ANO XV — N.º 57 **GAZETA DE MATEMÁTICA** MAIO — 1954

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º, Dto. — Telef. 71943 — LISBOA-N

Von der Zerlegung der Kugel in kleinere Teile

von **H. Hadwiger**

Nach K. Borsuk [1] ist es bekanntlich unmöglich, die n-dimensionale Vollkugel vom Durchmesser $D=1$ in n Punktmengen zu zerlegen, so dass für die Durchmesser dieser Teile $D^i<1$ $(i=1,\cdots,n)$ gilt. Die Kugel lässt sich also nicht in weniger als $n+1$ kleinere Teile zerlegen. Dagegen ist eine Zerlegung in $n+1$ kleinere Teile möglich.

Wie B. Knaster [2] kann man hier nach dem Effekt einer extremalen Zerlegung fragen, welche die Eigenschaft hat, dass der grösste der $n+1$ Teile möglichst klein ist. Genauer: Es sei D_n die kleinste Zahl, für welche die Aussage noch richtig ist, dass die n-dimensionale Vollkugel vom Durchmesser $D=1$ in $n+1$ Punktmengen zerlegt werden kann, für deren Durchmesser $D^i\leqslant D_n$ $(i=1,\cdots,n+1)$ gilt. Welchem Wert hat D_n?

Trivialerweise ist $D_1=\frac{1}{2}$. Wir zeigen hier, dass für $n\geqslant 2$

$$(a)\qquad D_n\geqslant\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n-1}{2n}}}$$

gilt, wobei das Gleichheitszeichen für $n=2$ und $n=3$ steht, so dass also

$$(b)\qquad D_2=\sqrt{3}/2=0{,}866\cdots$$

und

$$(c)\qquad D_3=\sqrt{(3+\sqrt{3})/6}=0{,}887\cdots$$

ist.

([1]) K. Borsuk, Ueber die Zerlegung einer euklidischen n-dimensionalen Vollkugel in n Mengen. *Verh. Int. Math.* Kongress Zürich 1932, 2. Bd., 192.

([2]) B. Knaster, Ein Zerlegungssatz über unikohärente Kontinua. Ebenda, 193.

Wir beweisen zunächst (a). Da sich der Durchmesser einer Punktmenge beim Uebergang zur abgeschlossenen Hülle nicht ändert, genügt es, folgendes zu zeigen: Ist die abgeschlossene Vollkugel K durch $n+1$ abgeschlossene Punktmengen A_i mit Durchmesser D^i $(i=1,\cdots,n+1)$ überdeckt, so führt die Annahme, dass $D^i<p$ für alle i gilt, auf einen Widerspruch; dabei bezeichne p die auf der rechten Seite von (a) stehende Zahl.

In der Tat: Es bedeute B_i den Durchschnitt von A_i mit der Oberfläche S von K. Sicher enthält kein B_i ein antipodisches Punktepaar der Kugel, weil die Distanz antipodischer Punkte 1 beträgt, während $D^i<p<1$ vorausgesetzt ist. Die Kugeloberfläche S ist daher von $n+1$ abgeschlossenen Mengen $B_1,\cdots,B_{n+1}$ überdeckt, von denen keine ein antipodisches Punktepaar enthält. Nach einem Satz von H. Hopf [1] ist unter diesen Umständen der Durchschnitt C_i von je n Mengen B_j $(j=1,\cdots,n+1;\, j\neq i)$ nicht-leer. Andererseits sind je zwei der Mengen C_i $(i=1,\cdots,n+1)$ disjunkt; andernfalls wäre der Durchschnitt aller B_i $(i=1,\cdots,n+1)$ nicht-leer, und eine der Mengen B_i müsste dann ein antipodisches Punktepaar enthalten.

Auf S gibt es demnach $n+1$ verschiedene Punkte $P_i\in C_i$. Es bedeute jetzt T_i die sphärische Kalotte auf S, deren Punkte dadurch gekennzeichnet sind, dass ihre (euklidischen) Abstände von P_i nicht kleiner als p sind. Im Hinblick auf die Annahme $D^i<p$ ist der Durchschnitt T_iB_j für $j\neq i$ leer, also

([1]) P. Alexandroff-H. Hopf, Topologie I, Berlin 1935, 487. Vgl. auch: H. Hopf, Eine Verallgemeinerung bekannter Abbildungs und Ueberdeckungssätze. *Portugaliae Math.* **4**, 129-139 (1943).

ist T_i von B_i allein überdeckt. Ist ρ der sphärische Radius von T_i (die Kalotten sind alle kongruent), so müssen die sphärischen Distanzen der Punktepaare $P_i P_k$ $(i \neq k)$ alle grösser als 2ρ sein. Nun gilt aber $\cos(\rho/2) = p$ und also $\cos 2\rho = 2(2p^2-1)^2-1 = -1/n$. Nach einem bekannten Hilfssatz von K. Reinhardt [1] können aber die sphärischen Distanzen bei $n+1$ Punkten auf der Oberfläche einer n-dimensionalen Kugel nicht alle grösser als $\arccos(-1/n)$ sein. Damit ist der Widerspruch erzielt.

