Nota a "Uma demonstração por indução finita"(*)

por Gustavo de Castro

1. A história das matemáticas está cheia de claros indícios do movimento colectivo *de arrastamento* que traz o grande progresso e alimenta de energia os trabalhos individuais. Sem ignorar a importância dos colaboradores mais extraordinários nesse progresso, tem de reconhecer-se que coisa de maior inércia é responsável pelo avanço ininterrupto.

Um dos claros indícios desse arrastamento a que se fez referência é o acumular de resultados, o esfusiar de soluções, que estugam o passo na via de solução de certo problema numa dada época.

Ora, o último número da *G. M.* veio mostrar mais uma vez como o mesmo é surpreendentemente verdade até na *pequena* história das matemáticas. Na *pequena* história das matemáticas dum pequeno país.

Há um tempo a esta parte alguns trabalhadores duma instituição onde se faz investigação aplicada vêm ponderando a nossa extraordinària carência em matemáticas *aplicadas* e procurando imaginar possibilidades de solução... e eis que o Doutor Pereira Gomes abre o problema na *G. M.*. Antes de mais acentue-se a habilidade e a prudência com que o problema foi aberto; como P. G. se limita às questões mais ingénuas para que todos possamos partir do início; como nos fornece a todos com a tradução de Kármán uma base de onde começar. Primeira coincidência.

A segunda coincidência é a publicação no mesmo número da *G. M.* duma nota de Silva Lobo. A coincidência reside aqui em que ela se presta admiràvelmente para que se aborde um pequeno ponto ligado ao debate geral. É a este pequeno ponto que se limita esta minha nota.

2. O ponto aparenta-se ao das «*sound functions*» as *funções sãs ou sólidas* — as *functions honnêtes* de Borel — e à observação que faz aos matemáticos o *Engenheiro* de Kármán de que «*gastais muito tempo e muito engenho para mostrar a existência de soluções... evidente... por razões óbvias de natureza física*».

É que certos problemas de matemática pura são problemas de matemática aplicada e neste aspecto às vezes tão imediatos que se lhe conhecem um bom par de soluções. Pondo-se o problema ao matemático puro pode ele, se não se informar disso, realizar um esforço na sua resolução em certa medida escusado.

Acentuemos que um tal facto se não pode evitar sempre; maior esforço tem às vezes o matemático em certificar-se que já há solução do que em arranjar uma. E acrescente-se que é às vezes muito útil um novo esfôrço pela introdução ou rodagem dum bom método; pela iluminação de certos ângulos do problema.

Acontece porém que em certos casos se poderia evitar o arrombar de porta aberta *se não fosse a errada orientação que exagera, até já no ensino secundário, a separação entre as matemáticas puras e as matemáticas aplicadas*. No caso que nos interessa não se entende como se possa fazer a análise combinatória e o binómio de Newton sem recurso a problemas simples de probabilidades a não ser perdendo um material sugestivo e uma boa ocasião para introduzir o *aleatório*, em troca duns exemplos um tanto ridículos. Não se entende como se podem pôr problemas sobre números do triângulo de Pascal sem a tentativa de os traduzir em termos de urnas de duas espécies.

3. Sejam então as n extracções sucessivas com reposição duma urna $U(p,q)$ de duas espécies, com pN bolas vermelhas e qN bolas azuis. A repetição X de bolas vermelhas é uma bernoulliana $-p, n$:

$$Pr(X=x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}.$$

Os seus dois primeiros momentos são

$$E(X)=\sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x}p^x q^{n-x} \quad \text{e} \quad E(X^2)=\sum_{x=0}^{n} x^2\binom{n}{x}p^x q^{n-x}.$$

Pondo $p=q=1/2$

$$\sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x}=2^n E(X) \quad \text{e} \quad \sum_{x=0}^{n} x^2\binom{n}{x}=2^n E(X^2).$$

Como ninguém ignora

$$E(X)=np \quad \text{e} \quad E(X^2)=np\,[1+(n-1)\,p]$$

o que, para $p=q=1/2$, conduz a

$$\sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x}=2^{n-1}n \quad \text{e} \quad \sum_{x=0}^{n} x^2\binom{n}{x}=2^{n-2}n(n+1).$$

4. Recordam-se dois métodos, no fundo equivalentes, para se obter os dois primeiros momentos de binomial.

(*) *Gazeta de Matemática*, N.º 53, pg. 13-15, 1952.

