ANO XIV—N.º 56 **GAZETA DE MATEMÁTICA** DEZEMBRO—1953

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º, Dto. — Telef. 71943 — LISBOA-N

Sur les transformations ponctuelles conservant les aires

par **Georges Bouligand**

1. Mon cours du premier semestre 1952-53 annoncé sous le titre *Notions et problémes de topologie restreinte* a comporté une brève étude des transformations ponctuelles conservant les aires. Le sujet est classique s'il s'agit d'une correspondance entre points (x,y) et (u,v) d'un plan. En supposant que les sens d'orientation subsistent, il faut écrire que, le long d'un contour simple fermé arbitraire décrit par (x,y), l'intégrale de

$$\omega = x\,dy + v\,du$$

est nulle ou que la forme ω est une *différentielle totale.* Si l'on s'impose la biunivocité, on voit qu'en appelant

$$(1) \qquad x = A(u,y) \qquad v = B(u,y)$$

un couple de fonctions s'offrant comme les composantes d'un gradient dans le plan auxiliaire ϖ des u,y, il faut choisir ce couple pour assurer la biunivocité entre (x,y) et (u,v). Ce problème purement géométrique incite alors au partage des variables x,y,u,v en deux couples x,v et y,u contenant chacun la première coordonnée du point antécédent et la seconde du point conséquent ou vice versa. Cette dissociation mutile la structure du problème, que les formules (1) ne sauraient résoudre à elles seules; elles vont donner seulement des résultats locaux, atteints en supposant par exemple que B est une *fonction croissante* de y dans une région convexe décrite par le point (u,y) dans le plan ϖ, ce qui permet de résoudre $B=v$ en y, et ainsi de déduire du couple (u,v) l'ordonnée y puis l'abscisse x.

Rien d'analogue pour la conservation des volumes! Mieux vaut donc remplacer la méthode précédente par un autre principe de recherche plus conforme à l'esprit de l'*Analyse géométrique,* ce grand facteur de progrès (1).

Le présent article indiquera comment s'orienter à cette fin, tout en aiguillant le lecteur, en cours de route, vers des recherches complémentaires.

2. En élargissant un peu le problème, donnons à la notion d'aire plus de généralité. Il se peut que, dans le plan où varient les points (x,y) et (u,v), on calcule la longueur d'un arc élémentaire par une formule du type

$$(2) \qquad ds = f(x,y;dx,dy) \qquad (\text{avec } f>0)$$

où f, dans sa dépendance vis-à-vis de dx,dy est une fonction positivement homogène et du premier degré, c'est-à-dire satisfait, pour toutes valeurs positives de ρ, à l'identité

$$f(x,y;\rho\,dx,\rho\,dy) = \rho f(x,y;dx,dy)$$

A chaque point (x,y), associons alors le lieu de l'extrémité d'un vecteur issu de ce point et dont les composantes ξ,η vérifient l'équation

$$(3) \qquad f(x,y;\xi,\eta) = 1$$

Ce lieu est une courbe fermée, entourant le point (x,y) et dite *indicatrice* de la métrique (f) définie par (2). L'aire α de cette courbe (sens vulgaire) est fonction du point (x,y). Soit en outre $d\sigma$ la mesure

(1) G. BOULIGAND. *L'Analyse géométrique* (conférences Palais de la Découverte); *L'Analyse géométrique et l'oeuvre de* G. DARBOUX (Arch. intern. Hist. Sc., Janv. 1950 et Oct. 1951). *Analyse géométrique et problèmes aux dérivées partielles* (Rev. Scient. 84, p. 223-233, Fev. 1948). *Les principes de l'Analyse géométrique* (I et II_A VUIBERT 1949 et 1951).

d'un élément d'aire (sens vulgaire). Prenons avec M. GUSTAVE CHOQUET l'intégrale

$$\pi \iint \frac{d\sigma}{\alpha}$$

étendue à une région R du plan des x, y. Elle donne une extension naturelle de l'aire de cette région, adaptée à la métrique (f), car cette intégrale est une fonction additive de l'ensemble R, douée d'un sens intrinsèque [1]: elle garde en effet sa forme par tout changement de variables

$$x_1 = \varphi(x, y), \; y_1 = \psi(x, y) \tag{4}$$

de jacobien $\neq 0$, comme on le voit en recourant à la transformation linéaire tangente attachée aux formules (4).

