FÍSICA MATEMÁTICA

F. C. C. — Física Matemática — 1.º Exame de Frequência — 1952-53.

3773 — Determinar a série de Fourier da função que coincide com $x^2/4$ em $(-\pi, \pi)$.

R: $$\frac{\pi^2}{12} + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{1}{n^2} \cos n x .$$

3774 — A partir do resultado anterior provar a igualdade
$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{48} .$$

R: *Basta fazer* $x = \pi/2$, *recordando que a soma da série é* $[f(x+0) + f(x-0)]/2$.

3775 — Determinar a solução da equação integral
$$u(x) = x + \int_0^x x\, t\, u(t)\, dt$$
e mostre que é uma função inteira. R: *A solução é* $u(x) = \sum f_n(x)$, *com* $f_n(x) = \int_0^x x \cdot t \cdot f_{n-1}(t)\, dt$. *Obtém-se* $f_n(x) = \frac{x^{3n-1}}{(n-1)!\, 3^{n-1}}$, *e a série* $u(x)$ *converge para todo o valor de* x.

3776 — Efectuando a mudança de variáveis
$$u = x + a t , \quad v = x - a t ,$$
transforma-se a equação da corda vibrante
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$
na equação $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$.

Posto isto, integre a equação da corda vibrante e determine a solução $z(x, t)$ correspondente às condições iniciais.
$$\begin{cases} z(x, 0) = 1 - x^2 \\ z'_t(x, 0) = a . \end{cases}$$

R: $z = 1 - (x - a t)^2$.

As soluções dos n.os 3746 a 3761 e 3773 a 3776 são de Luís Albuquerque. As soluções dos n.os 3762 a 3772 são do M. Madureira.

PROBLEMAS

Problemas propostos ao concurso

Secção Elementar

3777 — Determine a área do circulo menor de uma esfera de raio R, sabendo que o diametro do circulo é precisamente a aresta do tetraedro inscrito na esfera. Mostre que os lados do quadrado e do triângulo equilatero inscritos na circunferência que limita o circulo menor são respectivamente as arestas do cubo e do octaedro regular inscritos na esfera.

3778 — Mostre que o quadrado da soma dos quadrados de três números se pode escrever sob a forma da soma de três quadrados inteiros.

Secção Média

3779 — Prove que, sendo α um número complexo de modulo 1, o conjunto dos números α^n, para $n = 1, 2, 3, \cdots$ é denso sobre o conjunto de todos os números x tais que $|x| = 1$, quando o argumento de α medido em graus é um número irracional.

3780 — Mostre que a sucessão assim definida $u_1 = a$, $u_2 = b$ e $u_n = (u_{n-2} + u_{n-1})/2$, para $n > 2$, é convergente e que o seu limite é $(a + 2b)/3$.

Resoluções dos problemas do concurso propostos no n.º 54

3781 — Apresentaram soluções os Srs. Vinhas Novais, António H. Alves de Oliveira e Fernando de Jesus, publicando-se a solução deste último:

R: *Aproveitando a propriedade que diz: «Num triângulo, a bissetriz dum ângulo interno divide o lado oposto em dois segmentos aditivos directamente propocionais aos lados adjacentes», pode escrever-se (ver figura)*:

$$\text{I)} \begin{cases} m + n = a \\ \dfrac{m}{c} = \dfrac{n}{b} \end{cases} \quad \textit{o que dá} \quad \begin{cases} m = \dfrac{a c}{b + c} \\ n = \dfrac{a b}{b + c} \end{cases}$$

Em seguida, aplicando o teorema que afirma: «Num triângulo o quadrado do lado oposto a um ângulo agudo é igual à soma dos quadrados dos outros dois menos o dobro do produto dum deles pela projecção do outro sobre ele» vem então para o $\Delta[A\,C\,D]$:

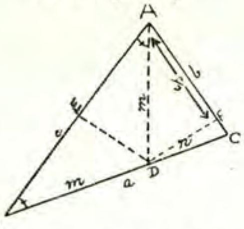
$$n^2 = m^2 + b^2 - 2 b \cdot \frac{c}{2}$$

ou seja, aproveitando os resultados de I),

$$\frac{a^2 b^2}{(b+c)^2} = \frac{a^2 c^2}{(b+c)^2} + b^2 - b c$$

e, efectuadas as simplificações, obtem-se

$$a^2 = b\,(b + c)$$



Nota: A projecção de m sobre b é $c/_2$ em virtude dos triângulos rectângulos construidos na figura serem iguais.

