R: *Será* $\frac{3149}{510}=\frac{x}{17}+\frac{y}{30}$ *ou seja* $30x+17y=3149$ *equação que admite a solução* $x=-1$ $y=187$ *donde as soluções gerais em números inteiros* $x=-1-17m$ $y=187+30m$ *onde* m *é um inteiro qualquer. Sendo* $x>0$ *e* $y>0$ *virá* $-\frac{187}{30}<m<-\frac{1}{17}$ *quer dizer* m *terá os valores* $-6,-5,-4,-3,-2$, *e* -1 *donde vem para* x *os valores* $101, 84, 67, 50, 33, 16$ *e para* y *os valores correspondentes* $7, 37, 67, 97, 127, 157$.

3744 — Determinar m de modo que as raízes da equação

$$x^2-(4m-1)x+4m^2-3=0$$

sejam reais e ambas positivas.

R: *Deverá ser* (1) $\Delta=(4m-1)^2-4(4m^2-3)\geqslant 0$, (2) $P=4m^2-3>0$ *e* (3) $S=4m-1>0$, *donde se segue* $m\leqslant\frac{13}{8}$ *por* (1); $m>\frac{\sqrt{3}}{3}$ *ou* $m<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ *por* (2) *e* $m>\frac{1}{4}$ *por* (3). *Daqui resulta dever ser* $\frac{\sqrt{3}}{2}<m\leqslant\frac{13}{8}$.

3745 — Determinar n de modo que os coeficientes do 5.º, do 6.º e do 7.º termos de $(x+a)^n$ estejam em progressão aritmética.

R: *O 5.º, 6.º e 7.º termos do desenvolvimento de* $(x+a)^n$ *são respectivamente* ${}^nC_4\,x^{n-4}a^4$, ${}^nC_5\,x^{n-5}a^5$, ${}^nC_6\,x^{n-6}$ *e para que os coeficientes estejam em progressão aritmética deverá ser:*

${}^nC_5-{}^nC_4={}^nC_6-{}^nC_5$ *ou* ${}^nC_4+{}^nC_6=2\,{}^nC_5$ *donde se obtém*

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}+\frac{n(n-1)\cdots(n-5)}{6!}=$$
$$=2\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-4)}{5!}\quad\textit{ou ainda}$$

$5\cdot 6+(n-4)(n-5)=2\cdot 6\cdot(n-4)$ *e portanto a equação* $n^2-21n+98=0$ *que admite as duas soluções* $n=14$ *e* $n=7$, *as quais servem ao problema.*

Soluções de J. S. P.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Matemáticas Gerais — **1.º Exame de Frequência, 1952-53.**

3746 — Calcular a primitiva da função $y=1/(x+4)^2(x^2+4)$.

R: $P\,y=-\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{x+4}+\frac{1}{50}\log(x+4)-\frac{1}{100}\log(x^2+4)+\frac{3}{200}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{2}+C$

3747 — Calcular as derivadas laterais da função

$$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{para } x<1 \\ +\sqrt{4-x^2} & \text{para } x\geqslant 1\end{cases}$$

no ponto $x=1$.

R: $f'_d(1)=-1/3$ *e* $f'_e(1)=-\infty$.

3748 — Deduza o critério de Cauchy para o estudo de séries de termos positivos.

3749 — Que pode concluir sobre a continuidade num ponto de uma função com derivada nesse ponto? Justifique.

3750 — Estabeleça a regra de derivação da função $y=\mathrm{sen}\,x$.

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. C. — Geometria Descritiva — **1.º Exame de Frequência, 1952-53.**

3751 — *Geometria de Monge.* Conhece-se a projecção horizontal de um triângulo, a projecção vertical de um dos seus vértices, e o seu plano, que é definido pelos traços. Determinar a projecção vertical do triângulo.

3752 — *Geometria de Monge.* Conduzir por um ponto a recta paralela às rectas de perfil de um plano dado pelos traços. Determinar em seguida a distância dos dois pontos que utilizou para definir a recta.

3753 — *Geometria cotada.* Determinar o simétrico de um ponto em relação a um plano, quando a projecção do ponto está sobre a escala de declive do plano.

