-x)^{n-1}}+$$

$$+\frac{2m}{m-n+1}I_{m-1,n}.$$

3) $m<0,n>0$ $$I_{m,n}=\frac{(1+x)^{m+1}}{(m+1)(1-x)^n}+$$

$$+\frac{n}{m+1}I_{m+1,n+1}.$$

4) $m<0,n<0$ $$I_{m,n}\frac{(1+x)^m}{(n-1)(1-x)^{n-1}}+$$

$$+\frac{m}{n-1}I_{n-1,m+1}.$$

a) $$\int\frac{1+x}{1-x}dx=-x-2\log(1-x)+C$$

b) $$\int(1-x^2)^2dx=x-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^5}{5}+C$$

c) $$\int\frac{dx}{(1-x^2)^3}=\frac{x}{4(1-x^2)^2}+\frac{3x}{8(1-x)^2}+$$

$$+\frac{3}{16}\log\frac{x+1}{x-1}+C.$$

Fazendo $1-x=t$ *vem* $I_{m,n}=-\int t^{-n}(2-t)^m\,dt$ *e vê-se assim que a função é primitivável sem recurso à primitivação por séries quando* $-n+1$ *é inteiro ou quando* $m-n$ *é inteiro.*

Para integrar por séries ($m-n$ *não inteiro e* n *não inteiro*) *vem:* $-\int t^{-n}(2-t)^m\,dt=-$

$$-2^m\int t^{-n}\left(1-\frac{t}{2}\right)^m dt=-2^m\int\left(t^{-n}-\frac{m}{2}\,t^{1-n}\cdots\right)dt=$$

$$=-2^m\left(\frac{t^{-n+1}}{-n+1}-\frac{m}{2}\cdot\frac{t^{2-n}}{2-n}+\cdots\right)\ \textit{para}\ \left|\frac{t}{2}\right|<1\ \textit{ou}$$

seja $-1<x<3$. *O integral* $I'_{m,n}=\int_{-1}^{+1}\frac{(1+x)^m}{(1-x)^n}dx$ *existe para os seguintes valores de* m *e* n:

sendo $m>0, n>0$ *será para* $m>0$ *e* $0<n<1$

sendo $m<0$ $n>0$ *será para* $-1<m<0$ *e* $n>0$

sendo $m>0$ $n<0$ *o integral não é impróprio*

sendo $m<0$ $n<0$ *será para* $-1<m<0$ *e* $n<0$.

Para exprimir $I'_{m,n}$ *na função* β *faça-se* $x=\cos 2t$

vem $I'_{m,n}=2^{m-n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{-2n+1} t \cos^{2m+1} t\, dt=$

$$=2^{m-n+1}\frac{1}{2}\beta(-n+1,m+1)=2^{m-n}\frac{\Gamma(-n+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+2)}$$

a) $I'_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}=\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)}=\dfrac{\pi}{2}$

b) $I'_{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}=\dfrac{\pi}{2}$

c) $I'_{\frac{7}{2},\frac{1}{2}}=2^3\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}{\Gamma(5)}=2^3\dfrac{\sqrt{\pi}\,1\cdot2\cdot3\sqrt{\pi}}{4\,!}=35\pi$

III

3815 — Calcular $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}^m x\, dx$ para m inteiro não negativo. Há valores racionais de m para os quais o integral não exista? Quais são?

R: $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}^m x\, dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^m x=\pi\times\frac{m-1}{m}\times$

$$\times\frac{m-3}{m-2}\times\cdots\times\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{2}$$

fazendo $\operatorname{sen} x=t$ *vem* $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^m x\,dx=\int_0^1 t^m(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt$

e então o integral não existe para valores de m *tais que* $-1<m<0$ *e* $m<-1$.

IV

3816 — Ordem do infinitésimo $u_x=\alpha\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)+$ $+\sqrt{x^2+1}-x$ para x infinito e $\alpha\geqslant-\frac{1}{2}$. Analise a convergência do produto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$.

R: *fazendo* $\frac{1}{x}=h$ *vem* $u_x=\alpha(e^h-1)+$

$$+\frac{1}{h}\left(\sqrt{1+h^2}-1\right)=\alpha\left(h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+\cdots\right)+$$

$$+\frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{8}h^4+\cdots\right)=\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)h+\frac{\alpha}{2}h^2+\cdots$$

Se $\alpha=-\frac{1}{2}$ *o infinitéssimo é de 2.ª ordem e se* $\alpha>-\frac{1}{2}$ *o infinitéssimo é de 1.ª ordem. O produto estudava-se pela série de termo geral* u_n.

