MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DOS EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, Ciências Fisico-Químicas e Ciências Geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos – Ano de 1953 – Ponto n.º 1.

3734 — Provar que dois números ímpares consecutivos são sempre primos entre si.

R: *Sejam* $2n+1$ *e* $2n+3$ *os números. Todo o divisor comum dos dois números será um divisor da sua diferença isto é de* 2, *como os divisores de* 2 *são* 1 *e* 2 *e este último não é neste caso divisor dos dois números só* 1 *o será e portanto os números são primos entre si.*

3735 — Calcular dois inteiros positivos, sabendo que o seu m. m. c. é 308 e que o seu m. d. c. é 11. Achar as diversas soluções do problema.

R: *Seja* $a=11m$ *e* $b=11n$ *os números cujo* m d c *é* 11 *e cujo* m m c *é* 308. *Será então* $308=11\,m.n.$, *onde* m *e* n *são inteiros primos entre si. Daquela fórmula resulta* $mn=28$ *e portanto ou* $m=1$ *e* $n=28$ *ou* $m=2$ *e* $n=14$, *ou* $m=4$ *e* $n=7$, *donde as três soluções:* $a_1=11, b_1=308; a_2=22, b_2=154; a_3=44, b_3=77$.

3736 — Qual o resto da divisão do produto abc por 9, sabendo que os restos das divisões de a, b e c por 9 são 3, 4 e 8 respectivamente. Justificar a resposta.

R: *Em vista do enunciado é* $abc \equiv 3.4.8$ *mod 9 ou seja* $abc\equiv 96$ *mod 9 ou ainda* $abc \equiv 6$ *mod 9, e daqui resulta ser o resto* 6. *A justificação resulta da definição de congruência e das propriedades das congruências.*

3737 — Decompor de todos os modos possíveis o número 3000 em duas parcelas inteiras positivas, múltiplas respectivamente de 18 e de 31.

R: *Será* $18x+31y=3000$. *Esta equação tem uma solução inteira* $y=-6, x=177$, *donde as soluções gerais em números inteiros* $x=177+31m$; $y=-6-18m$ *onde* m *é um inteiro? As soluções inteiras positivas obtem-se daquelas fórmulas desde um inteiro tal que* $-177/31<m<-1/3$ *quer dizer que seja* $m-5\leqslant m<-1/3$, *donde vem para* m *os valores* $-5, -4, -3, -2$ *e* -1. *O problema tem assim 5 soluções.*

3738 — Determinar m de modo que as raízes da equação $x^2+2mx+4=0$ sejam reais, desiguais e ambas positivas.

R: *Terá que ser* $\Delta=m^2-4>0$, *isto é,* $m<-2$ *ou* $m>2$; *e alem disso ser* $-m>0$, *donde finalmente a solução do problema* $m<-2$.

3739 — Determinar x de modo que o 2.º, o 3.º e o 5.º termos do desenvolvimento de $(2+x)^5$ estejam em progressão geométrica.

R: *Os termos pedidos são, o* 2º : $80x$, *o* 3º : $80x^2$ *e o* 5º : $10x^4$. *Para que os termos estejam em progressão geometrica terá que ser* $(80x^2):(80x)=(10x^4):(80x^2)$ *donde* $x=\frac{1}{8}x^2$ *e daqui as duas soluções* $x=0$ *ou* $x=8$. *A solução* $x=0$ *servirá desde que se considere a existência de progressões geometricas de razão* 0, *fora disso não.*

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, Ciências Fisico-Químicas e Ciências Geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos – Ano de 1953 – Ponto nº 2.

3740 — Provar que o produto de dois números pares consecutivos é um múltiplo de 8.

R: *Sejam* $a=2n$ *e* $b=2n+2$ *os números pares consecutivos. Será* $ab=2n(2n+2)=4n^2+4n=$ $=4n(n+1)$; *por outro lado é ou* $n=2p$ *ou* $n=2p+1$ *No primeiro caso* $ab=4.2p(n+1)=8p(n+1)$ *e o produto é multiplo de* 8. *No segundo caso é* $n+1=$ $=2p+2$ *e então* $ab=4n(2p+2)=8n(p+1)$ *e do mesmo modo é* ab *multiplo de* 8.

3741 — Determinar os inteiros positivos que divididos por 7 dão resto superior ao cociente em 3 unidades.

R: *A equação que resolve o problema é* $x=7y+y+3$ *ou seja* $x-8y=3$ *da qual uma solução em números inteiros se vê imediatamente ser* $x=3, y=0$; *daqui as soluções gerais, em números inteiros* $x=3+8m$ *e* $y=m$ *onde* m *é um inteiro qualquer. Quer dizer os números pedidos são da forma* $x=3+8m$ *onde* $m\geqslant 0$ *é um inteiro, inferior a 4 pois o resto deve ser inferior a* 7.

