CONSULTÓRIO

Com este número a G. M. inicia uma nova secção na qual serão dadas respostas às perguntas que nos forem dirigidas pelos nossos leitores. Procuraremos sempre que os assuntos sejam tratados por especialistas, com o desenvolvimento necessário, de modo a que a resposta constitua um verdadeiro esclarecimento do assunto.

Pretende-se, deste modo fazer com que a *Gazeta* se torne um elemento útil aos seus leitores e sirva as suas necessidades e preocupações. Esta secção visa, pois, um maior contacto com os leitores cujas perguntas nos indicarão as suas dificuldades, os pontos que mais necessitam ser esclarecidos.

Para os assuntos de maior interesse ou que careçam de um amplo desenvolvimento, as respostas serão dadas em artigos especiais, fora mesmo da secção.

O que é uma axiomática?

O conceito de axiomática é dos que mais têm evoluído ao longo dos séculos. Distinguiremos aqui duas formas sucessivas de tal conceito: a forma clássica e a forma moderna.

O conceito clássico de axiomática é o que se encontra implícito na teoria das ciências dedutivas, segundo Aristóteles: A designação *ciência dedutiva* aplica-se então a todo o sistema S de *termos* e de *proposições àcerca desses termos*, que se sucedem indefinidamente uns aos outros de tal modo que:

a) Toda a proposição que seja ou venha a ser demonstrada a partir de proposições de S pertencerá ainda a S.

b) Existe em S um número finito de termos (chamados *termos primitivos*), que não podem ser definidos lògicamente, e a partir dos quais se definem todos os restantes termos de S (chamados *termos derivados*).

c) Existe em S um número finito de proposições (*os postulados ou axiomas* *), que não se demonstram lògicamente e das quais se deduzem todas as outras proposições de S (*os teoremas*).

Pressupõe-se, além disso, que o sistema S de termos e de proposições diz respeito a *um, e um só, domínio de seres*, cuja existência é postulada. Os termos primitivos corresponderiam a dados da intuição — a conceitos psicològicamente elementares, de apreensão imediata. Anàlogamente, os axiomas proviriam da intuição e teriam assim um carácter de evidência, que permitiria aceitá-los como verdadeiros, sem mais explicações.

Modêlo perfeito e mesmo único, de ciência dedutiva era então a Geometria de Euclides.

A axiomática duma ciência dedutiva seria, naturalmente, o conjunto dos seus axiomas. Uma primeira *nuance*, uma primeira tendência no sentido da evolução do conceito de axiomática, manifesta-se ao ser reconhecida uma certa arbitrariedade na escolha dos termos que hão de figurar como primitivos e das proposições que devem aceitar-se como postulados. Mas o que provoca decididamente a passagem à nova forma do conceito é o aparecimento sensacional das geometrias não-euclideanas, no século passado, com incalculáveis repercussões em todos os sectores do pensamento.

Para dar uma primeira idea do que se entende hoje por «axiomática» começarei por tomar como exemplo a seguinte definição de «conjunto ordenado»:

«Chama-se *conjunto ordenado* todo o conjunto U não vazio no qual esteja definida uma relação binária que designaremos pelo símbolo «$\prec$» (ler: «precede» ou «é anterior a»), de modo que resultem verificadas as seguintes condições:

I. *Dados dois elementos* x, y *de* U, *é sempre verificada uma, e uma só, das três hipóteses*:

$$x \prec y, \quad x = y, \quad y \prec x$$

II. *Todas as vezes que, dados três elementos* x, y, z *de* U, *se tiver* $x \prec y$ *e* $y \prec z$, *será também* $x \prec z$».

(Costuma exprimir-se a condição I, dizendo que a relação $\prec$ é *tricotómica* e a condição II, dizendo que a relação $\prec$ é *transitiva*).

Estamos em presença duma *definição axiomática*; porém, não haja equívocos: o que se define aqui não é o termo «$\prec$» (termo primitivo), mas sim a classe dos conjuntos ordenados ou, o que é equivalente, o conceito de relação de ordem. As condições I, II são os *axiomas* da definição: proposições que envolvem o termo indeterminado «$\prec$» (sinónimo de «precede») e lhe fixam, por assim dizer, os limites da variabilidade, de maneira implícita. Na verdade, o símbolo «$\prec$» pode ser interpretado de infinitos modos diversos, até dentro dum mesmo conjunto U. Por exemplo o conjunto de todas as palavras duma língua é um conjunto ordenado, se adoptarmos o conhecido critério de ordenação alfabética; são ainda conjuntos ordenados o conjunto R dos números reais ou o conjunto N dos números naturais, quando o termo

* Antecipamos aqui um pouco o ponto de vista moderno, segundo o qual não há que fazer distinção entre «postulado» e «axioma».