ANÁLISE INFINITÉSIMAL

F. C. C. – Cálculo Infinitesimal – 1.º Exame de Frequência, 1952-53.

3754 – Calcular a primitiva da função
$$y = 2\,\mathrm{sh}\,x/(1+e^{2x}).$$
R: *Pondo* $2\,\mathrm{sh}\,x = e^x - e^{-x}$ *e desdobrando* y *numa diferença, a primitiva da primeira parcela é imediata e a da segunda calcula-se pondo* $e^x = t$.
$$\mathrm{P}\,y = 2\,\mathrm{arc\,tg}\,e^x + e^{-x} + C.$$

3755 – Verifique que o ponto da curva
$$e^{2xy} - 3\,e^{xy} + 2 = 0$$
em que é máxima a soma das coordenadas é $\left(\sqrt{\log 2}, \sqrt{\log 2}\right)$.

R: *Trata-se de extremar a função* $f(x, y) = x + y$, *sendo a equação da curva uma condição de ligação.*

3756 – Defina a função de variação limitada.

3757 – Demonstre o teorema de Bernstein.

3758 – Demonstre uma condição necessária e suficiente para que a função $f(x)$ seja desenvolvível em série.

F. C. C. – Análise Superior – 1.º Exame de Frequência – 1952-53.

3759 – Determinar as curvas integrais da equação diferencial
$$y\,y'^2 + 2\,x\,y' - y = 0;$$
mostrar que constituem duas famílias de curvas ortogonais, que o eixo $0x$ é uma curva integral e que a curva descriminante se reduz a um ponto. R: *Que* $y = 0$ *é uma curva integral verifica-se logo sobre a equação. Também é evidente que as duas famílias de curvas integrais são ortogonais, pois os dois valores de* y' *tirados da equação têm por produto* -1. *Por outro lado, um cálculo simples mostra que a curva descriminante se reduz à origem das coordenadas. Finalmente: as curvas integrais da equação são as cónicas*
$$y^2 + (1-k^2)\,x^2 \pm 2\,k\,x = 0$$

3760 – Verificar que as linhas assintóticas da superfície $z = \mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{y}{x}$ se projectam sobre os planos z=const., segundo linhas ortogonais.

R: *As linhas assintóticas da superfície são*
$$\begin{cases} z = \mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{y}{x} \\ y = m\,x \end{cases} \qquad \begin{cases} z = \mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{y}{x} \\ x^2 + y^2 = n\,. \end{cases}$$

3761 – Integrar o sistema de Charpit-Lagrange e determinar o integral completo da equação de derivadas parciais $p^2 + q^2 = 2\,(q\,x + p)$.

R: $$z = \frac{1}{\alpha^2+1}\left[(\alpha\,x + y)^2 + \beta\right].$$

I. S. C. E. F. — Cálculo — 1.º Exame de Frequência — 21 de Março de 1953.

I

3762 — Dada a recta $x = a\,t + b$, $y = c\,t + d$, $z = e\,t + f$, escrever a equação vectorial e determinar a distância do ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ à recta, por processos vectoriais. R: *Equação vectorial da recta* $P = 0 + (a\,t + b)\,I + (c\,t + d)\,J + (e\,t + f)\,K$.

Distância do ponto à recta $\delta = \dfrac{|(P_1-P_0)\wedge(P_2-P_0)|}{(P_2-P_1)}$, *sendo* P_1 *e* P_2 *dois quaisquer pontos da recta dada. Se forem* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *e* $P_2(x_2, y_2, z_2)$
$$\delta = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}} \quad \textit{com}$$
$$A = (y_1-y_0)(z_2-z_0) - (y_2-y_0)(z_1-z_0)$$
$$B = (x_2-x_0)(z_1-z_0) - (x_1-x_0)(z_2-z_0)$$
$$C = (x_1-x_0)(y_2-y_0) - (x_2-x_0)(y_1-y_0).$$

