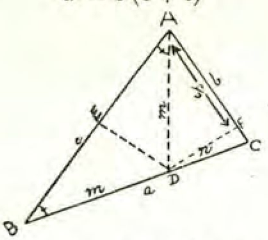
e, efectuadas as simplificações, obtem-se

$$a^2 = b\,(b + c)$$



Nota: A projecção de m sobre b é $c/_2$ em virtude dos triângulos rectângulos construidos na figura serem iguais.

3652 — Publica-se a solução apresentada pelo Sr. Fernando de Jesus único soluçionista:

R: *Uma solução evidente é* $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. *Supondo a solução em que* $x \neq 0$ *e* $y \neq 0$ *tem-se:*

$$\begin{cases} (2x^2y+4x)^2 = (2y-xy^2)^2+3x^2y^2 \\ 2x^2y+4x = xy^2-2y+xy \end{cases} \quad \begin{cases} 2(xy-2y)\,xy + x^2y^2 = 3x^2y^2 \\ 2x^2y+4x = xy^2-2y+xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} (xy^2-2y) = xy \\ 2x^2y+4x = xy^2-2y+xy \end{cases} \quad \begin{cases} xy-x-2=0 \\ 2x^2y+4x = y\,(xy-2)+xy \end{cases} \quad \begin{cases} xy-x-2=0 \\ x^2y+2x = xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy-x-2=0 \\ xy\,(x-1)+2x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} xy-x-2=0 \\ (x+2)\,(x-1)+2x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} xy-x-2=0 \\ x^2+3x-2=0 \end{cases}$$

o que dá as soluções:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1+\sqrt{17}}{-3+\sqrt{17}} \\ x = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{1-\sqrt{17}}{-3-\sqrt{17}} \\ x = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

3653 — Apresentaram solução os Srs. Vinha Novais, António H. Alves de Oliveira e Fernando de Jesus, publicando-se a solução deste último:

R: *O sistema* $\begin{cases} x^2+y^2-6x-8y=0 \\ y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha \end{cases}$ *dá*

$$B\left(\frac{6+8\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sec^2\alpha}, \frac{6+8\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sec^2\alpha}\,\mathrm{tg}\,\alpha\right).$$

Como $A\,(6\,,0)$ *vem:*

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{6+8\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sec^2\alpha}-6\right)^2 + \left(\frac{6+8\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sec^2\alpha}\,\mathrm{tg}\,\alpha\right)^2} = \frac{\sqrt{(8\,\mathrm{tg}\,\alpha-6\,\mathrm{tg}^2\alpha)^2+(6\,\mathrm{tg}\,\alpha+8\,\mathrm{tg}^2\alpha)^2}}{\sec^2\alpha} = \frac{\sqrt{100\,\mathrm{tg}^2\alpha\,\sec^2\alpha}}{\sec^2\alpha} = 10\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

3654 — Não foram apresentadas soluções.

3655 — Publica-se a única solução apresentada pelo Sr. Vinha Novais:

Toda a função racional de $\sqrt{2}$, coeficientes em R, pode ser reduzida à forma $(a+b\sqrt{2})/c$, com $m\cdot d\cdot c\cdot(a\,,b\,,c)=1$. Admitamos, então, que $\alpha=(a+b\sqrt{2})/c$ é um inteiro de F, isto é, raiz da equação $x^2+a_1x+a_2=0$, com $a_1\,,a_2 \in I$. Então, esta equação admitirá a raiz $\alpha'=(a-b\sqrt{2})/c$ e ter-se-á

$$x^2+a_1x+a_2 = x^2-(2\,a/c)\cdot x+(a^2-2\,b^2)/c^2$$

A igualdade entre os coeficientes implica que $2\,a/c$ e $a^2-2\,b^2/c^2$ sejam inteiros de R e, portanto, que $c=1$, $c=2$ ou $c \prec a$ (divisor de) para que $2\,a/c$ seja inteiro; se $c=1\,, a^2-2\,b^2/c^2$ é também inteiro; se $c=2$ vem $c^2=4$ e $a=\dot{2}$ e $b=\dot{2}$ para que a segunda expressão seja um inteiro. Mas então m. d. c. $(abc) \geqslant 2$ contrariamente à hipótese. Finalmente, se $c \prec a$, para que $a^2-2\,b^2/c^2$ seja inteiro deve $c \prec b$ $(c \neq 1\,,2)$ e m. d. c. $(a\,,b\,,c)=c\neq 1$ contrariamente à hipótese.

Fica assim demonstrado que os inteiros de F são da forma $(a+b\sqrt{2})/c$, com $c=1$ e é imediato o recíproco: todas as funções racionais de $\sqrt{2}$ da forma $a+b\sqrt{2}$ são inteiros de F.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

102 — Prof. Dr. GUIDO, Hoheisel — **Gewönnliche Differencialgleichungen** e **Aufgabensammlung zu den Gewöhnlichen und Partiellen Differentialgleichungen**. Sammlung Göschen, Bände 920—1059, Berlin, 1951-52.

São dois livrinhos da *Sammlung Göschen* que, como de costume, apresentam uma exposição abreviada (mas nem sempre elementar) das matérias a que os títulos se referem.

