ANO XIV—N.º 54 GAZETA DE MATEMÁTICA ABRIL—1953

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES PRINCIPAIS: *J. Gaspar Teixeira e J. da Silva Paulo*

REDACTOR ADJUNTO: *J. Morgado*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — Telef. 55282 — LISBOA-N

Discussion d'un résultat de Tsien pour la détermination d'un «convergent». Choix de la distribution de vitesses sur l'axe (*)

par ***A. Pereira Gomes***

Un problème qui se présente en Mécanique des Fluides, d'un intérêt immédiat pour les applications est celui du dessin d'un cone de contraction pour le passage de l'air, ou d'un autre fluide, qui est couramment designé par «convergent».

Dans ses lignes générales, ce problème peut être réduit à celui de trouver une fonction potentiel ou une fonction de courant de façon à satisfaire certaines conditions, notamment que la vitesse à la paroi soit monotonément croissante.

Considérons un écoulement incompressible de révolution autour d'un axe $0x$, défini par la fonction de courant $\psi(x,r)$. Le contour du convergent aura pour équation $\psi(x,r)=C$, C étant une constante convenablement choisie.

Dans son étude «On the design of the contraction cone for a wind tunnel» (1), H. S. Tsien obtient, des expressions des composantes de la vitesse d'un écoulement incompressible de révolution autour d'un axe $0x$, à partir de la distribution de vitesses sur l'axe. Il en déduit ensuite la fonction de courant $\psi(x,r)$ relative à cet écoulement.

Soient $u(x,r)$ et $v(x,r)$ les composantes de la vitesse $w(x,r)$ de l'écoulement, respectivement, suivant l'axe $0x$ et l'axe $0r$ (orthogonal à $0x$); et posons sur $0x$:

$$(1) \qquad u(x,0)=f(x),$$

$$(2) \qquad v(x,0)=0.$$

Le mouvement étant irrotationnel, nous avons en dehors de l'axe:

$$(3) \qquad \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial r}=0;$$

faisant intervenir l'équation de continuité, nous avons encore

$$(4) \qquad \frac{\partial(ru)}{\partial x}+\frac{\partial(rv)}{\partial r}=0.$$

On en déduit, pour $r=0$, $\dfrac{\partial u}{\partial r}=0$. *Donc,* u (x, r) *est une fonction paire de* r et nous pouvons écrire

$$(5) \qquad u(x,r)=\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} f_{2n}(x),$$

où $f_{2n}(x)$ est une fonction à déterminer.

De même, $v(x,r)$ étant une fonction impaire de r, comme on vérifie aisément, nous posons

$$(6) \qquad v(x,r)=\sum_{n=0}^{\infty} r^{\ n+1} g_{2n+1}(x),$$

où g_{2n+1} est une fonction à déterminer.

En tenant compte de (1), (2), (3), (4), (5), (6), il n'est pas difficile d'obtenir des relations de récurrence qui donnent f_{2n} et g_{2n+1} en fonction de $f(x)$ et de ses derivées. H. S. Tsien arrive ainsi aux expressions

(*) L'étude qui fait l'objet de cette Note a été accomplie à l'Institut de Mécanique des Fluides de Marseille, en Mars 1952, pendant un séjour que nous avons fait dans cet Institut, comme Attaché de Recherches du Centre National de la Recherche Scientifique. Nous remercions M. J. Valensi, Directeur de l'Institut, pour les éléments bibliografiques qu'il a eu la gentillesse de mettre à notre disposition.

(1) Journal of the Aeronautical Sciences, vol. 10 n.º 2, 1943 p. 68–70.

$$(7)\quad \begin{cases} u(x,r) = f(x) + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \cdot f^{(2n)}(x) \cdot r^{2n} \\ v(x,r) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{2^{2n}(n!)^2} \cdot f^{(2n-1)}(x) \cdot r^{2n-1} . \end{cases}$$

La fonction de courant étant donnée par la formule $\psi(x,r) = \int_0^r r \cdot u(x,r)\, dr$, on en déduit

$$(8)\quad \psi(x,r) = \frac{1}{2} f(x) \cdot r^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2} f^{(2n-1)}(x) \cdot r^{2(n+1)} .$$

L'équation du contour du «convergent» est celle d'une ligne de courant $\psi(x,r) = C$, le long de laquelle la vitesse est toujours croissante, mais au dela de laquelle cette propriété cesse d'être vérifiée. La constante C sera donc choisie d'après cette condition et $\psi(x,r)$ est définie par (8).