II

3763 — Determinar a equação vectorial do plano perpendicular à recta $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ e que forma com os eixos coordenados do 1.º octante um volume igual a 3. R: *Equação cartesiana do plano*
$$\frac{x}{\dfrac{D}{2\lambda}} + \frac{y}{\dfrac{D}{2\lambda}} + \frac{z}{\dfrac{D}{3\lambda}} = 1.$$
Como
$$\frac{1}{6}\times\frac{D}{2\lambda}\times\frac{D}{2\lambda}\times\frac{D}{3\lambda} = 3,$$
a equação do plano é $2\,x + 2\,y + 3\,z = 6$. *Definindo o plano por um dos seus pontos* $P_0(0, 0, 2)$ *e pelo seu vector normal* $(2, 2, 3)$ *a equação vectorial é*
$$P - P_0 = \lambda\,(2\,I + 2\,J + 3\,K).$$

III

3764 — Dão-se 4 pontos $A(0,1,1)$ $B(1,0,1)$ $C(1,1,0)$ e $D(2,2,2)$. Achar a altura do h tetraedro de base ABC e vértice D. R:
$$\frac{1}{6}\left|(B-A)\wedge(C-A)\right|\times h = \frac{1}{6}\left|(B-A)\wedge(C-A)\,\middle|\,(D-A)\right|$$
donde se tira $h = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

IV

3765 — Calcular os integrais.

a) $$I_1 = \int_{1/2}^{1} \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}};$$

b) $$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\theta}{a\cosh\theta + b\,\mathrm{senh}\,\theta} \quad (b > a > 0)$$

R: a) *Fazendo* $x = \mathrm{sen}\,t$ *vem* $I_1 = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \mathrm{cosec}^4\,t\,dt =$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{cosec}^2 t \, dt + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{cosec}^2 t \operatorname{cotg}^2 t \, dt =$$

$$= -\left[\operatorname{cotg} t\right]_{\pi/6}^{\pi/2} - \frac{1}{3}\left[\operatorname{cotg}^3 t\right]_{\pi/6}^{\pi/2} = 2\sqrt{3}.$$

b) $$I_2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a+b)e^x - (a-b)e^{-x}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{b^2-a^2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}\,e^x\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{b^2-a^2}}.$$

I. S. C. E. F. — Cálculo — 2.º Exame de Frequência — 9 de Junho de 1953.

I

3766 — Utilizando a teoria dos resíduos calcule os integrais:

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos^2 x}{(x^2+1)^3}\,dx$ b) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z-1)^2(z-2)^3\sqrt{z+5}}$

C — contorno formado pela circunferência de centro na origem e de raio 4. R: *Seja*

$f(z) = \dfrac{1+e^{2zi}}{(1+z^2)^2}$; *se* $z = \rho e^{i\theta}$, *o módulo de* $z f(z) =$ $= \rho e^{\theta i}\dfrac{1+e^{2\rho(i\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)}}{(1+\rho^2 e^{2i\theta})^3}$ *tende para zero, para* $\rho = \infty$, *se* $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, *pois então será inferior a* $\dfrac{2\rho}{(\rho^2-1)^3}$.

Logo $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+e^{2xi}}{(1+x^2)^3} = 2\pi i R$, *onde* R *é o resíduo do polo* $z = i$ *situado na região do semi plano dos* YY *positivos.*

Seja $z = i + t$ *e, designando por* $f(z) = \dfrac{1+e^{2\,i}}{(1+z^2)^3}$

vem $$f(i+t) = \frac{1+e^{2(it-1)}}{t^3(2i+t)^3} = \frac{1+e^{-2}\left(1+2it-\frac{4t^2}{2!}\right)}{-8it^3\left(1+\frac{t}{2i}\right)^3} =$$

$$= \frac{1+e^{-2}(1+2it-2t^2+\cdots)}{-8it^3}\left(1-\frac{3}{2i}t-\frac{3}{2}t^2+\cdots\right) =$$

$$= -\frac{1}{8i}\left[1+e^{-2}+2e^{-2}it-2e^{-2}t^2\right]\left[1+\frac{3}{2}it - \frac{3}{2}t^2+\cdots\right].$$

$$R = -\frac{1}{8i}\left[-(1+e^{-2})\times\frac{3}{2} - 2e^{-2} - 3e^{-2}\right] = \frac{3+13e^{-2}}{16i}.$$

Logo $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\cos 2x}{(1+x^2)^3}\,dx = \pi\times\frac{3+13e^{-2}}{8}$ *e*