V

3817 — Dado $F(z)=\int_0^z\frac{\operatorname{sen} x}{(1+x^2)^2}\,dx$ calcular $F\left(\frac{1}{10}\right)$ com duas decimais, mostrar que existe $|F(z)|$ para $z\to\infty$ e determine um seu limite excedente.

R: $F\left(\frac{1}{10}\right)=\int_0^{\frac{1}{10}}\frac{\operatorname{sen} x}{(1+x^2)^2}\,dx=$

$$=\int_0^{\frac{1}{10}}\left(x-\frac{13}{6}x^3+\cdots\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{13}{24}x^4+\cdots\right]_0^{\frac{1}{10}}\approx$$

$$\approx\frac{1}{200}-\frac{13}{24}\,\frac{1}{10.000}.$$

É claro que $|F(x)|\leqslant\int_0^{\frac{1}{10}}\frac{dx}{(1+2^2)^2}=A.$

I. S. C. E. F. — ANÁLISE INFINITESIMAL — **2.º Exame de frequência prático — 9 de Junho de 1954.**

I

3818 — Seja $M(x,y,z)$ um ponto variável e O a origem dos eixos coordenados rectangulares. Se $M-O=r\vec{u}$, $\vec{u}$ unitário, $r=\operatorname{mod}(M-O)$ e $\vec{v}=$ $=f(r)\vec{u}$, sendo $f(r)$ uma função escalar de r que admite a derivada $f'(r)$, provar que:

$$a)\quad \operatorname{div}\vec{v}=f'(r)+\frac{2f(r)}{r}$$

$$b)\quad \operatorname{rot}\vec{v}=0.$$

R: *a) Do enunciado conclui-se fàcilmente que* $\vec{v}=f(r)\frac{x}{r}I+f(r)\frac{y}{r}J+f(r)\frac{z}{r}K$ *e então* $\operatorname{div}\vec{v}=$

$$=\frac{\partial\left[f(r)\frac{x}{r}\right]}{\partial x}+\frac{\partial\left[f(r)\frac{y}{r}\right]}{\partial y}+\frac{\partial\left[f(r)\frac{z}{r}\right]}{\partial z}=$$

$$=f'(r)\frac{x^2}{r^2}+f(r)\frac{r-x^2/r}{r^2}+f'(r)\frac{y^2}{r^2}+f(r)\frac{r-y^2/r}{r^2}+$$

$$+f'(r)\frac{z^2}{r^2}+f(r)\frac{r-z^2/r}{r^2}=f'(r)+\frac{2f(r)}{r}.$$

b) $\operatorname{rot}\vec{v}=\operatorname{rot} f(r)\vec{u}=f(r)\operatorname{rot}\vec{u}+\operatorname{grad} f(r)\wedge\vec{u}=$ $=f(r)\operatorname{rot}\vec{u}+f'(r)\vec{u}\wedge\vec{u}=f(r)\operatorname{rot}\vec{u}$; *mas* $\operatorname{rot}\vec{u}=0$ *e então* $\operatorname{rot}\vec{v}=0$.

II

3819 — Provar que, sendo $z(x,y)$ definida pela equação $y=x\varphi(z)+\psi(z)$ então:

a) $p+q\varphi(z)=0$

b) $rq^2-2pqs+tp^2=0$.

R: a) *Da equação dada tira-se* $p = \dfrac{\varphi(z)}{x\,\varphi'(z) + \psi'(z)}$ *e* $q = \dfrac{-1}{x\varphi'(z) + \psi'(z)}$ *e então*

$$p + q\varphi(z) = \frac{\varphi(z)}{x\,\varphi'(z) + \psi'(z)} - \frac{x\,\varphi'(z) + \psi'(z)}{\varphi(z)} = 0 .$$

b) *derivando em ordem a* x *e em ordem a* y *a igualdade da alínea* a) *e atendendo a que* $\varphi(z) = -\dfrac{p}{q}$ *vem:*