La forme du contour dépend du choix de la fonction initiale $f(x)$, qui doit être monotonément croissante. Tsien fait la construction du convergent, en prenant une distribution de vitesses sur l'axe $f(x) = a + b \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, avec $a = 0,55$, $b = 0,90/\sqrt{2\pi}$. Suivant la même méthode, B. Szczeniowski [1] a fait le calcul pour la fonction $f(x) = a + b\, th\, c\, x$, où a, b, c sont des constantes.

Dans le mémoire de Tsien le choix de la fonction $f(x)$ est laissé complètement arbitraire, aucun rapport n'étant prévu entre cette fonction et la forme désirée pour le convergent, notamment pour obtenir une pente nulle à l'entrée et à la sortie.

En réalité il n'est pas difficile de pousser plus loin l'analyse de Tsien et d'établir un critère relativement général pour le choix de la fonction $f(x)$, de façon à satisfaire cette condition et, en même temps, à simplifier le calcul. C'est ce que nous allons faire par la suite.

Les expressions de u et v données par Tsien rappellent l'expression générale des fonctions de Bessel

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{n+2k}}{2^{n+2k}\, k!\, (n+k)!}$$

et, en effet, on voit sans peine que si la fonction $f(x)$ vérifie les conditions

$$(9)\quad \begin{cases} f^{(2n)}(x) = \alpha^{2n} A(x) , & n = 0, 1, 2, 3, \cdots \\ f^{(2n-1)}(x) = \beta^{2n-1} B(x) , & n = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

les formules (7) deviennent

$$(7')\quad \begin{cases} u(x,r) = A(x)\, J_0(\alpha r) \\ v(x,r) = -B(x)\, J_1(\beta r) \end{cases}$$

avec

$$\beta^2 = \alpha^2 ,$$

α et β pouvant être des nombres réels ou imaginaires purs, pourvu que dans ce dernier cas $i\, B(x)$ soit réel.

Les fonctions qui vérifient les conditions (9) ne sont autres que les solutions de l'équation $f''(x) = \alpha^2 f(x)$, dont la solution générale est: $f(x) = a\, e^{\alpha x} + b\, e^{-\alpha x}$.

Nous pouvons même supposer que la première égalité de (9) n'est satisfaite que pour $n = 1, 2, \cdots$. L' équation $f'''(x) = \alpha^2 f'(x)$ donne alors la solution $f(x) = a_0 + a\, e^{\alpha x} + b\, e^{-\alpha x}$.

On a donc, en général:

$$(7'')\quad \begin{cases} u(x,r) = a_0 + (a\, e^{\alpha x} + b\, e^{-\alpha x})\, J_0(\alpha r) \\ v(x,r) = -(a\, e^{\alpha x} - b\, e^{-\alpha x})\, J_1(\alpha r) \end{cases}$$

a_0, a, b étant des constantes arbitraires.

On en déduit:

$$(8'')\quad \psi(x,r) = \frac{a_0}{2} r^2 + \frac{r}{\alpha} (a\, e^{\alpha x} + b\, e^{-\alpha x})\, J_1(\alpha r) ;$$

en effet, $\frac{d}{dr}(r\, J_1(r)) = r\, J_0(r)$, donc $\frac{d}{dr}(r\, J_1(\alpha r)) = \alpha\, r\, J_0(\alpha r)$, d'où $\int r\, J_0(\alpha r)\, dr = \frac{1}{\alpha} r\, J_1(\alpha r)$; ceci, remplacé dans la formule $\psi(x,r) = \int u\, r\, dr$, amène bien à l'expression (8'').

Il s'agit maintenant de faire un choix approprié des constantes, pour le résultat qu'on a en vue.

