Espaço de Lebesgue

Um exemplo de espaço de RIESZ regular

por **Ruy Luís Gomes**

Designemos por $\mathcal{F}$ a classe das funções numéricas, limitadas, cujo domínio é um intervalo fechado $[a, b]$.

$\mathcal{F}$ é um espaço de RIESZ.

Na verdade:

1) $\mathcal{F}$ é um espaço vectorial com relação ao corpo dos números reais: a soma das duas funções f_1, f_2 e o produto dum número λ por uma função f verificam as propriedades características de espaço vectorial;

2) $\mathcal{F}$ é um espaço ordenado em que $f_1 \leqslant f_2$ equivale a $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$;

3) Existe o supremo e o ínfimo de duas quaisquer funções de $\mathcal{F}$;

4) $\mathcal{F}$, como espaço vectorial ordenado, verifica as duas implicações

$$f_1 \leqslant f_2 \rightarrow f_1 + f \leqslant f_2 + f,$$

qualquer que seja f, e

$$f_1 \leqslant f_2 \rightarrow \lambda f_1 \leqslant \lambda f_2,$$

para $0 \leqslant \lambda$.

Ora para a construção do integral de LEBESGUE por prolongamento por continuidade a partir do integral de CAUCHY, introduzimos (1) em $\mathcal{F}$ a *topologia de* LEBESGUE, assim definida: dada uma função qualquer $f_0 \in \mathcal{F}$, toma-se para sistema fundamental da vizinhanças de f_0, a classe dos «intervalos» $[h, g]$, tais que $h \leqslant f_0 \leqslant g$, h superiormente contínua e g inferiormente contínua em $[a, b]$. E entende-se por «intervalo» $[h, g]$ a totalidade das funções f tais que $h \leqslant f \leqslant g$.

Mediante este sistema fundamental de vizinhanças transformamos $\mathcal{F}$ num espaço topológico; $\mathcal{F}$ fica, pois, um espaço vectorial, ordenado, topológico. No entanto, não é um *espaço vectorial topológico*, pois imediatamente se conclue que λf não é uma função contínua no espaço produto da recta euclideana R^1 pelo espaço topológico $\mathcal{F}$.

Com efeito, dada a função $\lambda_0 \varphi_0$ em que φ_0 é contínua em $[a, b]$, podemos tomar como vizinhança de $\lambda_0 \varphi_0$ o intervalo $[\lambda_0 \varphi_0, \lambda_0 \varphi_0]$, quere dizer, o conjunto reduzido à própria função $\lambda_0 \varphi_0$. E a este intervalo não corresponde em R^1 nenhum intervalo aberto contendo λ_0, tal que $\lambda \varphi_0 = \lambda_0 \varphi_0$, nesse intervalo, a não ser no caso trivial de $\varphi_0 \equiv 0$.

Mas é possível demonstrar que $\mathcal{F}$ é um espaço regular, isto é, um espaço que verifica os *dois axiomas:*

1) *as vizinhanças fechadas formam um sistema fundamental de vizinhanças;*

2) *$\mathcal{F}$ é um espaço separado.*

Para isso vamos começar por demonstrar o

TEOREMA I — *A classe $\mathcal{C}$ das funções f tais que $f_1 \leqslant f$, sendo f_1 uma função dada de $\mathcal{F}$, é um conjunto fechado.*

Suponhamos, por absurdo, que existe $f_2 \notin \mathcal{C}$ que pertence ao fecho de $\mathcal{C}$. Existirá, então, um ponto x_1 tal que $f_2(x_1) < f_1(x_1)$. Sendo assim é possível determinar k de modo que $f_2(x_1) < k < f_1(x_1)$. Construamos a função g, inferiormente contínua (1), tal que $g(x_1) = k$, $g(x) = \sup[k, \sup f_2(x_1)]$ para $x \neq x_1$. Qualquer vizinhança $[h, g]$ de f_2, com h arbitrário $\leqslant f_2$, não pode intersectar $\mathcal{C}$, pois se assim fosse de $f_3 \leqslant g$ e $f_1 \leqslant f_3$ resultaria $f_1 \leqslant g$, o que contraria $g(x_1) = k < f_1(x_1)$. Mas se há vizinhanças de f_2 que não intersectam $\mathcal{C}$, f_2 não pertence ao fecho $\mathcal{C}$ e portanto $\mathcal{C}$ é fechado.

COROLÁRIO I — *As vizinhanças $[h, g]$ de uma qualquer função f_0 são fechadas.*

Na verdade, do Teorema I decorre em primeiro lugar que o conjunto $\mathcal{C}_1$ das funções f tais que $f \leqslant f_1$ também é fechado, pois $f \leqslant f_1$ é equivalente

(1) Integral de LEBESGUE-STIELTJES, do autor.