Traduisons maintenant la conservation des aires. L'élément d'aire de mesure vulgaire $d\sigma$, découpé autour du point (x, y) se transforme en un élément

Parmi ces (f), il y en a une et une seule dont l'indicatrice est un cercle. Elle correspond à

$$ds^2 = \frac{\pi}{\alpha}(dx^2 + dy^2). \tag{6}$$

Ainsi posé, le problème est alors celui de conserver les aires par des transformations remplançant sur une surface un point M provenant des valeurs x, y par un point P provenant des valeurs u, v, étant entendu qu'on connaît une fonction vectorielle $\vec{\Phi}$ telle qu'on ait à la fois

$$\overrightarrow{OM} = \vec{\Phi}(x, y), \qquad \overrightarrow{OP} = \vec{\Phi}(u, v),$$

et qu'en outre $\overline{dM}^2$ reproduise le ds^2 donné par (6). Mais, réalisée du point de vue local, l'existence d'une telle $\vec{\Phi}$ n'est pas assurée globalement. Le recours à des représentations de ce genre, s'il donne un aspect géométrique du problème, ne le simplifie donc pas. Mieux vaut une étude directe de (5).

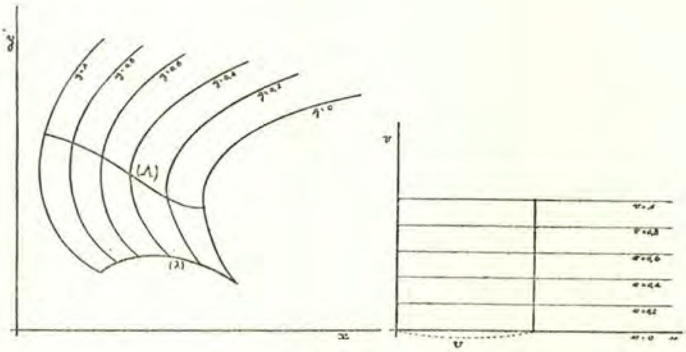

Fig. 1

de mesure vulgaire $d\tau$ autour du point (u, v). L'unité doit égaler le rapport des quantités

$$\frac{d\sigma}{\alpha(x, y)} \quad \text{et} \quad \frac{d\tau}{\alpha(u, v)}$$

proportionnelles aux mesures, selon (f), de nos deux éléments. Or le rapport $d\tau/d\sigma$ est le jacobien de u, v par rapport à x, y. D'où l'équation du problème

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \frac{\alpha(u, v)}{\alpha(x, y)} \tag{5}$$

laquelle requiert, avec les fonctions inconnues $u(x, y), v(x, y)$, leurs dérivées premières: équation commune à toutes les métriques (f) pour lesquelles la fonction α, continue et positive, est la même.

3. On se donnera $v = g(x, y)$ en laissant subsister la fonction inconnue $u(x, y)$. Celle-ci satisfait à l'équation du premier ordre

$$\frac{\partial u}{\partial x} g_y - \frac{\partial u}{\partial y} g_x = \frac{\alpha(u, g)}{\alpha(x, y)} \tag{7}$$

$$\left(\text{avec} \;\; g_x = \frac{\partial g}{\partial x}, \;\; g_y = \frac{\partial g}{\partial y}\right).$$

Les caractéristiques, dans l'espace (x, y, u) s'obtiennent en intégrant le système

$$\frac{dx}{g_y} = \frac{dy}{-g_x} = \frac{\alpha(x, y)\, du}{\alpha(u, g)}. \tag{8}$$