4.1. Tem-se

$$E(X)=\sum_{x=0}^{n}x\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=$$

$$=np\sum_{x=0}^{n-1}\binom{n-1}{x}p^x q^{n-1-x}=np\,(p+q)^{n-1}=np\,.$$

E analogamente

$$E(X^2)=\sum_{x=0}^{n}[x(x-1)+x]\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=$$

$$=n(n-1)\,p^2\sum_{x=0}^{n-2}\binom{n-2}{x}p^x q^{n-2-x}+$$

$$+np\sum_{x=0}^{n-1}\binom{n-1}{x}p^x q^{n-1-x}=$$

$$=n(n-1)\,p^2+np=np\,[1+(n-1)\,p]\,.$$

4.2. Recorrendo à função geradora (*)

$$P(s)=(q+ps)^n$$

tem-se

$$E(X)=P'(1)\qquad E(X^2)=P'(1)+P''(1)\,.$$

Ora

$$P'(s)=np\,(q+ps)^{n-1}$$
$$P''(s)=n(n-1)\,p^2\,(q+ps)^{n-2}$$

de onde os resultados que se pretendiam.

(*) Veja-se (Feller, 50): *An Introduction to Probability Theory...* p. 212. Chapman & Hall. London.

5. Ainda de outro modo, servindo-nos dos indicadores X_i das sucessivas extracções

$$E(X_i)=p\quad E(X_i-p)^2=pq$$

o que dá

$$E(X)=\sum E(X_i)=np$$

$$E(X-np)^2=\sum E(X_i-p)^2=npq$$

e

$$E(X^2)=E(X-np)^2+[E(X)]^2=$$
$$=npq+n^2p^2=np\,[1+(n-1)\,p]\,.$$

6. Também se não deve esquecer a fórmula de Romanovsky para os momentos *à média* duma bernoulliana:

$$\mu_{k+1}=pq\left(\frac{d\mu_k}{dp}+nk\,\mu_{k-1}\right),$$

com $\mu_0=1$ e $\mu_1=0$.

Não dispensa o conhecimento de $E(X)=np$, mas abre o caminho para o cálculo de

$$\sum_{x=0}^{n}x^k\binom{n}{x}=E(X^k)=\sum_{0}^{k}\binom{k}{i}\mu_{k-i}\,[E(x)]^i\,.$$

Ainda pelos momentos factoriais (como em **4.1**) se consegue o mesmo (**).

7. Esta nota não diminui o interesse da de Silva Lobo onde se visa claramente o meritório fim de adextrar os cultores das Matemáticas Elementares num excelente método. Possa ela mostrar um pequeno aspecto das desvantagens da partilha da Matemática em duas irmãs estranhas, de costas uma para a outra.

(**) Veja-se, por exemplo, (Kendall, 47): *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 1, Caps. 3 e 5.

Correccion al articulo «sobre pares de figuras convexas» (*)

por ***M. A. Santaló***

El Prof. L. M. Blumenthal ha tenido la amabilidad de hacernos notar que la generalización del teorema de Helly que creiamos haber dado en el articulo citado, no es correcta, ni puede existir una generalización del mismo tipo, como prueba el siguiente interesante contra-ejemplo debido al Prof. Motzkin.

Consideremos el caso de pares de segmentos sobre una recta. Considerando los mismos como bases de rectângulos del plano, o como ejes de cilindros de revolución en cualquier espacio, se comprende que el ejemplo vale para un espacio de dimensión cualquiera.

Sean los $N+1$ pares de segmentos siguientes:

(*) *Gazeta de Matemática*, N.º 50, pp. 7-10, 1951.

$S_1=$ intervalo	$(-2,-1)+$	intervalo	$(1,N)$
$S_2=$	»	$(1,N-1)+$	»	$(N+1-\varepsilon,N+1+\varepsilon)$
$S_3=$	»	$(1,N-2)+$	»	$(N,N+1)$
$S_4=$	»	$(1,N-3)+$	»	$(N-1,N+1)$
....				
$S_N=$	»	$(1-\varepsilon,1+\varepsilon)+$	»	$(3,N+1)$
$S_{N+1}=$	»	$(2,N+1)+$	»	$(N+2,N+3)$.

Es inmediato comprobar que cada N de estos pares de segmentos tienen punto común sin que sin embargo exista punto común a todos los $N+1$.

El error de la demostración que creiamos haber dado está en el Lema II, el cual es evidentemente falso.