3742 — Qual o resto da divisão de $a+b$ por 13, sabendo que a é um múltiplo de 104 e que b dividido por 13 dá de resto 8. Justificar a resposta.

R: *Como* $104=\dot{1}\dot{3}$ *e* $b=\dot{1}\dot{3}+8$ *será* $a+b=\dot{1}\dot{3}+8$ *donde o resto da divisão de* $a+b$ *por* 13 *é* 8.

3743 — Decompor de todos os modos possíveis a fracção $\frac{3149}{510}$ em duas parcelas fraccionárias positivas de denominadores 17 e 30, respectivamente.

R: *Será* $\frac{3149}{510}=\frac{x}{17}+\frac{y}{30}$ *ou seja* $30x+17y=3149$ *equação que admite a solução* $x=-1$ $y=187$ *donde as soluções gerais em números inteiros* $x=-1-17m$ $y=187+30m$ *onde* m *é um inteiro qualquer. Sendo* $x>0$ *e* $y>0$ *virá* $-\frac{187}{30}<m<-\frac{1}{17}$ *quer dizer* m *terá os valores* $-6, -5, -4, -3, -2$, *e* -1 *donde vem para* x *os valores* 101, 84, 67, 50, 33, 16 *e para* y *os valores correspondentes* 7, 37, 67, 97, 127, 157.

3744 — Determinar m de modo que as raízes da equação

$$x^2-(4m-1)x+4m^2-3=0$$

sejam reais e ambas positivas.

R: *Deverá ser* (1) $\Delta=(4m-1)^2-4(4m^2-3)\geqslant 0$, (2) $P=4m^2-3>0$ *e* (3) $S=4m-1>0$, *donde se segue* $m\leqslant\frac{13}{8}$ *por* (1); $m>\frac{\sqrt{3}}{3}$ *ou* $m<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ *por* (2) *e* $m>\frac{1}{4}$ *por* (3). *Daqui resulta dever ser* $\frac{\sqrt{3}}{2}<m\leqslant\frac{13}{8}$.

3745 — Determinar n de modo que os coeficientes do 5.º, do 6.º e do 7.º termos de $(x+a)^n$ estejam em progressão aritmética.

R: *O 5.º, 6.º e 7.º termos do desenvolvimento de* $(x+a)^n$ *são respectivamente* ${}^nC_4\,x^{n-4}a^4$, ${}^nC_5\,x^{n-5}a^5$, ${}^nC_6\,x^{n-6}$ *e para que os coeficientes estejam em progressão aritmética deverá ser:*
${}^nC_5-{}^nC_4={}^nC_6-{}^nC_5$ *ou* ${}^nC_4+{}^nC_6=2\,{}^nC_5$ *donde se obtém*

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}+\frac{n(n-1)\cdots(n-5)}{6!}=$$

$$=2\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-4)}{5!}\quad \textit{ou ainda}$$

$5\cdot 6+(n-4)(n-5)=2\cdot 6\cdot(n-4)$ *e portanto a equação* $n^2-21n+98=0$ *que admite as duas soluções* $n=14$ *e* $n=7$, *as quais servem ao problema.*

Soluções de J. S. P.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — MATEMÁTICAS GERAIS — **1.º Exame de Frequência, 1952-53.**

3746 — Calcular a primitiva da função $y=1/(x+4)^2(x^2+4)$.

R: $P\,y=-\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{x+4}+\frac{1}{50}\log(x+4)-\frac{1}{100}\log(x^2+4)+\frac{3}{200}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+C$

3747 — Calcular as derivadas laterais da função

$$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{para } x<1\\ +\sqrt{4-x^2} & \text{para } x\geqslant 1\end{cases}$$

no ponto $x=1$.

R: $f'_d(1)=-1/3$ *e* $f'_e(1)=-\infty$.

3748 — Deduza o critério de CAUCHY para o estudo de séries de termos positivos.

3749 — Que pode concluir sobre a continuidade num ponto de uma função com derivada nesse ponto? Justifique.

3750 — Estabeleça a regra de derivação da função $y=\operatorname{sen} x$.

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. C. — GEOMETRIA DESCRITIVA — **1.º Exame de Frequência, 1952-53.**

3751 — *Geometria de Monge.* Conhece-se a projecção horizontal de um triângulo, a projecção vertical de um dos seus vértices, e o seu plano, que é definido pelos traços. Determinar a projecção vertical do triângulo.

3752 — *Geometria de Monge.* Conduzir por um ponto a recta paralela às rectas de perfil de um plano dado pelos traços. Determinar em seguida a distância dos dois pontos que utilizou para definir a recta.

3753 — *Geometria cotada.* Determinar o simétrico de um ponto em relação a um plano, quando a projecção do ponto está sobre a escala de declive do plano.