Comme $\psi(x,r) = C$ doit définir une fonction $r = R(x)$, décroissant dans l'intervalle correspondant à la longueur du «convergent», mettons $(0, \lambda)$, et stationnaire aux extrémités de cet intervalle, nous devons avoir:

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{dr}{dx} < 0 \; , \; 0 < x < \lambda \\ \dfrac{dr}{dx} = 0 \; , \; x = 0 \text{ et } x = \lambda . \end{cases}$$

Mais, le long de $\psi(x,r) = C$, nous avons

$$(11)\quad \frac{dr}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial r}} = \frac{v}{u}$$

[1] Construction for a wind tunnel, Journ. Aero. Sci. vol. 10, n.º 8, 1943, ARC 7316.

par conséquent, doit être

(12) $$\begin{cases} v < 0 \ , \ 0 < x < \lambda \ , \ r = R(x) \\ v = 0 \ , \ x = 0 \text{ et } x = \lambda \ , \ r = R(x), \end{cases}$$

puisque, par hypothèse,

(13) $$u > 0 \ , \ 0 \leqslant x \leqslant \lambda \, .$$

La condition $(v)_{x=0} = 0$ peut être satisfaite en posant dans les équations $(7'')$,

(14) $$b = a \, ;$$

La condition $(v)_{x=\lambda} = 0$ devient alors $(e^{\alpha\lambda} - e^{-\alpha\lambda}) \cdot J_1(\alpha R(\lambda)) = 0$ et est satisfaite par α tel que $e^{\alpha\lambda} = e^{-\alpha\lambda}$ ou $e^{2\alpha\lambda} = 1$.

On en déduit:

(15) $$\alpha = i \frac{k}{\lambda} \pi, \quad k = 1, 2, 3, \cdots,$$

la solution $\alpha = 0$, correspondant à $k = 0$, étant à rejeter.

Le système $(7'')$ devient donc

$$(7''') \quad \begin{cases} u(x,r) = a_0 + 2a \cos \frac{k}{\lambda} \pi x \cdot I_0 \left(\frac{k}{\lambda} \pi r \right) \\ v(x,r) = 2a \sin \frac{k}{\lambda} \pi x \cdot I_1 \left(\frac{k}{\lambda} \pi r \right) \end{cases}$$

où, comme d'habitude, $I_n(z) = i^{-n} J_n(iz)$ représente la fonction de Bessel modifiée de 1ère espèce.

La condition $(v)_{0<x<\lambda} < 0$ exige maintenant

(16) $$k = 1$$

(17) $$a < 0$$

car $I_1(z) \geqslant 0$ pour $z \geqslant 0$. (16) assure, en même temps, la monotonie de la fonction $f(x) = u(x, 0)$.

Il ne reste qu'á imposer la condition $u > 0$, $0 \leqslant x \leqslant \lambda$ par un choix approprié des coefficients $a < 0$ et $a_0 > 0$ (puisque $I_0(z) \geqslant 0$ pour $z \geqslant 0$).

Il faudra que: $a_0 > -2a \cos \frac{\pi}{\lambda} x \cdot I_0 \left(\frac{\pi}{\lambda} r \right)$ pour $0 \leqslant x \leqslant \lambda$, $r = R(x)$. La valeur maxima du second membre est atteinte pour $x = 0, r = R(0)$, car $\cos \frac{\pi}{\lambda} x$ et $R(x)$ sont des fonctions décroissantes de x, et $I_0(z)$ est une fonction croissante de z; donc, il suffit que $a_0 > -2a I_0 \left(\frac{\pi}{\lambda} R(0) \right)$

ou $a_0 = -2ah - 2a I_0 \left(\frac{\pi}{\lambda} R(0) \right)$, avec $h > 0$.

Posons $-2a = a_1$, donc

(18) $$a_0 = a_1 \left[h + I_0 \left(\frac{\pi}{\lambda} R(0) \right) \right]$$

On aura finalement

(19) $$f(x) = a_1 \left[h + I_0 \left(\frac{\pi}{\lambda} R(0) \right) - \cos \frac{\pi}{\lambda} x \right]$$

et

$$(7^{\mathrm{IV}}) \quad \begin{cases} u(x,r) = a_1 \Big[h + I_0 \left(\frac{\pi}{\lambda} R(0) \right) - \\ \qquad - \cos \frac{\pi}{\lambda} x \cdot I_0 \left(\frac{\pi}{\lambda} r \right) \Big] \\ v(x,r) = -a_1 \sin \frac{\pi}{\lambda} x \cdot I_1 \left(\frac{\pi}{\lambda} r \right) \end{cases}$$

avec $a_1 > 0, h > 0$ arbitraires.