Um die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (a) zu sichern, muss umgekehrt die Existenz einer Ueberdeckung von K durch $n+1$ abgeschlossene Punktmengen aufgewiesen werden, so dass $D^i \leqslant p$ für alle i gilt. In den Fällen $n=2$ und $n=3$ wird das tatsächlich dadurch erreicht, dass man von der Ueberdeckung von S durch $n+1$ kongruente reguläre sphärische Simplexe B_i von der sphärischen Seite $s = \arccos(-1/n)$ ausgeht und für A_i die konvexe Hülle von B_i und Z (Kugelzentrum) setzt. So wird K durch $n+1$ Kugelsektoren A_i vom euklidischen Durchmesser p überdeckt.

Die hier besprochene Frage steht mit einem weitern, für $n>2$ noch ungeklärten Problem in engem Zusammenhang, das sich dadurch ergibt, dass man an Stelle der Kugel eine beliebige Punktmenge betrachtet. Genauer: Es gibt eine kleinste Zahl C_n, für welche die Aussage noch richtig ist, dass jede n-dimensionale Punktmenge vom Durchmesser $D=1$ in $n+1$ Teilmengen zerlegt werden kann, für deren Durchmesser $D^i \leqslant C_n$ $(i=1,\cdots,n+1)$ gilt. Wie gross ist C_n?

Nach einer Vermutung von K. Borsuk [2] gilt für alle n

$$(d) \qquad C_n < 1 .$$

Der Zusammenhang dieser *Borsuk*schen Konstanten C_n mit der hier betrachteten *Knaster*schen Konstanten D_n ist offenbar durch

$$(e) \qquad D_n \leqslant C_n$$

gegeben.

Das Gleichheitszeichen in (e) gilt trivialerweise für $n=1$ und nach einem Ergebnis von D. Gale [3] auch für $n=2$. Würde es für alle n gelten, so bedeutete dies, dass die Kugel der Zerlegung in kleinere Teile einen höheren Widerstand entgegenstellt als irgend ein anderer nichtkugeliger Körper.

(1) K. Reinhardt, Ueber die kleinste Kugel, die um jede Punktmenge vom Durchmesser Eins gelegt werden kann. *Jber. Deutsch. Math. Ver.* **25**, 157-163 (1917). Vgl. auch: W. Süss, Durchmesser und Umkugel bei mehrdimensionalen Punktmengen. *Math. Z.* **40**, 315-315, (19 5).

(2) K. Borsuk, Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre. *Fund. Math.* **20**, 177-190, 1933.

(3) D. Gale, On inscribing n-dimensional sets in a regular n-simplex. *Proc. Amer. Math. Soc.* **4**, 222-225, 1953.

Sobre a divisão da esfera em partes mais pequenas

Segundo os resultados de K. Borsuk [1] sabe-se que é impossível dividir uma esfera a n dimensões de diâmetro $D=1$ em n conjuntos de pontos cujos diâmetros D^i $(i=1,\cdots n)$ satisfaçam a $D^i<1$. A esfera pode pois ser dividida em $n+1$ partes mais pequenas, mas nunca em menos que $n+1$ partes.

É natural investigar, como fez B. Knaster [2], o efeito duma divisão extremal gozando da propriedade de ser a menor possível a maior das $n+1$ partes.

Mais exactamente: Seja D_n o menor dos números para o qual ainda é possível afirmar que a esfera n-dimensional de diâmetro $D=1$ pode ser dividida em $n+1$ conjuntos de pontos com diâmetros $D^i \leqslant D_n$ $(i = 1,\cdots,n+1)$. Deseja-se saber qual o valor de D_n.

Sabe-se, trivialmente, que $D_1 = \dfrac{1}{2}$ e vamos mostrar que para $n \geqslant 2$ temos

$$(a) \qquad D_n \geqslant \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n-1}{2n}}}$$

onde o sinal de igualdade se aplica para $n=2$ e $n=3$. De maneira que:

$$(b) \qquad D_2 = \sqrt{3}/2 = 0{,}866\cdots$$

e

$$(c) \qquad D_3 = \sqrt{(3+\sqrt{3})/6} = 0{,}887\cdots .$$

Demonstramos primeiramente (a). Designemos por p o segundo membro de (a). Como o diâmetro dum conjunto de pontos é o mesmo que o da sua fronteira fechada, é suficiente demonstrar que se a esfera fechada K for recoberta por $n+1$ conjuntos fechados de pontos A_i com diâmetros D^i $(i=1,\cdots n+1)$, então a hipótese $D^i<p$ para qualquer i conduz a uma contradição.

Com efeito, seja B_i a intersecção de A_i com a superfície S de K. Nenhum dos conjuntos B_i contém pares de pontos antipódicos, porque a distância de pontos antipódicos é igual a 1 e nós supomos que $D^i<p<1$.