$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^3}\,dx = \pi\times\frac{3e^2+13}{32e^2}$. b) *Suponhamos* $|z| < 5$ *e* $\sqrt{z+5}$ *positivo para* $z = 0 \cdot \sqrt{z+5}$ *conserva um valor bem determinado, o seu argumento fica compreendido entre* $-\dfrac{\pi}{4}$ *e* $+\dfrac{\pi}{4}$, *enquanto que a parte real de* z *permanece superior a* -5. *O integral tomado sobre o contorno do círculo* $z = 4e^{i\theta}$, *no sentido directo, é igual ao produto directo por* $2\pi i$ *da soma dos resíduos dos dois polos* $z = 1$ *e* $z = 2$, *interiores ao círculo. Seja* $z = 1 + t$

$$\frac{1}{(z-1)^2(z-2)^3\sqrt{z+5}} = \frac{1}{t^2(t-1)^3\sqrt{6+t}} =$$

$$-\frac{1}{t^2\sqrt{6}}\left(1-t\right)^{-3}\left(1+\frac{t}{6}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-1}{t^2\sqrt{6}}\left(1+3t+\right.$$

$$\left.+6t^2+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{2}\frac{t}{6}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{t^2}{36}+\cdots\right) = -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{35}{12t}+\cdots\right).$$

Se $z = 2 + t$, *ter-se-á*

$$\frac{1}{(z-1)^2(z-2)^3\sqrt{z+5}} = \frac{1}{t^3\sqrt{7}}\left(1+t\right)^{-2}\left(1+\frac{t}{7}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{t^3\sqrt{2}}\left(1-2t+3t^2-4t^3+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{2}\frac{t}{7}+\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{t^2}{49}-\cdots\right) = \frac{1}{\sqrt{7}}\left[\frac{1}{t^3}-\frac{29}{14t^2}+\left(3+\frac{59}{8\cdot 49}\right)\frac{1}{t}-\cdots\right].$$

Os resíduos são $-\dfrac{35}{12\sqrt{6}}$ *e* $\left(3+\dfrac{59}{8\cdot 49}\right)\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

O integral é igual a $\left(\dfrac{6}{\sqrt{7}}+\dfrac{59}{196\sqrt{7}}-\dfrac{35}{6\sqrt{6}}\right)\pi i$.

II

3767 — Calcular o integral.

a) $I = \displaystyle\iiint_v [2x+3y+6z]^2\,dx\,dy\,dz$, tomado no interior do elipsoide $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+z^2 = 1$, utilizando uma conveniente mudança de variáveis. *b)* O volume compreendido entre o mesmo elipsoide, a esfera $x^2+y^2+z^2 = \dfrac{1}{4}$ e os planos $x = -\dfrac{1}{2}$ e $x = +\dfrac{1}{2}$. Reduza o problema ao cálculo de integrais simples. R: a) *Como o elipsoide é simétrico em relação aos planos coordenados vê-se que:*

$$\iiint_V xy\,dx\,dy\,dz = \iiint_V xz\,dx\,dy\,dz =$$

$= \displaystyle\iiint_V yz\,dx\,dy\,dz = 0$ *e portanto* $I = \displaystyle\iiint_V (4x^2 + 9y^2 + 36z^2)\,dx\,dy\,dz$. *Efectuando a mudança de variáveis* $x = 3\rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi$, $y = 2\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$, $z = \rho\cos\theta$ *tem-se para a equação do elipsoide* $\rho = 1$

$$0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi \quad 0 < \rho < 1$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = 6\rho^2\operatorname{sen}\theta.$$

$$I = \int^{1}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} 36\,\rho^2\, 6\,\rho^2 \operatorname{sen}\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi = \frac{864}{5}\pi .$$

b) *O volume será dado pelo integral*

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = 8\iint_A \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}\right) dx\,dy =$$

$$= 8\int^{1/2} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{2/3\sqrt{9-x^2}} \left[\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}\,\right] dy .$$

O problema reduz-se ao cálculo de dois integrais simples, como se pedia no enunciado.