«precede» significa «menor que». Mas não resultará ordenado o conjunto dos números complexos, se adoptarmos por exemplo o seguinte critério:

$a+bi \prec c+di$, se, e só se, $a<c, b<d$ (a, b, c, d números reais; $i^2=-1$), visto não ser então verificada a condição I; porém tal conjunto pode ser ordenado, definindo dum outro modo a relação $\prec$.

Os conjuntos ordenados constituem as chamadas *realizações* da axiomática considerada. Dados dois conjuntos ordenados U, U', e designando por $\prec, \prec'$ as respectivas relações de ordem, diz-se que tais conjuntos ordenados são *isomorfos* (ou, em terminologia mais específica: *semelhantes*), quando, entre os elementos $x, y, \cdots$ de U e os elementos $x', y' \cdots$ de U' se pode estabeler uma correspondência biunívoca $x \rightleftarrows x'$, $y \rightleftarrows y'$, $\cdots$, de tal modo que se tenha

$$x \prec y, \text{ se, e só se, } x' \prec' y',$$

quaisquer que sejam os elementos x, y de U considerados.

Por exemplo, o conjunto P dos números positivos e o conjunto R dos números reais, com a habitual noção de «menor que», são conjuntos ordenados isomorfos, porque entre os elementos de P e os de R se pode estabelecer a correspondência biunívoca

$$x \rightleftarrows x' = \log x,$$

que *respeita nos dois sentidos* a relação de ordem. Mas o conjunto ordenado R dos números reais não é isomorfo ao conjunto ordenado N dos números naturais: para o reconhecer, basta observar que, dados dois elementos x, y de R tais que $x<y$, existe sempre, pelo menos um outro elemento z de R tal que $x<z<y$; ora esta propriedade não se verifica em N.

Diz-se que dois conjuntos ordenados têm o mesmo *tipo de ordem*, quando são isomorfos. Também se dirá neste caso que representam a mesma *solução* da axiomática dos conjuntos ordenados. O facto de existir *pelo menos* uma solução desta axiomática traduz-se dizendo que a axiomática é *compatível* (ou *possível*); o facto de existirem várias soluções (isto é, várias realizações da mesma, *não isomorfas entre si*), exprime-se dizendo que a axiomática *não é categórica*.

Mas nós podemos restringir o domínio das soluções da axiomática, ampliando-a com axiomas *independentes dos primeiros*, isto é, com novas condições que não sejam consequências lógicas de I e II. Por exemplo imponhamos à relação $\prec$ esta outra condição:

III. *Para todo o subconjunto* X *de* U *não vazio existe um elemento* y *de* X *tal que, qualquer que seja o elemento* x *de* X, *se tem* y = x *ou* y $\prec$ x (o que se exprime dizendo que todo o subconjunto X de U não vazio tem um *primeiro* elemento).

Dizem-se *bem ordenados* os conjuntos ordenados que verificam esta condição suplementar. As realizações da axiomática I, II, III são pois os conjuntos bem ordenados.

O conjunto dos números naturais, com a usual relação $<$, é um conjunto bem ordenado. Mas já não o é o conjunto dos números reais: basta observar que, por exemplo o conjunto dos números reais maiores que 1 não tem primeiro elemento; o próprio conjunto R não tem primeiro elemento. Estes simples exemplos provam que o axioma III é independente dos axiomas I, II.

Porém, há conjuntos bem ordenados que não são isomorfos à sucessão dos números naturais. Exemplo: o conjunto dos números

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \cdots, 1, 2, \cdots, m, \cdots$$

ordenados com a habitual relação «menor que». Mas introduzamos este novo axioma:

IV. *Para todo o elemento* x *de* U *que não seja o primeiro*, existe um elemento imediamente anterior a* x, *isto é um elemento* y *de* U *anterior a* x *e tal que, qualquer que seja o elemento* z *de* U *menor que* x, *se tem* z = y *ou* z $\prec$ y.