Estes dois tomos completam-se (e não conhecemos um terceiro tomo, dedicado às equações de derivadas parciais, a que os exercícios da parte final do n.º 1059 da colecção que temos presente, serve de complemento), pois muitos assuntos que não são abordados no primeiro ou são aí tratados sumàriamente, têm depois o necessário desenvolvimento no segundo. Assim acontece, por exemplo, com o método de integração por derivação: não é na primeira parte convenientemente justificado; mas no tomo de *Problemas* retoma-se o estudo das equações mais vulgares a que se aplica, que são então resolvidas com recurso às transformações de contacto.

No seu conjunto, os dois volumes apresentam, afinal, os problemas clássicos das equações diferenciais ordinárias, de modo que não podia deixar de ser abreviado, dadas as características da colecção, mas com uma preocupação sempre lograda de não deixar lacunas onde o leitor encontre dificuldades, — o que é bem pouco vulgar em livros desta natureza. Sublinharemos, entre outras virtudes que encontramos nesta exposição: o cuidado em chamar a atenção do leitor para as soluções que o método do factor integrante pode subtraír; o problema da existência de soluções (quase sempre lamentàvelmente esquecido em livros de iniciação, como este é), tratado pelo método de PICARD-LINDELÖF; a maneira como se apresenta o estudo do comportamento dos integrais nas vizinhanças dos pontos singulares (esta doutrina é exposta de maneira modelar); etc.

Sem dúvida: tratando-se de um pequeno tratado de equações diferenciais, que apenas pretende tocar os pontos mais importantes deste vasto ramo da Análise Matemática, muitos problemas tiveram de ser abordados nas suas linhas gerais, deixando de parte certas questões de detalhe que só cabem em trabalhos mais desenvolvidos. (E não se esqueça que a literatura alemã da especialidade conta com várias e excelentes obras deste género, nomeadamente as de KAMKE e BIEBERBACH).

Por isso é fácil que o leitor, ao sabor das suas preferências pessoais, lamente que num ou outro ponto e estudo não tenha sido levado mais longe. Quanto a nós sucedeu assim, por exemplo, ao lermos o parágrafo do tomo 2.º em que se expõe o método de cálculo simbólico para a resolução de equações de ordem n (símbolo D e não integral de LAPLACE, que não é referido); pareceu-nos que uma utilização mais ampla deste método permitiria chegar, muito ràpidamente, a resultados completos.

De qualquer modo, porém, uma coisa é certa: estes dois livrinhos constituem uma óptima exposição para uma primeira abordagem aos problemas das equações diferenciais, — e muito lucrariam os nossos estudantes universitários se, no estudo destas matérias, se guiasssm por eles.

Luís Albuquerque

103 — NOORDHOFF'S WISKUNDIGE TAFELS — **Tabuas matemáticas a cinco décimais** — P. NOORDHOFF — Groningen — Holanda. Preço 8,75 florins. — 1953.

Este livro de muita utilidade para alunos de Escolas Técnicas, Universidades, Escolas Militares, Laboratórios etc. contém as seguintes tábuas de 5 décimais quase todas:

I — Tábua das mantissas dos logarítmos décimais dos inteiros de 1 — 12009.

I b — Tábua dos logarítmos décimais (8 décimais) dos números $1+i$ sendo i múltiplo de 0,0025 e desde 0,0025 a 0,08.

II — Tábua dos logarítmos das funções trigonométricas.

III a —	Tabela	de	conversões	de grados em graus.
III b —	»	»	»	inversa da anterior.
III c —	»	»	»	de radianos em grados.
III d —	»	»	»	inversa da anterior.
III e —	»	»	»	de graus em radianos.
III f —	»	»	»	inversa da anterior.

IV a — Valores naturais das funções trigonométricas (ângulos dados em graus e radianos).

IV b — Valores naturais de $\operatorname{cotg}\alpha\,(\alpha<3^\circ)$ e $tg\,\beta\,(97^\circ<\beta<90^\circ)$ de segundo a segundo.

IV c — Valores naturais de $\operatorname{cotg}\alpha\,(3^\circ<\alpha<10^\circ)$ e $tg\,\beta\,(80^\circ<\beta<87^\circ)$ de $10''$ em $10''$ com interpolação proporcional.

V — Tábuas adicionais de:

a 1 — logaritmos naturais dos inteiros de 1 — 9973, de 10^p e 10^{-p}; a 2 — logaritmos naturais de números primos: de 2 — 997; b — conversão de logaritmos naturais em décimais; c 1 — função exponencial e^x para x de 0,001 a 4,00; c 2 — funções hiperbólicas $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$ para x de 0,01 a 7,0; d — divisores primos dos números de 1 a 11197; e — Potências: $n^2, n^2, \sqrt{n}, \sqrt[3]{n}$ e $\frac{1}{n}$, de 1 a 1000; f — função factorial $x!$ de $x=-1{,}0$ a 0,99, e $\log_{10} x!$; g — funções $\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$; $\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ e $\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt$, com os seus desenvolvimentos em série; h — função $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ para $x=0{,}00$ a $x=2{,}59$; i — funções de BESSEL; k — constantes: $n!$ de 1 a 16 e $n:n!$ para os mesmos valores; múltiplos e submúltiplos de π e seus logaritmos etc.

Como se vê é um livro que atende a muitas necessidades daqueles que necessitam fazer laboriosos cálculos em diversos ramos das matemáticas aplicadas. Um bom livro, de boa apresentação gráfica, de fácil consulta e úteis dados.

J. S. Paulo