III

3768 — *a*) Determinar as trajectórias ortogonais das curvas $(x^2+y^2)^2+2\,b^2\,(y^2-x^2)=a$ em que b é constante e a parâmetro variável. Indique o género dessas famílias (trajectórias ortogonais). *b*) Calcule para $a=b=1$ os extremantes da correspondente curva da família dada. R: a) *A equação diferencial das curvas dadas é:*

$(x^2+y^2)\,(x\,dx+y\,dy)+b^2\,(y\,dy-x\,dx)=0$. *Mudando* $\frac{dy}{dx}$ *por* $-\frac{dx}{dy}$ *tem-se a equação diferencial das trajectórias* $(x^2+y^2)\,(x\,dy-y\,dx)-b^2\,(y\,dx+x\,dy)=0$

$$\left(x\,dy-y\,dx\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)=b^2\,\frac{d\,(x\,y)}{x^2\,y^2}$$

$$\frac{y}{x}-\frac{x}{y}+\frac{b^2}{x\,y}=c \qquad y^2-x^2+b^2=c\,x\,y$$

$$x^2-y^2+c\,x\,y-b^2=0 .$$

Como $c^2+1>0$ *trata-se de uma família de hipérboles.*

b) $$(x^2+y^2)^2+2\,(y^2-x^2)=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4\,x\,[x^2+y^2-1] \quad \frac{\partial f}{\partial y}=4\,y\,[x^2+y^2+1]$$

$\frac{\partial f}{\partial x}=0$ *para* $x=0$ *e* $x^2+y^2=1$. *Para estes valores* $\frac{\partial f}{\partial y}\neq 0$.

Pontos de estacionariedade

$$A\left(x=0\,,\,y=\pm\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$$

$$B\left(x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Como $$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{8\,x^2+4\,y^2-4}{4\,y\,[x^2+y^2+1]}=-$$

$$-\frac{2\,x^2+y^2-1}{y\,[x^2+y^2+1]}$$

Mínimo $\left(x=0\,,\,y=+\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$

Máximo $\left(x=0\,,\,y=-\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$

» $\left(x=\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\,y=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

» $\left(x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\,y=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Mínimo $\left(x=\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\,y=-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Máximo $\left(x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\,y=-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

IV

3769 — A expressão $ax+by+cz=\varphi\,(x^2+y^2+z^2)$, designa a equação geral das superfícies de revolução de eixo na recta $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

Prove que a equação às derivadas parciais destas superfícies é $\frac{a+cp}{b+cq}=\frac{x+pz}{y+qz}$.

Verifique que, de facto, a equação inicial é integral geral desta última equação. Em que caso as superfícies integrais são esferas? R: *Derivando em ordem a* x, *depois em ordem a* y *e fazendo o cociente vem:*

$$a+c\,p=\varphi'\,(x^2+y^2+z^2)\,(2\,x+2\,p\,z)$$
$$b+c\,q=\varphi'\,(x^2+y^2+z^2)\,(2\,y+2\,q\,z)$$

ou

$$\frac{a+c\,p}{b+c\,q}=\frac{x+p\,z}{y+q\,z}.$$

A equação é linear

$$(c\,y-b\,z)\,p+(a\,z-c\,x)\,q=b\,x-a\,y .$$

A equação diferencial das características é

$$\frac{dx}{c\,y-b\,z}=\frac{dy}{a\,z-c\,x}=\frac{dz}{b\,x-a\,y}.$$

Multiplicando por a, b *e* c *vem:*

$$\frac{a\,dx}{a\,c\,y-a\,b\,z}=\frac{b\,dy}{a\,b\,z-b\,c\,x}=\frac{c\,dz}{b\,c\,x-a\,c\,y}=$$

$$=\frac{a\,dx+b\,dy+c\,dz}{0}=\frac{d\,(a\,x+b\,y+c\,z)}{0}$$

$$a\,x+b\,y+c\,z=c_1 .$$

Do mesmo modo, multiplicando por x, y *e* z

$$x^2+y^2+z^2=c_2$$

$$c_1=\varphi\,(c^2)\longrightarrow a\,x+b\,y+c\,z=\varphi\,(x^2+y^2+z^2).$$

Quando $\varphi(x^2+y^2+z^2) = K^2(x^2+y^2+z^2)$ *trata-se duma família de esferas.*

I. S. C. E. F. — Cálculo — Exame final — 17 de Julho de 1953.

I

3770 — $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ são funções contínuas, admitindo derivadas parciais finitas e contínuas no ponto $M(x,y)$.