Sur le plan des x, y, on a pour projections les courbes $g(x, y) = \text{const.}$ Au point (x, y) passe une seule de ces courbes, qui sera dite une *fibre*, normale

[1] Cf. *Princ. An. Géom.*, I, n.[os] 301-302.

au vecteur g_x, g_y supposé non nul; la tangente à la fibre porte le vecteur unité

$$X = \frac{g_y}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2}}, \qquad Y = \frac{-g_x}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2}}.$$

En appelant $\bar{s}$ l'abscisse curviligne (sens vulgaire) sur la fibre, il vient

$$\frac{du}{d\bar{s}} = \frac{\alpha(u,g)}{\alpha(x,y)} \frac{1}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2}}. \tag{9}$$

Au second membre, $x, y, g(x,y)$ se réduisent sur la fibre à des fonctions déterminées de $\bar{s}$. Ce second membre apparait donc comme une fonction donnée $A(u, \bar{s})$ et par suite, sur la fibre, u est déterminée par (9), moyennant sa valeur pour $\bar{s} = 0$.

L'interprétation de ces remarques ramène à un *aspect élémentaire* du problème. On ce donne une correspondance biunivoque entre des arcs simples g=const. du premier plan et des segments v=const. du second, sous ces conditions.

1.° Un arc et le segment correspondant proviennent d'une même valeur de la c^{te}.

2.° Dans le premier plan, deux arcs provenant de valeurs distinctes de la c^{te} n'ont aucun point commun.

3.° La c^{te} variant de 0 à 1, la réunion des arcs, dans le 1er plan, recouvre la fermeture d'un domaine; dans cette région, par un point, il passe un et un seul des arcs qui la balayent (d'après 2.°) — Circonstances analogues dans le 2.^{e} plan, où l'on a une région rectangulaire (voir 4.°).

4.° Dans le 1er plan, le lieu des extrémités des arcs $g(x,y) = v$ en lesquelles s'annule $\bar{s}$ est un arc simple (λ), qu'on se donne. On impose en outre à (λ) d'avoir pour image dans le plan (u, v) le segment défini par les relations

$$u = 0 \qquad 0 \leqslant v \leqslant 1.$$

5.° A tout cela, on ajoute les hypothèses relatives à l'existence et la continuité des dérivées premières de $g(x,y)$, pour valider (7), (8), (9).

Moyennant ces prémisses, on pourra résoudre le *problème du rectangle*, c'est-à-dire délimiter dans la région du plan des x, y balayée par les arcs $g(x,y) = \theta$ (avec $0 \leqslant \theta \leqslant 1$) issus des points de l'arc (λ) la partie ayant pour image un rectangle

$$0 \leqslant u \leqslant U, \qquad 0 \leqslant v \leqslant 1.$$

La *propriété de groupe* pour les transformations conservant les aires conduit à prendre, dans un plan x, y et un autre x_1, y_1 deux figures

F [entre (λ) et (Λ), avec fibres $g = \text{c}^{te}$],

F_1 [entre (λ_1) et (Λ_1) avec fibres $g_1 = \text{c}^{te}$]

ce qui permet, d'une manière naturelle, de passer du problème du rectangle à des cas variés, le rectangle servant de stade intermédiaire.