3652 — Publica-se a solução apresentada pelo Sr. Fernando de Jesus único soluçionista:

R: *Uma solução evidente é* $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. *Supondo a solução em que* $x \neq 0$ *e* $y \neq 0$ *tem-se:*

$$\begin{cases} (2x^2y + 4x)^2 = (2y - xy^2)^2 + 3x^2y^2 \\ 2x^2y + 4x = xy^2 - 2y + xy \end{cases} \quad \begin{cases} 2(xy - 2y)\,xy + \\ \quad + x^2y^2 = 3x^2y^2 \\ 2x^2y + 4x = xy^2 - \\ \quad - 2y + xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} (xy^2 - 2y) = xy \\ 2x^2y + 4x = xy^2 - \\ \quad - 2y + xy \end{cases} \quad \begin{cases} xy - x - 2 = 0 \\ 2x^2y + 4x = \\ \quad = y\,(xy - 2) + \\ \quad + xy \end{cases} \quad \begin{cases} xy - x - 2 = 0 \\ x^2y + 2x = xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy - x - 2 = 0 \\ xy\,(x-1) + 2x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} xy - x - 2 = 0 \\ (x+2)\,(x-1) + 2x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} xy - x - 2 = 0 \\ x^2 + 3x - 2 = 0 \end{cases}$$

o que dá as soluções:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1 + \sqrt{17}}{-3 + \sqrt{17}} \\[2ex] x = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{1 - \sqrt{17}}{-3 - \sqrt{17}} \\[2ex] x = \dfrac{-3 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

3653 — Apresentaram solução os Srs. Vinha Novais, António H. Alves de Oliveira e Fernando de Jesus, publicando-se a solução deste último:

R: *O sistema* $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0 \\ y = x \operatorname{tg} \alpha \end{cases}$ *dá*

$$B \left(\frac{6 + 8 \operatorname{tg} \alpha}{\sec^2 \alpha} , \frac{6 + 8 \operatorname{tg} \alpha}{\sec^2 \alpha} \operatorname{tg} \alpha \right).$$

Como $A\,(6\,,0)$ *vem:*

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{6 + 8 \operatorname{tg} \alpha}{\sec^2 \alpha} - 6 \right)^2 + \left(\frac{6 + 8 \operatorname{tg} \alpha}{\sec^2 \alpha} \operatorname{tg} \alpha \right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{(8 \operatorname{tg} \alpha - 6 \operatorname{tg}^2 \alpha)^2 + (6 \operatorname{tg} \alpha + 8 \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}}{\sec^2 \alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{100 \operatorname{tg}^2 \alpha \sec^2 \alpha}}{\sec^2 \alpha} = 10 \operatorname{sen} \alpha$$

3654 — Não foram apresentadas soluções.

3655 — Publica-se a única solução apresentada pelo Sr. Vinha Novais:

Toda a função racional de $\sqrt{2}$, coeficientes em R, pode ser reduzida à forma $(a + b\sqrt{2})/c$, com $m \cdot d \cdot c \cdot (a\,,b\,,c) = 1$. Admitamos, então, que $\alpha = (a + b\sqrt{2})/c$ é um inteiro de F, isto é, raiz da equação $x^2 + a_1 x + a_2 = 0$, com $a_1\,, a_2 \in I$. Então, esta equação admitirá a raiz $\alpha' = (a - b\sqrt{2})/c$ e ter-se-á

$$x^2 + a_1 x + a_2 = x^2 - (2\,a/c) \cdot x + (a^2 - 2\,b^2)/c^2$$

A igualdade entre os coeficientes implica que $2\,a/c$ e $a^2 - 2\,b^2/c^2$ sejam inteiros de R e, portanto, que $c = 1$, $c = 2$ ou $c \prec a$ (divisor de) para que $2\,a/c$ seja inteiro; se $c = 1\,, a^2 - 2\,b^2/c^2$ é também inteiro; se $c = 2$ vem $c^2 = 4$ e $a = \dot{2}$ e $b = \dot{2}$ para que a segunda expressão seja um inteiro. Mas então m. d. c. $(abc) \geqslant 2$ contrariamente à hipótese. Finalmente, se $c \prec a$, para que $a^2 - 2\,b^2/c^2$ seja inteiro deve $c \prec b$ $(c \neq 1\,, 2)$ e m. d. c. $(a\,,b\,,c) = c \neq 1$ contrariamente à hipótese.

Fica assim demonstrado que os inteiros de F são da forma $(a + b\sqrt{2})/c$, com $c = 1$ e é imediato o recíproco: todas as funções racionais de $\sqrt{2}$ da forma $a + b\sqrt{2}$ são inteiros de F.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

102 — Prof. Dr. GUIDO, Hoheisel — **Gewönnliche Differencialgleichungen** e **Aufgabensammlung zu den Gewöhnlichen und Partiellen Differentialgleichungen**. Sammlung Göschen, Bände 920—1059, Berlin, 1951-52.

São dois livrinhos da *Sammlung Göschen* que, como de costume, apresentam uma exposição abreviada (mas nem sempre elementar) das matérias a que os títulos se referem.

Estes dois tomos completam-se (e não conhecemos um terceiro tomo, dedicado às equações de derivadas parciais, a que os exercícios da parte final do n.º 1059 da colecção que temos presente, serve de complemento), pois muitos assuntos que não são abordados no primeiro ou são aí tratados sumàriamente, têm depois o necessário desenvolvimento no segundo. Assim acontece, por exemplo, com o método de integração por derivação: não é na primeira parte con-