A função $P+iQ$ é monogénea em relação à variável $z=x+iy$, nesse ponto. *a*) Diga a que condições hão-de satisfazer as funções P e Q para que $P+iQ$ seja monogénea no ponto $z_1 = y+ix$. *b*) Diga, sendo $P+iQ$ monogénea no ponto $z = x+iy$, quando é que P^2+iQ^2 é monogénea nesse ponto. R: a) *Devem ser*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = -\dfrac{\partial Q}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

o que se verifica apenas para P e Q *constantes*

b) *Deverá ser* $\begin{cases} P\dfrac{\partial P}{\partial x} = Q\dfrac{\partial Q}{\partial y} \\[2mm] P\dfrac{\partial P}{\partial y} = -Q\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$ *e como*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \quad \textit{vem} \quad P = Q.$$

II

3771 — Sendo $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ num certo domínio, mostre que o integral $I = \int_{AB} (Q-P)\,dx + (P+Q)\,dy$ é independente do caminho AB: $A(x_0,y_0)$, $B(x,y)$. *a*) Quando e em que pontos tem o integral $I(x,y)$ estacionaridade? *b*) Quando tem máximos ou mínimos? R: a) *Na hipótese do problema* $\dfrac{\partial(Q-P)}{\partial y} = \dfrac{\partial(Q+P)}{\partial x}$.

Logo o integral é uma diferencial exacta

$$I = \int_{x_0}^{x} (Q-P)\,dx + (Q+P)\,dy + \int_{y_0}^{y} (Q-P)\,dx + (Q+P)\,dy = \int_{x_0}^{x} (Q-P)\,dx + \int_{y_0}^{y} (Q+P)\,dy.$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = Q - P + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial(Q+P)}{\partial x}\,dy = 2(Q-P)$$

$$\frac{\partial I}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial(Q-P)}{\partial y}\,dx + Q + P = 2(Q+P)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \frac{\partial I}{\partial y} = 0 \ \rightarrow\ Q = P = 0.$$

Logo as curvas $P=0$ *e* $Q=0$ *devem encontrar-se para haver estacionariedade.*

b) $$r = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = 2\,\frac{\partial(Q-P)}{\partial x}$$

$$s = \frac{\partial^2 I}{\partial x\,\partial y} = 2\,\frac{\partial(Q-P)}{\partial y} = 2\,\frac{\partial(Q+P)}{\partial x}$$

$$t = \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} = 2\,\frac{\partial(Q+P)}{\partial y}$$

$$s^2 - rt = 4\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right] = 8\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2\right] > 0.$$

Não haverá máximos e mínimos, admitindo que não é

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

III

3772 — Mostre que as trajectórias ortogonais da família de elipses confocais são hipérboles confocais

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} = 1.$$

R: *Da equação da família dada, deduz-se por derivação*

$$\lambda = -\frac{bx + ayy'}{x + yy'}.$$

Portanto a equação diferencial que define a família é

$$(xy' - y)(x + yy') = (a-b)\,y'$$

Mudando y' *em* $-1/y'$ *vem a equação diferencial das trajectórias ortogonais* $(x+yy')(xy'-y) = (a-b)\,y'$.

As trajectórias ortogonais, são do género hipérbole. Com efeito, para as curvas dadas é

$$\frac{\dfrac{x}{a+\lambda}}{\dfrac{y}{b+\lambda}} = -y'; \quad \textit{mas para as trajectórias ortogonais}$$

$$\left(-y' \rightarrow \frac{1}{y'}\right); \ \frac{x}{a+\lambda}\Big/ y/b+\lambda = \frac{1}{y'},$$ *o que quer dizer que, para os mesmos pares* (x,y) $a+\lambda$ *e* $b+\lambda$ *têm sinais contrários.*

Melhor dizendo, o cociente $\dfrac{a+\lambda}{b+\lambda}$ *tem sinais contrários nas duas famílias. E os focos são os mesmos. A distância focal numa e noutra família é* f *satisfazendo à relação* $f^2 = |a+\lambda-b+\lambda| = |a-b|$ *independente do parâmetro* λ.