4. Revenons à ce cas de départ, en vue de remarques simples suggérées par la fig. 1. Supposons donné ce qui a trait au plan u, v, en ne laissant inconnu dans le plan x, y que l'arc (Λ) ayant pour image le segment $0 \leqslant v \leqslant 1$ de la droite $u = U$. Pour un tracé approché de (Λ), on subdivisera l'intervalle offert à v en n parties, égales ou non, par une graduation $0 \leqslant v_1 \leqslant v_2 \leqslant \cdots \leqslant v_{n-1} \leqslant 1$. Prenant n très grand, ainsi que toutes divisions très petites, on pourra, recourant aux fibres $g(x,y) = v_i$, supplanter (Λ) grâce à un processus d'*égalisation d'aires* selon (f),

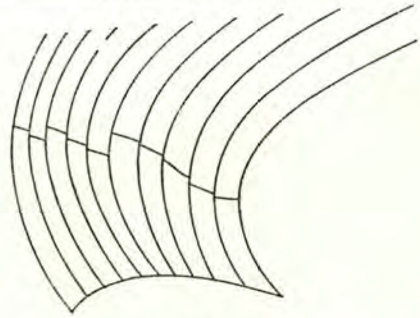

Fig. 2

par un système de petits arcs γ_i disposés comme sur la fig. 2, et dont on exige qu'ils coupent chaque fibre en un seul point.

Moyennant les hypothèses (1.° à 5.°) du n.° 3, on peut se passer de cette approximation et tabler directement sur l'existence des intégrales de (9), conditionnées en vue de répondre au problème du rectangle.

5. Signalons chemin faisant une circonstance possible, qu'il s'agisse de l'aire usuelle ou de ses extensions. Pour en donner un exemple, prenons l'aire usuelle et une transformation du type

$$(T) \begin{cases} u = u(x) & \text{croissante en } x \ [u'(x) > 0] \\ v = v(x,y) & \text{croissante en } y \ [v'_y > 0 \text{ pour tout } x]. \end{cases}$$

Les hypothèses sur $u(x)$, $v(x,y)$ entrainent que (T) est une homéomorphie. En outre, pour que (T) conserve les aires, il faut et il suffit que

$$u'(x)\, v'_y(x,y) = 1$$

si les dérivées requises existent. On aura dès lors

$$v'_y = \frac{1}{u'(x)} \quad \text{d'où} \quad v(x,y) = \frac{y}{u'(x)} + \bar{h}(x).$$

La fonction $v(x,y)$ va donc devenir infinie pour tous les x annulant $u'(x)$. Ainsi, l'homéomorphie

$$(H) \qquad \begin{cases} u = u(x) \\ v = \dfrac{y}{u'(x)} + \bar{h}(x) \end{cases}$$

conservera les aires, mais en transformant, si $u'(x)$ a des zéros, une région bornée en une autre s'étendant à l'infini. La remarque en fin du n.° 3 permet de varier les exemples de cette circonstance, qui intervient si l'on veut, à partir du n.° 4, édifier une théorie systématique: L'intervention dans les équations (H) de $h(x)$, fonction continue quelconque, annonce des cas où la dérivabilité de $u(x,y)$, $v(x,y)$ n'a pas lieu. En poursuivant la recherche amorcée au n.° 4 le problème du rectangle pourrait être posé comme suit:

On part d'une homéomorphie $u=\lambda(x,y)$, $v=g(x,y)$ telle que tout segment d'une ligne $u=\text{const}$, ou d'une ligne $v=\text{const.}$, soit l'image d'un arc tracé dans le plan des x,y et de mesure superficielle nulle. On prend l'arc (λ) sur la courbe $\lambda(x,y)=0$ et les courbes $g(x,y)=\text{const.}$ issues des divers points de cet arc. On cherche alors l'arc (Λ) transverse à ces courbes, sous les conditions 1.° à 4.° du n.° 3. Il y aurait lieu d'expliciter des conditions annexes permettant d'obtenir (Λ) comme un *ensemble limite,* continue et uniformément atteint, des systèmes de petits arcs γ_i introduits au n.° 4 et portés ici par les courbes $\lambda(x,y)=\text{const.}$ (1).