É fácil ver que, no último exemplo citado, não se verifica a condição IV, porquanto o elemento 1, que não é ali o *primeiro*, não tem antecessor (isto é, elemento imediatamente anterior).

Todavia, a adjunção do axioma IV ainda não conduziu a uma axiomática categórica: são realizações da nova axiomática, não só a sucessão dos números naturais, como ainda todo o conjunto ordenado *finito*.

A categoricidade pode ser atingida com a adjunção dum último axioma, que exclue os conjuntos ordenados finitos:

V. *Para todo o elemento* x *de* U *existe um elemento* y *de* U *tal que* x $\prec$ y (o que se exprime dizendo que não existe em U um *último* elemento).

Com efeito, a axiomática I, II, III, IV, V admite uma única *solução*, constituída por infinitas *realizações* isomorfas à sucessão dos números naturais. *Podemos pois dizer que se trata duma axiomática dos números naturais, com a seguinte reserva: a sucessão dos números naturais fica apenas definida a menos dum isomorfismo.* Na verdade há infinitos conjuntos ordenados, isomorfos a este: a sucessão dos números pares, a sucessão dos números primos, etc. etc. *O que fica na realidade definido é o tipo de ordem de tais conjuntos ordenados.*

---

* O termo «primeiro» define-se fàcilmente a partir do termo «precede», conforme está indicada na condição III.

Note-se que a mais conhecida axiomática dos números naturais não é esta, mas sim a de PEANO, em que se toma para primitivo o termo «sucessor de», a partir do qual se define depois o termo «menor que» (enquanto nesta se define «sucessor de» a partir de «menor que»).

———

Mas até agora apenas apresentei exemplos de axiomáticas. Sobre a maneira de chegar a uma concepção geral das axiomaticas no sentido moderno, limitar-me-ei a muito breves e esquemáticas indicações.

Chamarei *estrutura matemática* a todo o conjunto U *(domínio de indivíduos* ou *universo lógico)*, sobre o qual sejam designadas como *primitivas* certas entidades $\alpha, \beta, \cdots$. Estas entidades podem ser: *indivíduos* (elementos de U), *classes* (subconjuntos de U, famílias de subconjuntos de U, etc.) ou *relações* (definidas em U ou em conjuntos construidos a partir de U) *.

No exemplo dos conjuntos ordenados há uma só entidade primitiva que é uma *relação binária*. Mas a Matemática apresenta-nos ainda, a cada passo, *relações ternárias*, *relações quaternárias*, etc. (um dos grandes progressos da lógica moderna a respeito da lógica clássica é precisamente o de fazer um estudo sistemático das relações, em pé de igualdade com as classes). Por exemplo, sejam X, Y, Z pontos de variáveis do espaço ordinário e consideremos a expressão

«X, Y e Z estão em linha recta»

Trata-se manifestamente, duma *propriedade relativa*, que se verifica para determinados *ternos* de pontos e não se verifica para outros (não terá sentido quando aplicada a pares de pontos, e menos ainda quando aplicada a pontos, individualmente). Diremos então, que a expressão considerada define uma *relação ternária* entre pontos; designando tal relação pelo símbolo Rt, convenciona-se escrever a mesma expressão, abreviadamente, tal como segue:

$$Rt(X, Y, Z).$$

Anàlogamente, se escrevermos $Tr(X, Y, Z)$ como abreviatura da expressão «X está situado entre Y e Z», será Tr o simbolo duma relação ternária *distinta* de Rt (há ternos *ordenados* que verificam Rt sem verificar Tr); se escrevermos $Eq(X, Y, U, V)$ como abreviatura da expressão «a distância de X a Y é igual à distância de U a V» será Eq o simbolo duma *relação quaternária*; etc. As relações Rt, Tr e Eq são as entidades tomadas para primitivas em algumas axiomáticas da Geometria euclideana (note-se porém que é possível definir Rt e Tr por meio de Eq).

Postas estas considerações preliminares, poderemos dizer que uma axiomática é um conjunto de condições

$$P_1(\alpha, \beta, \cdots)$$
$$P_2(\alpha, \beta, \cdots)$$
$$P_3(\alpha, \beta, \cdots)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

impostas a certos *símbolos indeterminados* $\alpha, \beta, \cdots$, representativos de entidades definidas sobre um conjunto fundamental U, *igualmente indeterminado*. Os símbolos de $\alpha, \beta, \cdots$ serão os *termos primitivos* e as condições impostas a $\alpha, \beta, \cdots$ os axiomas da axiomática em questão,

Realização da axiomática será toda a estrutura matemática $[U', \alpha', \beta', \cdots]$ que a verifique, isto é, tal que, substituindo U por U', α por α', β por β', $\cdots$, todos os axiomas se convertam em proposições verdadeiras. A axiomática dir-se-á *compatível* se admitir pelo menos uma realização.