A superfície S da esfera pode portanto ser recoberta por $n+1$ conjuntos fechados $B_1,\cdots B_{n+1}$ sem pontos antipódicos. Nestas condições, segundo um teorema de H. Hopf [3], não pode ser vazia a intersecção C_i de n quaisquer dos conjuntos $B_j\ (j=1,\cdots n+1;\ j\neq i)$. Por outro lado, devem ser disjuntos dois quaisquer dos conjuntos $C_i\ (i=1,\cdots n+1)$, visto que de contrário a intersecção de todos os $B_i\ (i=1,\cdots n+1)$ seria não vazia e um dos conjuntos B_i deveria então ter um par de pontos antipódicos.

Existem portanto, sobre S, $n+1$ diferentes pontos P_i e C_i. Seja agora T_i a calote esférica de S cujos pontos estão separados dos P_i por uma distância (euclidiana) não inferior a p. Em virtude da hipótese $D^i<p$, será vazia a intersecção $T_i\,B_j$ para $j\neq i$, de maneira que T_i é recoberto apenas por B_i. Designando por ρ o raio esférico de T_i (as calotes são todas congruentes), podemos dizer que as distâncias esféricas de pares de pontos $P_i\,P_k\ (i\neq k)$ são todas superiores a 2ρ. Mas $\cos(\rho/2)=p$ e portanto $\cos 2\rho = = 2\,(2\,p^2-1)^2 = -1/n$. Ora, segundo um conhecido lema de K. Reinhardt [4] as distâncias esféricas de $n+1$ pontos da superfície duma esfera n-dimensional não podem ser todas superiores a $\arccos(-1/n)$.

A contradição acima referida fica pois assim em evidência.

Para poder escrever a relação (a) com o sinal de igualdade é necessário demonstrar inversamente que existe uma cobertura de K por $n+1$ conjuntos fechados de pontos tais que $D^i\leqslant p$ para qualquer i. Nos casos $n=2$ e $n=3$ obtemos efectivamente este resultado partindo da cobertura de S por $n+1$ simplexos B_i regulares, esféricos e congruentes de lado esférico $s=\arccos(-1/n)$ e formando A_i com a fronteira convexa de B_i e Z (centro da esfera). Desta forma K ficará recoberto por $n+1$ sectores esféricos A_i de diâmetro euclidiano p.

A questão aqui discutida está estreitamente ligada com outra questão, ainda não esclarecida para $n>2$, que aparece quando se considera, em lugar da esfera, um conjunto de pontos arbitrário. Mais exactamente: Existe um número mínimo C_n para o qual ainda é possível afirmar que todos os conjuntos n-dimensionais de pontos de diâmetro $D=1$ podem ser divididos em conjuntos parciais de diâmetro $D^i\leqslant C_n (i=1,\cdots n+1)$. Qual o valor de C_n?

Segundo uma suposição de K. Borsuk [5]

$$(d) \qquad C_n<1$$

para qualquer n. A relação entre estas constantes C_n de Borsuk e as constantes D_n de Knaster, consideradas no presente trabalho, é evidentemente

$$(e) \qquad D_n\leqslant C_n$$

A igualdade em (e) tem lugar, trivialmente, para $n=1$ e também para $n=2$ segundo um resultado de D. Gale [6].

Se o mesmo acontecesse para qualquer n, isso significaria que a esfera oferece, à divisão em partes mais pequenas, maior resistência que qualquer outro corpo não esférico.

Sobre a noção de distância em relatividade restrita

por *Ruy Luís Gomes*

Sejam x_i, t as coordenadas de um referencial admissível e

$$(1) \qquad x_i = u_i\,t,$$

com

$$(2) \qquad v^2<c^2,$$

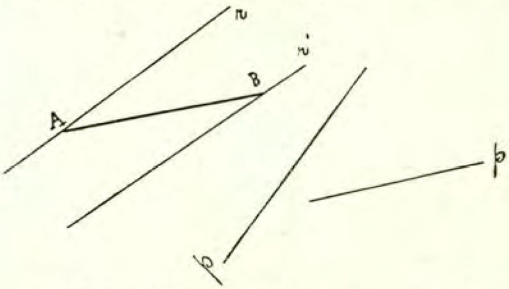
as equações correspondentes da linha de universo de um ponto material animado de movimento rectilínio uniforme.

Imaginemos agora outros dois pontos materiais, P, Q, animados de movimento rectilínio e uniforme de velocidades iguais, como acontece quando P e Q são as extremidades de uma régua em repouso num qualquer referencial admissível em Relatividade Restricta.

As suas linhas de universo são da forma

$$(3) \qquad \begin{cases} x_i = v_i\,t + a_i \\ x_i = v_i\,t + b_i \end{cases}$$

Definição. *Entende-se por distância dos pontos materiais* P *e* Q *segundo o espaço próprio do ponto* (1), *o valor* d_u^v *dado pelo invariante fundamental*



r, r' representativas de (1), p representativa de (2); p' direcção *ortogonal* a p; AB paralela a p'

$$(4) \qquad \left(d_u^v\right)^2 = I_u^v = \sum \Delta' x_i^2 - c^2\,\Delta' t^2,$$

em que $\Delta' x_i$, $\Delta' t$ *correspondem a posições de* P *e* Q