de H. HOPF [3], não pode ser vazia a intersecção C_i de n quaisquer dos conjuntos $B_j\ (j=1,\cdots n+1;\ j\neq i)$. Por outro lado, devem ser disjuntos dois quaisquer dos conjuntos $C_i\ (i=1,\cdots n+1)$, visto que de contrário a intersecção de todos os $B_i\ (i=1,\cdots n+1)$ seria não vazia e um dos conjuntos B_i deveria então ter um par de pontos antipódicos.

Existem portanto, sobre S, $n+1$ diferentes pontos P_i e C_i. Seja agora T_i a calote esférica de S cujos pontos estão separados dos P_i por uma distância (euclidiana) não inferior a p. Em virtude da hipótese $D^i<p$, será vazia a intersecção $T_i B_j$ para $j\neq i$, de maneira que T_i é recoberto apenas por B_i. Designando por ρ o raio esférico de T_i (as calotes são todas congruentes), podemos dizer que as distâncias esféricas de pares de pontos $P_i P_k\ (i\neq k)$ são todas superiores a 2ρ. Mas $\cos(\rho/2)=p$ e portanto $\cos 2\rho = = 2(2p^2-1)^2 = -1/n$. Ora, segundo um conhecido lema de K. REINHARDT [4] as distâncias esféricas de $n+1$ pontos da superfície duma esfera n-dimensional não podem ser todas superiores a $\arccos(-1/n)$.

A contradição acima referida fica pois assim em evidência.

Para poder escrever a relação (a) com o sinal de igualdade é necessário demonstrar inversamente que existe uma cobertura de K por $n+1$ conjuntos fechados de pontos tais que $D^i\leqslant p$ para qualquer i. Nos casos $n=2$ e $n=3$ obtemos efectivamente este resultado partindo da cobertura de S por $n+1$ simplexos B_i regulares, esféricos e congruentes de lado esférico $s=\arccos(-1/n)$ e formando A_i com a fronteira convexa de B_i e Z (centro da esfera). Desta forma K ficará recoberto por $n+1$ sectores esféricos A_i de diâmetro euclidiano p.

A questão aqui discutida está estreitamente ligada com outra questão, ainda não esclarecida para $n>2$, que aparece quando se considera, em lugar da esfera, um conjunto de pontos arbitrário. Mais exactamente: Existe um número mínimo C_n para o qual ainda é possível afirmar que todos os conjuntos n-dimensionais de pontos de diâmetro $D=1$ podem ser divididos em conjuntos parciais de diâmetro $D^i\leqslant C_n (i=1,\cdots n+1)$. Qual o valor de C_n?

Segundo uma suposição de K. BORSUK [5]

$$(d) \qquad C_n<1$$

para qualquer n. A relação entre estas constantes C_n de BORSUK e as constantes D_n de KNASTER, consideradas no presente trabalho, é evidentemente

$$(e) \qquad D_n\leqslant C_n$$

A igualdade em (e) tem lugar, trivialmente, para $n=1$ e também para $n=2$ segundo um resultado de D. GALE [6].

Se o mesmo acontecesse para qualquer n, isso significaria que a esfera oferece, à divisão em partes mais pequenas, maior resistência que qualquer outro corpo não esférico.

Sobre a noção de distância em relatividade restrita

por *Ruy Luís Gomes*

Sejam x_i, t as coordenadas de um referencial admissível e

$$(1) \qquad x_i = u_i\, t,$$

com

$$(2) \qquad v^2 < c^2,$$

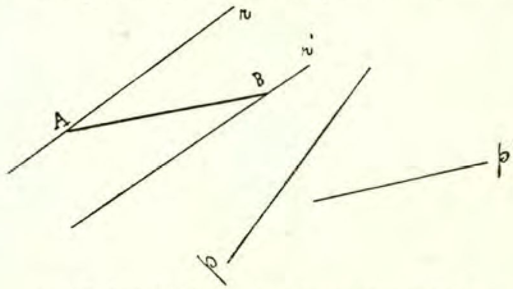
as equações correspondentes da linha de universo de um ponto material animado de movimento rectilínio uniforme.