O conceito de «realizações isomorfas» pode ainda ser definido no caso geral, tal como segue: Dadas duas estruturas $[U_1, \alpha_1, \beta_1, \cdots]$ e $[U_2, \alpha_2, \beta_2, \cdots]$, diremos que estas estruturas são *isomorfas*, relativamente à ordem por que são nomeados os entes primitivos, quando fôr possível aplicar biunìvocamente U_1 sobre U_2, de modo que α_1 se converta em α_2, β_1 em β_2, etc.*

Daqui decorrem imediatamente os conceitos de «solução» e de «categoricidade» duma axiomática.

O conceito de «axiomática categórica» é o legítimo descendente do conceito clássico de axiomática, tal como o delineamos no início destas considerações. Mas que imensa distância os separa! Que profunda divergência de pontos de vista!

Agora os termos primitivos já não designam seres bem determinados, dos quais «temos um conhecimento intuitivo imediato»; agora os termos primitivos são simplesmente *indeterminadas*, semelhantes às incógnitas ou variáveis dum sistema de equações.

———

* Também se podem apresentar estruturas matemáticas com mais de um domínio de indivíduos, mas a redução ao caso de um só domínio é sempre possível, que mais não seja considerada a reunião dos primeiros.

* O sentido da palavra «converter» aqui empregada não carece de explicações quando se trata de indivíduos (elementos de U_1 U_2); Se α_1 for uma classe, diremos que α_1 se converte em α_2, quando α_2 fôr a classe dos elementos de U_2 correspondentes aos elementos de α_1; se α_1 for uma relação binária, diremos que α_1 se converte em α_2, quando α_2 for a a relação binária verificada pelos pares ordenados de elementos de U_2 correspondentes aos pares ordenados de elementos de U_1 que verificam α_1; e assim por diante.

E os axiomas estão bem longe de ser aquelas «verdades de tal modo intuitivas, de tal modo elementares, que se nos tornam evidentes»: agora são apenas *condições*, verificadas por certas estruturas, não verificadas por outras. Por sua vez, os *teoremas* relativos à axiomática serão todas aquelas condições *implicadas* pelos axiomas (isto é, que resultam automàticamente verificadas desde que o sejam todos os axiomas).

O que interessa fundamentalmente é que a axiomática seja compatível, isto é, que exista pelo menos uma sua realização. Mas aqui levanta-se um problema em que só muito superficialmente posso tocar: *Como averiguar se uma dada axiomática é ou não compatível?*

Quando se trata, por exemplo, duma axiomática de Geometria euclideana, formulada com os termos primitivos Rt, Tr e Eq, pode obter-se uma realização da axiomatica, do seguinte modo: Chamemos *pontos* aos termos ordenados de números reais, tais como $(0, -1, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, 0, -1)$, etc. e façamos ainda as seguintes convenções: dados três pontos $X=(x_1, x_2, x_3)$, $Y=(y_1, y_2, y_3)$ e $Z=(z_1, z_2, z_3)$, diremos que «X, Y, Z estão em linha recta» quando as diferenças

$$x_1 - z_1, \; x_2 - z_2, \; x_3 - z_3$$

forem ordenadamente proporcionais * às diferenças

$$y_1 - z_1, \; y_2 - z_2, \; y_3 - z_3;$$

diremos que «Z está situado entre X e Y», quando verificada a hipótese anterior, a constante de proporcionalidade é um determinado número negativo; finalmente, dado um quarto ponto $U=(u_1, u_2, u_3)$ diremos que «a distância de X a Y é igual à distâcia de Z a U» quando se tiver

$$(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2=(z_1-u_1)^2+ \\ +(z_2-u_2)^2+(z_3-u_3)^2$$

Pois bém, é facil reconhecer que o conjuto R^3 de todos os ternos ordenados de núméros reais, com as relações Rt, Tr e Eq assim definidas, constitui uma estrutura matemática $[R^3, Rt, Tr, Eq]$ que *satisfaz à referida axiomática da Geometria euclideana***. Esta axiomática será pois compatível, *desde que se admita a existência da totalidade dos números reais*. Suponhamos por sua vez provada a existência do conjunto R, desde que se admita a existência do conjunto N dos números naturais. Mas existe o conjunto N? Por outras palavras:

É compatível a axiomática dos números naturais?