FÍSICA MATEMÁTICA

F. C. C. — Física Matemática — 1.º Exame de Frequência — 1952-53.

3773 — Determinar a série de Fourier da função que coincide com $x^2/4$ em $(-\pi, \pi)$.

R: $$\frac{\pi^2}{12} + \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \cos n x .$$

3774 — A partir do resultado anterior provar a igualdade
$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{48} .$$

R: *Basta fazer* $x = \pi/2$, *recordando que a soma da série é* $[f(x+0) + f(x-0)]/2$.

3775 — Determinar a solução da equação integral
$$u(x) = x + \int_0^x x\, t\, u(t)\, dt$$
e mostre que é uma função inteira. R: *A solução é* $u(x) = \sum f_n(x)$, *com* $f_n(x) = \int_0^x x \cdot t \cdot f_{n-1}(t)\, dt$.

Obtém-se $f_n(x) = \dfrac{x^{3n-1}}{(n-1)!\, 3^{n-1}}$, *e a série* $u(x)$ *converge para todo o valor de* x.

3776 — Efectuando a mudança de variáveis
$$u = x + a t, \quad v = x - a t,$$
transforma-se a equação da corda vibrante
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$
na equação $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v}$.

Posto isto, integre a equação da corda vibrante e determine a solução $z(x, t)$ correspondente às condições iniciais.
$$\begin{cases} z(x, 0) = 1 - x^2 \\ z'_t(x, 0) = a . \end{cases}$$

R: $z = 1 - (x - a t)^2$.

As soluções dos n.os 3746 a 3761 e 3773 a 3776 são de Luís Albuquerque. As soluções dos n.os 3762 a 3772 são do M. Madureira.

PROBLEMAS

Problemas propostos ao concurso

Secção Elementar

3777 — Determine a área do circulo menor de uma esfera de raio R, sabendo que o diametro do circulo é precisamente a aresta do tetraedro inscrito na esfera. Mostre que os lados do quadrado e do triângulo equilatero inscritos na circunferência que limita o circulo menor são respectivamente as arestas do cubo e do octaedro regular inscritos na esfera.

3778 — Mostre que o quadrado da soma dos quadrados de três números se pode escrever sob a forma da soma de três quadrados inteiros.

Secção Média

3779 — Prove que, sendo α um número complexo de modulo 1, o conjunto dos números α^n, para $n = 1, 2, 3, \cdots$ é denso sobre o conjunto de todos os números x tais que $|x| = 1$, quando o argumento de α medido em graus é um número irracional.

3780 — Mostre que a sucessão assim definida $u_1 = a$, $u_2 = b$ e $u_n = (u_{n-2} + u_{n-1})/2$, para $n > 2$, é convergente e que o seu limite é $(a + 2b)/3$.

Resoluções dos problemas do concurso propostos no n.º 54

3781 — Apresentaram soluções os Srs. Vinhas Novais, António H. Alves de Oliveira e Fernando de Jesus, publicando-se a solução deste último:

R: *Aproveitando a propriedade que diz: «Num triângulo, a bissetriz dum ângulo interno divide o lado oposto em dois segmentos aditivos directamente propocionais aos lados adjacentes», pode escrever-se (ver figura)*:

$$\text{I)} \begin{cases} m + n = a \\ \dfrac{m}{c} = \dfrac{n}{b} \end{cases} \quad \textit{o que dá} \quad \begin{cases} m = \dfrac{a c}{b + c} \\ n = \dfrac{a b}{b + c} \end{cases}$$

Em seguida, aplicando o teorema que afirma: «Num triângulo o quadrado do lado oposto a um ângulo agudo é igual à soma dos quadrados dos outros dois menos o dobro do produto dum deles pela projecção do outro sobre ele» vem então para o $\Delta [A C D]$:

$$n^2 = m^2 + b^2 - 2 b \cdot \frac{c}{2}$$

ou seja, aproveitando os resultados de I),

$$\frac{a^2 b^2}{(b+c)^2} = \frac{a^2 c^2}{(b+c)^2} + b^2 - b c$$