6. Le problème peut être posé autrement, de manière à éviter d'emblée la circonstance singulière du n.° 5. On part d'une région limitée par deux arcs (λ)

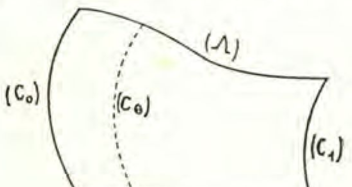

fig 3

et (Λ) et les positions extrêmes $(C_0),(C_1)$ d'une fibre variable (C_θ), arc de mesure superficielle nulle pour chaque θ (où θ croit de 0 à 1), arc qui part d'un point de (λ) pour aboutir à un point de (Λ), et varie de manière à se soumettre aux conditions 2.°, 3.° du n.° 3. Soit en outre donné un rectangle de même surface que la région bordée par (λ), (Λ), (C_0), (C_1). Associons à (λ) et (Λ) deux côtés opposés de ce rectangle; puis à $(C_0),(C_1)$, les deux autres côtés (D_0), (D_1), puis à (C_θ) un segment (D_θ) parallèle à ces derniers, lequel partage le rectangle de telle sorte que sa partie comprise entre (D_0) et (D_θ) soit d'aire égale à celle de la partie de la première région comprise entre (C_0) et (C_θ). On a ainsi deux fonctions additives d'ensemble qui sont *équivalentes* pour chaque sous-ensemble de la figure curviligne et chaque partie correspondante de son image rectangulaire, quand l'une et l'autre englobent tous les points provenant d'un intervalle partiel du segment $(0,1)$ décrit par θ.

Il s'agit alors d'étendre cette *équivalence* de manière à en déduire, au bénéfice peut-être de conditions annexes, une transformation ponctuelle continue et biunivoque conservant les aires, ou plus précisément, *tout ensemble de mesure superficielle positive* en un ensemble *de mesure superficielle égale.* Cet énoncé nouveau genre poserait la question de savoir si l'homéomorphie (H) du n.° 5, dans le cas où $u'(x)$, en restant supérieure à un nombre positif fixe, mais en cessant d'être indéterminée sur un ensemble de mesure nulle, ne peut céder le pas à une transformation (H_1) assurant encore la conservation de la mesure, telle qu'on vient de l'indiquer.

Pour varier cette recherche, partons, par exemple, d'une surface fermée analogue à la sphère et balayée par un système de fibres $A\breve{M}B$ dont chacune est un arc simple reliant deux points fixes A et B de cette surface, supplantant ici les arcs (λ) et (Λ) et soumises, pour la totalité de la surface, aux conditions 2.°, 3.°: si bien que ces fibres, sont disposées comme les arcs de cercles d'une sphère qui en relient deux points fixes. Prenons maintenant un autre système de fibres, disposées de même et passant par les deux points fixes A' et B'. Et, tout en conservant les aires par une transformation (T) biunivoque de la surface, on demanderait à (T) d'associer les fibres du 1er système à celle du second; on pourrait convenir de 2 fibres $A\widehat{M_0}B$ et $A'\widehat{M_0'}B'$ qui se correspondent ainsi, en déduire les autres paires de fibres homologues, puis, à cette étape, essayer d'atteindre (T) moyennant les conditions annexes permettant d'affirmer qu'il existe une homéomorphie de la surface sur elle--même répondant à la question.

7. Tels sont les thèmes que je me proposais d'esquisser dans cet article, pour aboutir à la conclusion qu'une étude attentive du sujet doit faire prévaloir *la théorie des fonctions additives d'ensemble* et la manierè dont les transformations ponctuelles peuvent se greffer sur cette théorie. C'est donc vers elle qu'un bibliographe, consultant le *Zentralblatt* ou la *Math. Reviews* aurait à s'aiguiller. L'obtention par cette voie d'homéomorphies du genre recherché (à des restrictions de derivabilité près) au début de cet article pourrait fournir, par contrecoup, des différentielles totales d'un type trés général, et ainsi, donner un type de connexion entre ces dernières et la théorie des fonctions d'ensemble.

(1) Pour la définition de *l'ensemble limite,* voir *Princ. anal. géom.* II_A, n.os 136-139.