Hilbert e os lógicos do sua escola tentaram provar a compatibilidade de certas axiomáticas dos números naturais (ampliadas com axiomas da lógica formal), demonstrando que tais axiomáticas *não são contraditórias*. («Existência» e «não-contradição» são termos inicialmente assumidos como equivalentes, de acordo com a frase célebre de Poincaré: «Em Matemática, *existir* significa *ser isento de contradição*»).

O objectivo ideal do programa hilbertiano pode considerar-se inatingível, sobretudo após os resultados sensacionais de Gödel, cuja descrição está fora do âmbito deste apontamento. Mas o impulso que tal programa deu às investigações lógicas foi uma recompensa generosa do esforço dispendido. Graças a esse impulso, o mecanismo lógico do pensamento matemático foi dissecado com profundidade e agudeza extremas, fazendo uso do instrumento mais adequado a esse fim: a lógica simbólica. Deu-se início a uma *teoria da definição* e a uma *teoria da demonstração*, que tomam o lugar da lógica formal de Aristóteles e se encontram hoje em pleno desenvolvimento, com repercussões filosóficas e um alargamento de perspectivas que chegam a causar vertigens.

E mais não ouso dizer sobre questões de tal envergadura *.

Quais as vantagens dos métodos axiomáticos?

A resposta depende, naturalmente, do conceito de axiomática em questão. Se nos reportarmos ao conceito clássico de axiomática, a pergunta parece equivalente a esta outra: «Quais são, em geral, as vantagens das ciências dedutivas, como por exemplo a Geometria de Euclides, a Mecânica de Newton ou a Termodinâmica de Clausius? «Na verdade, basta ter presente a definição de «ciência dedutiva», para se reconhecer que ciência dedutiva não há onde não houver axiomática. *Racionalizar* uma ciência, isto é, torná-la dedutiva (o que, a ser possível, se costuma interpretar como investidura no grau de perfeição máxima) o mesmo é que *axiomatizar* essa ciência. Verdadeiramente, a Geometria de Euclides só foi totalmente racionalizada no século passado, porque só então foi dada uma sua axiomática completa, como é a que figura nos «Grundlagen der Geometrie», de Hilbert. Porém, os arquitectos do edifício

* Aqui o termo «proporcionais» é tomado no sentido com que costuma ser aplicado em geometria analítica, ao enunciar a condição de colinearidade de três pontos dados.

** Prova-se fàcilmente que uma tal axiomática é categórica. Quanto ao problema de saber se o modêlo euclideano se ajusta bem ou não a descrever a realidade empírica, isso não compete pròpriamente ao matemático, mas antes ao físico e ao filósofo.

* A melhor maneira de estar ao corrente sobre o que se passa neste campo é consultar «The Journal of Symbolic Logic».

euclideano foram sem dúvida os antigos, que deixaram traçadas as linhas mestras da edificação, mesmo no que se refere aos fundamentos.

Axiomatizar é necessidade imperiosa, desde que se faça qualquer tentativa séria de construção racional. Porque se eu quero demonstrar uma proposição admitindo como verdadeiras outras proposições, que, por sua vez, foram demonstradas a partir de outras ainda, e assim por diante (ou antes, *para trás*...), tem de de haver por força um termo deste processo; de contrário, estou condenado a uma *regressão ao infinito*, por natureza inconcludente — ou, pior ainda, a um *círculo vicioso*. E o mesmo se diga a respeito das definições. Não me hei-de esquecer de uns apontamentos de Física que me vieram em tempos às mãos, no qual figuravam, uma após a outra, estas duas *definições:*

Corpo — é toda a porção limitada de matéria.

Matéria — é aquilo de que os corpos são formados.

O autor, se não era um ironista, não se pode dizer que fosse um hábil prestidigitador de ideias, como tantos que por aí andam, a deitar poeira em olhos de incautos.