La fonction de courant est alors

$$(8^{\mathrm{IV}}) \quad \psi(x,r) = \frac{a_1}{2} \left[h + I_0 \left(\frac{\pi}{\lambda} R(0) \right) \right] r^2 - \\ - \frac{\lambda}{\pi} a_1 \cos \frac{\pi}{\lambda} x \cdot r \cdot I_1 \left(\frac{\pi}{\lambda} r \right)$$

Nous pouvons disposer des deux coefficients arbitraires de façon à assurer certaines caractéristiques pour le «convergent», par exemple, une ouverture de sortie avec un rayon donné.

Il est à remarquer que $a_1 h$ représente la vitesse $u(0, R(0))$ au point $(0, R(0))$, à l'entrée sur le contour, et $a_1 \left[h + I_0 \left(\frac{\pi}{\lambda} R(0) \right) - 1 \right]$ représente la vitesse $u(0,0)$, a l'entrée sur l'axe; la différence de ces deux vitesses est $a_1 \left[I_0 \left(\frac{\pi}{\lambda} R(0) \right) - 1 \right]$. Il convient donc de prendre le rapport $\left[I_0 \left(\frac{\pi}{\lambda} R(0) \right) - 1 \right] / h$ aussi petit que possible, pour que la vitesse d'entrée soit aussi uniforme que possible [3].

D'autre part, si on peut affirmer, à priori, que $u(x, r)$ donnée par (7^{IV}) est monotonément croissante, le long de

[3] On voit apparaître ici l'influence de la longueur λ et du rayon d'entrée $R(0)$, sur la non uniformité de la répartition de vitesses d'entrée. Pour la sortie, la différence des vitesses sur l'axe et sur le contour est $a_1 \left[1 - I_0 \left(\frac{\pi}{\lambda} R(\lambda) \right) \right]$. Donc, le rapport de la vitesse de sortie et de la vitesse d'entrée est, en module, égal à $\dfrac{I_0 \left(\frac{\pi}{\lambda} R(\lambda) \right) - 1}{I_0 \left(\frac{\pi}{\lambda} R(0) \right) - 1} < 1$. C'est à dire que la non uniformité de la répartition de vitesses à la sortie est moins accentuée qu'à l'entrée. Cette remarque a de l'intérêt pour le problème du convergent avec un corps à l'ouverture de sortie. Voir: A. Pereira Gomes, «*Determination d'un convergent ayant un corps à l'ouverture de sortie*», Port. Math. vol. 12, (1953), p. 49-56.

$\psi(x,r)=C$, on ne peut rien dire sur le comportement de la fonction $w=\sqrt{u^2+v^2}$. En effet, la fonction $r=R(x)$ définie par $\psi(x,r)=C$ étant décroissante, le produit $\cos\frac{\pi}{\lambda}x\cdot I_0\left(\frac{\pi}{\lambda}r\right)$ est décroissant pour $0<x<\lambda$ donc $u(x,r)$ est croissante. Mais les fonctions $\sin\frac{\pi}{\lambda}x$ et $I_1\left(\frac{\pi}{\lambda}R(x)\right)$ sont l'une croissante, l'autre décroissante pour $0<x<\lambda$ et, sans connaître la fonction $R(x)$, on ne peut rien deduire sur le comportement du produit, c'est à dire de $v(x,r)$.

Nous avons supposé, au début de cette analyse, que $f(x)=a_0+f_1(x)$ où $f_1(x)$ satisfaisait aux conditions (9), et cette hypothèse nous a conduit à la solution $f(x)=a_0-a_1\cos\frac{\pi}{\lambda}x$, $a_0>0, a_1>0$, si l'on cherche un «convergent» avec une entrée et une sortie paralléles à l'axe.

Mais nous pouvons élargir cette hypothèse et supposer que $f(x)$ est de la forme $f(x)=a_0+\sum_{p=1}^{N}f_p(x)$ où les $f_p(x)$ sont des fonctions qui satisfont les conditions (9), pour $p=1,2,\cdots,N$.