Imaginemos agora outros dois pontos materiais, P, Q, animados de movimento rectilínio e uniforme de velocidades iguais, como acontece quando P e Q são as extremidades de uma régua em repouso num qualquer referencial admissível em Relatividade Restricta.

As suas linhas de universo são da forma

$$(3) \qquad \begin{cases} x_i = v_i\, t + a_i \\ x_i = v_i\, t + b_i \end{cases}$$

DEFINIÇÃO. *Entende-se por distância dos pontos materiais* P *e* Q *segundo o espaço próprio do ponto* (1), *o valor* d_u^v *dado pelo invariante fundamental*



r, r' representativas de (1), p representativa de (2); p' direcção *ortogonal* a p; AB paralela a p'

$$(4) \qquad (d_u^v)^2 = I_u^v = \sum \Delta' x_i^2 - c^2\,\Delta' t^2,$$

em que $\Delta' x_i$, $\Delta' t$ *correspondem a posições de* P *e* Q *situadas numa direcção ortogonal à linha de universo de* (1).

As hipóteses em que assenta esta definição implicam,

(5) $$\sum \Delta' x_i \,.\, \Delta x_i - c^2 \Delta t \,.\, \Delta' t = 0\,,$$

como condição de *ortogonalidade* entre

(6) $$\Delta' x_i = v_i \Delta' t + a_i - b_i$$

e

(6') $$\Delta x_i = u_i \Delta t\,.$$

Note-se que a *condição da ortogonalidade* (5), combinada com (6'), garante $I^{\mathbf{v}}_{\mathbf{u}} > 0$ e portanto $d^{\mathbf{v}}_{\mathbf{u}}$ real. O sistema (5) e (6') dá-nos

(7) $$\sum u_i \Delta' x_i - c^2 \Delta' t = 0\,,$$

e, utilizando (6'), resulta

(8) $$\sum u_i (v_i \Delta' t + a_i - b_i) - c^2 \Delta' t = 0\,,$$

donde

(9) $$(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v} - c^2)\,\Delta' t + \mathbf{u}\,|\,\mathbf{r} = 0$$

em que $\mathbf{r} = \overline{a - b}$.

O valor de $I^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}}$ é, pois,

$$I^{\mathbf{v}}_{\mathbf{u}} = \sum (v_i \Delta' t + a_i - b_i)^2 - c^2 \Delta' t^2$$
$$= (v^2 - c^2)\,\Delta' t^2 + 2\,\mathbf{v}\,|\,\mathbf{r} \cdot \Delta' t + \mathbf{r}^2$$

ou ainda

(10) $$I^{\mathbf{v}}_{\mathbf{u}} = \frac{v^2 - c^2}{(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v} - c^2)^2}(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{r})^2 - 2\,\frac{\mathbf{v}\,|\,\mathbf{r} \,.\, \mathbf{u}\,|\,\mathbf{r}}{\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v} - c^2} + \mathbf{r}^2\,.$$

Casos particulares

α) $$\mathbf{u} = 0$$
$$I^{\mathbf{v}}_{0} = \mathbf{r}^2 :$$

distância no espaço do referencial, pois $\mathbf{u} = 0$ *significa repouso em relação a esse referencial.*

β) $$\mathbf{u} = \mathbf{v}$$

$$I^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}} = \frac{v^2 - c^2}{(v^2 - c^2)^2}(\mathbf{v}\,|\,\mathbf{r})^2 - 2\,\frac{(\mathbf{v}\,|\,\mathbf{r})^2}{v^2 - c^2} + \mathbf{r}^2$$

$$I^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}} = \frac{(\mathbf{v}\,|\,\mathbf{r})^2}{v^2 - c^2} + \mathbf{r}^2$$

$$I^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}} = \frac{c^2 - v^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{c^2 - v^2}\,\mathbf{r}^2$$

$$I^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}} = \frac{1 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{1 - \beta^2}\,\mathbf{r}^2\,,$$

designando por β o cociente $\dfrac{v}{c}$ e por θ o ângulo dos dois vectores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{r}$.