(1) A função g é inferiormente contínua visto ser *mínima* em cada ponto de $[a, b]$, por construção.

a $f_1 \leqslant -f$. E consequentemente $[h, g]$ é a intersecção de dois conjuntos fechados:

$$h \leqslant f \quad \text{e} \quad f \leqslant g .$$

Ficou assim demonstrada a primeira propriedade característica de um espaço regular. Passemos agora à outra e para isso provemos o

Teorema II — *O espaço $\mathcal{F}$ é separado.*

Na verdade, sejam f_1 e f_2 duas funções não idênticas. Existirá, então, um ponto x_1 onde $f_2(x_1) < f_1(x_1)$ ou $f_2(x_1) > f_1(x_1)$. Partindo de primeira desigualdade, pois é indiferente uma ou outra, construamos números k e k' tais que $f_2(x_1) < k < k' < f_1(x_1)$ e uma função g_2 e uma função h_1 nas seguintes condições

$$\begin{aligned}
&g_2(x_1) = k \\
&g_2(x) = \sup(k, \sup f_2), x \neq x_1 \\
&h_1(x_1) = k' \\
&h_1(x) = \inf(k', \inf f_1), x \neq x_1 .
\end{aligned}$$

Resulta, portanto,

$$f_2 \leqslant g_2, \qquad h_1 \leqslant f_1 .$$

A função g_2 é inferiormente contínua e h_1 superiormente contínua, visto a primeira ser *mínima* e a segunda *máxima* em cada ponto de $[a, b]$.

Tomando, então, $h_2 \leqslant f_2$ e $g_1 \geqslant f_1$, ficamos com duas vizinhanças $[h_2, g_2]$, $[h_1, g_1]$, a primeira de f_2 e a segunda de f_1.

Ora é fácil de ver que elas não se intersectam.

Com efeito, se existisse f tal que

$$h_2 \leqslant f \leqslant g_2, \quad h_1 \leqslant f \leqslant g_1$$

seria

$$h_1(x_1) \leqslant f(x_1) \leqslant g_2(x_1),$$

o que é absurdo, pois

$$h_1(x_1) = k' > k = g_2(x_1) .$$

O espaço de Lebesgue — *espaço $\mathcal{F}$ com a topologia de* Lebesgue — *é, portanto, um exemplo muito simples de espaço regular.*

Deve observar-se que esta conclusão não depende de modo nenhum do facto de termos admitido que as funções f estão definidas num intervalo $[a, b]$. O que entrou em jôgo foram as propriedades do espaço dos valores [1] das funções de $\mathcal{F}$, ou seja, a recta R^1, pois trabalhamos com funções numéricas.

(1) Entramos ainda, com o facto de o conjunto (x_1) ser fechado e portanto ter para complementar um conjunto aberto, pois foi também nisso que nos apoiamos para concluir que as funções construidas g ou h são inferiormente ou superiormente contínuas.

Se introduzimos a hipótese de as funções estarem definidas num intervalo $[a, b]$, foi por uma outra razão. É que se $\mathcal{F}$ é um espaço de funções definidas num intervalo $[a, b]$ ou mesmo num conjunto compacto, a classe das funções contínuas é densa no espaço de Lebesgue $\mathcal{F}$; mas isso já não é verdade para funções definidas num conjunto qualquer [1].

Ora como o espaço de Lebesgue tem o seu maior interesse ligado à integração-L, impõe-se a limitação do domínio das funções de $\mathcal{F}$ de modo que a classe das funções contínuas seja densa em $\mathcal{F}$.

Nenhuma das topologias com base em sistemas de vizinhanças do tipo $[\varphi_1, \varphi_2]$, $[h_1, h_2]$, $[g_1, g_2]$, $[g, h]$, nas quais φ, h, g representam sempre funções contínuas, funções inferiormente contínuas, funções superiormente contínuas, conduz a *espaços separados*, como se verifica imediatamente.

Em particular, a topologia de Riemann, à base de $[\varphi_1, \varphi_2]$, não é *separada*, nem sequer é possível separar [2] uma função f do seu *lim* sup. $\bar{f}$ e do seu *lim* inf. $\underline{f}$, e é precisamente este último facto que faz com que $f, \underline{f}, \bar{f}$ tenham integrais — Riemann iguais (quando existem).

O caracter *mais fino* da topologia de Lebesgue está pelo contrário, bem patente no facto de conduzir a um espaço *separado*, daí resultando que os integrais de Lebesgue de $f, \underline{f}$ e $\bar{f}$ não são necessàriamente iguais (quando existem).

Assim a maneira mais simples e mais significativa de caracterizar o integral de Lebesgue é defini-lo como o resultado do prolongamento por continuidade do integral de Cauchy, prolongamento efectuado no espaço separado de Lebesgue, ou seja, no espaço $\mathcal{F}$ munido da topologia cujo sistema fundamental de vizinhanças coincide com o conjunto dos intervalos $[h, g]$.

Ao mesmo tempo demos um exemplo de espaço regular, que é também um espaço de Riesz mas não um espaço vectorial topológico. Este conjunto de circunstâncias, todas de real interesse, leva-nos a designar um tal espaço $\mathcal{F}$ por *espaço de* Lebesgue, e supomos que se trata de um tipo de espaço topológico ainda não individuado, apesar de ser desse tipo, como vimos, o espaço implicito no processo de construção do integral-L a partir do integral de Cauchy.

(1) É conhecida a condição necessária e suficiente para que $[h, g]$ contenha sempre uma função contínua φ.

(2) Visto toda vizinhança de f conter $\underline{f}$ e $\bar{f}$.