On aura das ce cas

$$f(x)=a_0+\sum_{p=1}^{N}a_p e^{\alpha_p x}+b_p e^{-\alpha_p x} \tag{20}$$

et on voit sans peine que u et v prennent la forme

$$\left\{\begin{aligned} u(x,r)&=a_0+\sum_{p=1}^{N}(a_p e^{\alpha_p x}+b_p e^{-\alpha_p x})\,J_0(\alpha_p r)\\ v(x,r)&=-\sum_{p=1}^{N}(a_p e^{\alpha_p x}-b_p e^{-\alpha_p x})\,J_1(\alpha_p r)\end{aligned}\right. \tag{21}$$

On en déduit:

$$\psi(x,r)=\frac{a_0}{2}r^2+\sum_{p=1}^{N}(a_p e^{\alpha_p x}+b_p e^{-\alpha_p x})\frac{r}{\alpha_p}J_1(\alpha_p r) \tag{22}$$

Si nous voulons un «convergent» avec une entrée et une sortie parallèles à l'axe, nous imposons $v(0,R(0))=v(\lambda,R(\lambda))=0$, par conséquent

$$\sum_{p=1}^{N}(a_p-b_p)\,J_1(\alpha_p R(0))=0 \tag{23}$$

$$\sum_{p=1}^{N}(a_p e^{\alpha_p\lambda}-b_p e^{-\alpha_p\lambda})\,J_1(\alpha_p R(\lambda))=0 \tag{24}$$

La première de ces équations peut être satisfaite si l'on pose

$$b_p=a_p\,,\ p=1,2,\cdots,N \tag{25}$$

et la seconde devient alors:

$$\sum_{p=1}^{N}a_p(e^{\alpha_p\lambda}-e^{-\alpha_p\lambda})\,J_1(\alpha_p R(\lambda))=0\,;$$

cette égalité peut être satisfaite en supposant

$$e^{\alpha_p\lambda}-e^{-\alpha_p\lambda}=0,\ \text{pour}\ p=1,2,\cdots,N, \tag{26}$$

ce qui nous amène à

$$\alpha_p=i\frac{k_p}{\lambda}\pi \tag{27}$$

où k_p est un entier arbitraire $\neq 0$, pour $p=1,2\cdots,N$.

Dans ces conditions, on a:

$$\left\{\begin{aligned} u(x,r)&=a_0+\sum_{p=1}^{N}2a_p\cos\frac{k_p}{\lambda}\pi x\cdot I_0\left(\frac{k_p}{\lambda}\pi r\right)\\ v(x,r)&=\sum_{p=1}^{N}2a_p\sin\frac{k_p}{\lambda}\pi x\cdot I_1\left(\frac{k_p}{\lambda}\pi r\right)\end{aligned}\right. \tag{21'}$$

$$\psi(x,r)=\frac{a_0}{2}r^2+\sum_{p=1}^{N}2a_p\frac{\lambda}{k_p\pi}\cos\frac{k_p\pi}{\lambda}x\cdot I_1\left(\frac{k_p}{\lambda}\pi r\right)\cdot r \tag{22'}$$

La solution $a_p=b_p$, $p=1,2,\cdots N$ et $\alpha_p=ik_p\frac{\pi}{\lambda}$ que nous venons de considérer équivaut à mettre $v(0,r)=v(\lambda,r)=0$ pour tout r. Ceci correspond à prendre un potentiel $\phi(x,r)$ tel que $\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_{x=0}=0$ et $\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_{x=\lambda}=0$, c'est à dire, constant pour $x=0$ et $x=\lambda$. C'est la solution déduite directement par Thwaites [4].

Mais cette solution n'est pas unique. Nous pouvons satisfaire aux conditions (23) et (24) par d'autres hypothèses que (25) et (26), en faisant $v(0,r)=0$ et $v(\lambda,r)=0$ pour des valeurs particulières de r, correspondantes aux dimensions du convergent. Nous serons ainsi amenés à d'autres expressions de $u(x,r)$, $v(x,r)$ et $\psi(x,r)$ qui permettent d'utiliser les fonctions de Bessel $J_0(z)$ et $J_1(z)$ dans le calcul numérique.

(4) *«On the design of contractions for wind tunnels»*, Aeronautical Research Council, R. & M. n.º 2278, 1946.