Se passarmos porém ao conceito moderno de axiomática, as vantagens são de outra ordem, *principalmente no que se refere às axiomáticas não categóricas*. Basta lembrar que são deste tipo as axiomáticas dos conceitos de grupo, de anel, de corpo, de espaço vectorial, de espaço topológico, de espaço métrico, de espaço vectorial topológico, de espaço normado, de anel topológico, de grupo ordenado, de conjunto parcialmente ordenado, de reticulado, de álgebra de BOOLE, etc. etc.. Neste sentido, o método axiomático (ou, como também se diz, *formal* ou *abstracto*) é a principal característica das matemáticas modernas. Cada teoria *formal* engloba, com a indeterminação dos seus termos primitivos inúmeras *possibilidades de concretização:* — inúmeras teorias *específicas* que se podem desenrolar nos mais variados ramos do saber. As teorias formais constituem deste modo, sistemas de raciocínios, mecanismos mentais, construídos uma vez por todas e prontos a serem utilizados em bloco, na primeira ocasião.

Uma das vantagens deste método é, como se vê desde logo, uma considerável economia de pensamento, evitando a repetição de raciocínios análogos em campos diversos, com terminologia e notações diversas.

Mas há também aquela aproximação de ramos distintos da Matemática sob uma teoria comum, que tem sido sempre uma fonte de estímulos fecundos.

Com esta nova orientação, a Matemática ganha muito, certamente, em rigor lógico e em valor estético; e, embora haja quem diga que se afasta assim da intuição criadora, a verdade é que se torna mais apta a penetrar no âmago das questões, por um maior poder de esquematização e de separação entre o que é acidental e o que é essencial.

É preciso acrescentar que a Matemática moderna utiliza ainda, frutuosamente, certas axiomáticas categóricas, que não encontram directa interpretação intuitiva no mundo empírico. Tal é, por exemplo, a axiomática do espaço hilbertiano — espaço com infinitas dimensões, dotado duma geometria muito semelhante à do espaço euclideano ordinário. Trata-se duma axiomática, que admite infinitas realizações, todas isomorfas entre si: as mais usadas são aquelas em que os pontos se apresentam, ou como sucessões infinitas de números (tais que a série dos respectivos quadrados seja convergente), ou como classes de funções de quadrado somável. Estes dois tipos de realização correspondem às duas orientações diversas que se podem seguir na estruturação matemática da Mecânica quântica — a da «Mecânica matricial» de HEISENBERG-BORN-JORDAN e a da «Mecânica ondulatória» de SCHRÖDINGER — cuja equivalência formal induziu VON NEUMANN a estabelecer a respectiva axiomática unificadora *.

Todas as ciências dedutivas devem ser axiomatizadas?

Creio que já respondi em parte a esta questão. A resposta pode formular-se nos seguintes termos:

Atendendo à própria definição de ciência dedutiva no sentido aristotélico, uma ciência que não estiver axiomatizada não é dedutiva **.

Naturalmente, há nesta resposta um certo extremismo que convém mitigar. Por exemplo, seria contrário a todo o bom-senso pretender ensinar nos liceus uma Geometria *cem-por-cento dedutiva*. O ensino da Geometria elementar como se admite hoje correntemente em pedagogia, deve começar por ter um carácter intuitivo—experimental, com a preocupação de conduzir o aluno, a pouco e pouco, ao pensamento racional. O contacto com as primeiras formas de demonstração — com aquela possibilidade de provar rigorosamente leis geométricas *não evidentes*, sem fazer

* VON NEUMANN chama «espaço de HILBERT» à primeira das realizações consideradas e «espaço de HILBERT abstracto» ao tipo das estruturas isomorfas à primeira, isto é, àquilo que, segundo a nossa terminologia, é a *solução* (única) da axiomática do espaço hilbertiano.

** Quando se trata, por exemplo, da teoria do espaço hilbertiano, ou bem se considera tal teoria como um capítulo da teoria dos números reais, ou bem se considera como teoria *autónoma*, e então precisará de ser axiomatizada. Por sua vez, a teoria dos números reais, se não for considerada como fazendo parte da aritmética dos inteiros (ou da teoria das grandezas contínuas), precisará de ser axiomatizada. *Em última análise*, uma axiomática deverá sempre existir.

verificações experimentais, mas apenas admitindo verdades elementares *evidentes* e desenvolvendo raciocínios — é um momento grandioso, de súbita e luminosa revelação, comparável ao momento histórico em que o espírito grego descobre o racionalismo — em que a razão toma conhecimento de si mesma. A partir de então, o ensino deve encaminhar-se ràpidamente do intuitivo para o racional, embora, no curso dos liceus não seja possível a racionalização completa. *Deveria contudo aludir-se então à possibilidade de lá chegar, mediante uma axiomática conveniente.*