A última fórmula ainda se pode escrever

(11) $$I^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}} = \frac{1 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{1 - \beta^2}\, I^{\mathbf{v}}_{0}\,,$$

ficando assim em evidência a relação entre as distâncias das mesmas linhas do universo (3), *segundo o espaço próprio dessas linhas e segundo o espaço do referencial* $\mathrm{x}_i\,, \mathbf{t}$.

(11) é uma fórmula conhecida, principalmente nos dois casos extremos

$$\beta = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad I^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}} = I^{\mathbf{v}}_{0}$$

e

$$\beta = 0 \quad \rightarrow \quad I^{\mathbf{v}}_{0} = (1 - \beta^2)\, I^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}}\,;$$

este último exprime *a contracção de* Lorentz no sentido do movimento referido a $x_i\,t$, pois corresponde a $\mathbf{r}$ paralelo a $\mathbf{v}$.

No caso $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ vem, como já salientamos

$$I^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}} = I^{\mathbf{v}}_{0} = \mathbf{r}^2\,.$$

Procuremos agora as condições para que

(12) $$I^{\mathbf{v}}_{\mathbf{u}} = \mathbf{r}^2\,,$$

com $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$.

A fórmula (10) dá-nos, então,

(13) $$\frac{v^2 - c^2}{(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v} - c^2)^2}(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{r})^2 - 2\,\frac{\mathbf{v}\,|\,\mathbf{r} \,.\, \mathbf{u}\,|\,\mathbf{r}}{\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v} - c^2} = 0\,,$$

que se desdobra em

(14) $$\mathbf{u}\,|\,\mathbf{r} = 0$$

e

(14') $$(v^2 - c^2)\,\mathbf{u}\,|\,\mathbf{r} - \mathbf{v}\,|\,\mathbf{r}\,(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v} - c^2) = 0\,,$$

pois $\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v} - c^2$ é sempre diferente de zero $(u^2, v^2 < c^2)$.

Portanto, se

$$\mathbf{v}\,|\,\mathbf{r} = 0$$

só os vectores $\mathbf{u}$ do plano

$$\mathbf{u}\,|\,\mathbf{r} = 0\,,$$

a que pertence o próprio $\mathbf{v}$, satisfazem à condição

$$I^{\mathbf{v}}_{\mathbf{u}} = \mathbf{r}^2\,.$$

Porém, se

$$\mathbf{v}\,|\,\mathbf{r} \neq 0\,,$$

além das soluções do plano

$$\mathbf{u}\,|\,\mathbf{r} = 0\,,$$

que satisfazem sempre, há soluções fora desse plano, pois (14') ainda se pode escrever com a forma

(15) $$\mathbf{u}\,|\,[(v^2 - c^2)\,\mathbf{r} - \mathbf{v}\,|\,\mathbf{r} \,.\, \mathbf{v}] = \mathbf{v}\,|\,\mathbf{r} \,.\, c^2\,,$$

e assim é evidente que (14'), *na hipótese* $\mathbf{v}\,|\,\mathbf{r} \neq 0$, representa um plano não paralelo a

$$\mathbf{u}\,|\,\mathbf{r} = 0\,.$$

Em Relatividade Restricta não é costume pôr em evidência a solução (14') de

$$I^{\mathbf{v}}_{\mathbf{u}} = \mathbf{r}^2\,,$$

pois só se considera, de ordinário, a distância $I^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}}$; mas parece-nos interessante apontar, como esclarecimento da mesma noção de distância em Relatividade, as outras soluções de

$$I^{\mathbf{v}}_{\mathbf{u}} = \mathbf{r}^2\,,$$

para o caso de $\mathbf{v}\,|\,\mathbf{r} \neq 0$.