$$\begin{cases} r + \dfrac{\partial p}{\partial z}\,p - \left(s + \dfrac{\partial q}{\partial z}\,p\right)\dfrac{p}{q} + p\,q\,\varphi'(z) = 0 \\[2mm] s + \dfrac{\partial p}{\partial z}\,q - \left(t + \dfrac{\partial q}{\partial z}\,q\right)\dfrac{p}{q} + q^2\varphi'(z) = 0 \end{cases}$$

e como

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\dfrac{\partial p}{\partial x}}{\dfrac{\partial z}{\partial x}} = \frac{r}{p} \quad e \quad \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\dfrac{\partial q}{\partial x}}{\dfrac{\partial z}{\partial x}} = \frac{s}{p}$$

virá:

$$\begin{cases} r + \dfrac{r}{p}\,p - \left(s + \dfrac{s}{p}\,p\right)\dfrac{p}{q} + p\,q\,\varphi'(z) = 0 \\[2mm] s + \dfrac{r}{p}\,q - \left(t + \dfrac{s}{p}\,q\right)\dfrac{p}{q} + q^2\,\varphi'(z) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2r - \dfrac{2sp}{q} + p\,q\,\varphi'(z) = 0 \\[2mm] \varphi'(z) = -\dfrac{s}{q^2} - \dfrac{r}{pq} + \left(t + \dfrac{s}{p}\,q\right)\dfrac{p}{q^3} \end{cases}$$

e eliminando $\varphi'(z)$ *virá:*

$$2r - \frac{2sp}{q} - \frac{ps}{q} - r + \frac{p^2 t}{q^2} + + \frac{sp}{q} = 0$$

que equivale a $r\,q^2 - 2\,p\,q\,s + t\,p^2 = 0$.

III

3820 — Calcular $\displaystyle\iint_A \frac{x\,dx\,dy}{(x^2-y^2)\sqrt{(x^2+y^2+1)^3}}$ onde A é o domínio do primeiro quadrante compreendido entre as rectas $y = 0$ e $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,x$.

R: *Fazendo a mudança para coordenadas polares fica*

$$\iint_A \frac{x\,dx\,dy}{(x^2-y^2)\sqrt{(x^2+y^2+1)^3}} = $$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2+1)^3}}$$

e como

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2+1)^3}} = \int_0^{+\infty} \frac{1+\rho^2-\rho^2}{\sqrt{(\rho^2+1)^3}}\,d\rho =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2+1}} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\rho\,2\rho}{\sqrt{(\rho^2+1)^3}}\,d\rho =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2+1}} - \frac{1}{2}\left[\frac{-2\rho}{\sqrt{\rho^2+1}}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2+1}} = 1$$

ter-se-á de calcular

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[\frac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta} + \frac{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}\right] d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right|$$

e

$$\iint_A \frac{x\,dx\,dy}{(x^2-y^2)\sqrt{(x^2+y^2+1)^3}} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right| .$$

IV

3821 — Averiguar quais são as funções $y(x)$ que satisfazem à seguinte propriedade:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{E\,y}{E\,x}\right) = \frac{E}{E\,x}\left(\frac{dy}{dx}\right) .$$

R: *A igualdade equivale a ter* $\left(y'\dfrac{x}{y}\right)' = y''\dfrac{x}{y'}$ *ou seja* $y''\dfrac{x}{y} + y'\dfrac{y - x\,y'}{y^2} = \dfrac{x}{y'}\,y''$ *que é uma equação diferencial homogénea:* $y''\,y\,y'\,x + y\,y'^2 - x\,y'^3 = y''\,x\,y^2$; *fazendo-se* $y = e^{\int z\,dx}$ *baixa-se a ordem da equação obtendo-se:* $\dfrac{z-1}{z^2}\,dz = \dfrac{x-1}{x}\,dx$ *ou* $\log z + \dfrac{1}{z} = x - \log x + c$ *e, como* $z = \dfrac{y'}{y}$, *vem* $\log\dfrac{x\,y'}{y} = x + c - \dfrac{y}{y'}$ *donde se tira* $\dfrac{y'}{y} = \varphi\left(\dfrac{e^x}{x}\right)$ *e* $y = c\,e^{\int \varphi\left(\frac{e^x}{x}\right)dx}$.

Enunciados e soluções dos n.os 3813 a 3821 de Fernando de Jesus.