Não pretendo com isto insinuar que, no ensino superior, o racional deve substituir por completo o intituivo (o que mesmo, de resto, seria metafìsicamente impossível). Muito pelo contrário, tanto na teoria como na prática do ensino, o ideal que me norteia é: *conciliar o máximo de racionalidade com o máximo de intuitividade.*

No ensino superior, pode e deve fazer-se um largo emprego dos métodos axiomáticos; mas perderá sentido e vitalidade o ensino que não se apoiar em sólidas intuições, criadas pelos problemas reais que ao ser humano se levantam, nesta árdua luta pela existência à superfície da Terra.

NOTA — Tenho o dever de lembrar que a introdução dos modernos métodos axiomáticos em Portugal se deve ao Professor António Aniceto Monteiro, cuja acção no domínio das matemáticas, entre nós, foi notòriamente profunda e renovadora, apesar de se ter desenvolvido num período infelizmente tão breve. É sobretudo na perspectiva do tempo (apenas são passados uns dez anos), que o alcance da sua obra pode ser devidamente apreciado. O que há de essencial nas ideas acima explanadas, dele o recebi, transmitido com o cunho da sua personalidade, com aquele fervor comunicativo que o situa, fundamentalmente, no campo da actividade científica pura e desinteressada.

José Sebastião e Silva

MOVIMENTO CIENTÍFICO

CONTRIBUIÇÃO LATINO-AMERICANA AO PROGRESSO CIENTÍFICO

O Centro de Cooperação Cientifica da Unesco para a America Latina publicou recentemente um fascículo da série *Latin American Contribution to Scientific Progress* dedicado à Matemática. Este fascículo, único no género, constitue um guia às contribuições mais importantes, anteriores a 1951, a esse ramo da ciência.

A sua preparação foi confiada ao matemático espanhol DR. LUIZ A. SANTALÓ, que se encontra radicado na Argentina há vários anos, contando também com a colaboração dos DRS. GODOFREDO GARCIA (do Perú), RAFAEL LAGUARDIA (do Uruguai), e MÁRIO O. GONZÁLEZ (de Cuba). Das 32 páginas do texto, 4 são dedicados a aspectos comuns aos países latino-americanos, 15 à Argentina, 3 ao Brasil, 2 a Cuba, 2 ao México, 3 ao Peru, 3 ao Uruguai e 3 conjuntamente ao Chile, Venezuela, Porto Rico e Paraguai. As pessoas e instituições que desejem obter um exemplar desse fascículo devem se dirigir ao referido Centro, Bulevar Artigas 1320, Montevideu. O Centro de Cooperação da Unesco pretende suplementar o presente fascículo com outros, publicados de dois em dois anos e relativos aos períodos em questão.

L. Nachbin

A Redacção da *G. M.* aproveita a oportunidade para apresentar a tradução do capítulo referente ao Brasil, que nos dá ideia da natureza desta publicação da Unesco, ao mesmo tempo que fornece elementos acerca do trabalho dos matemáticos brasileiros e da acção do professor DR. ANTÓNIO MONTEIRO durante a sua estadia no Brasil.

*

* *

Há no Brasil duas escolas de matemáticas: uma em S. Paulo outra no Rio de Janeiro. A primeira recebeu o seu inicial impulso dos matemáticos italianos contratados e, mais tarde, do francês ANDRÉ WEIL e do norteamericano O. ZARISKI, entre outros; ela publica o *Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo.* No Rio de Janeiro, a Fundação G. Vargas iniciou, em 1942, a publicação da excelente Summa Brasiliensis Mathematicae e em 1948, publicou sob a direcção de A. MONTEIRO numa série de monografias intitulada *Notas de Matemáticas*, importante colecção sobre diversos tópicos das matemáticas modernas de carácter não meramente exposicional, mas onde cada capítulo contém, também, contribuições originais ao assunto desenvolvido. Outro jornal brasileiro, duma natureza mais geral, mas onde se encontram muitos trabalhos de matemática, são os *Annaes da Academia Brasileira de Ciências.*

Nos últimos anos, o trabalho do português A. MONTEIRO exerceu uma influência fundamental na escola