CENTRO INTERNACIONAL DE CÁLCULO MECÂNICO

No dia 6 de Dezembro fundaram as Nações Unidas, por iniciativa da Unesco, um Centro Internacional de Cálculo, cuja sede é em Roma.

Este Centro tem três funções principais: investigação, educação e serviço de consulta e cálculo.

Para isso criará e manterá um ou mais laboratórios de diferentes tipos de máquinas de calcular; dirigirá investigações relacionadas com a utilização e aperfeiçoamento dos meios de cálculo; fomentará a colaboração entre os institutos de cálculo de todo o mundo, coordenando os seus trabalhos e estimulando as suas actividades; elaborará um programa de estudo, no plano internacional, de problemas de ciência pura vinculados com o cálculo; assegurará a publicação e distribuição dos resultados das suas investigações e a de outros trabalhos de carácter análogo; procurará formar especialistas; procurará assegurar o funcionamento de um serviço de consultas e instituirá e manterá um serviço de cálculo.

NOTA — *As últimas três notícias foram transcritas da «Revista de la Sociedad Cubana de Ciências Físicas y Matemáticas», Vol. 3, N.º 1, Janeiro de 1953 — HABANA.* (R. L. G.)

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DE EXAME DO 3.º CICLO DO ENSINO LICEAL E DE EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Ensino Liceal — Ano de 1952 — Exame do 3.º ciclo — Prova escrita de Matemática — 2.ª época.

ATENÇÃO — Se não souber resolver qualquer alínea duma questão, não deixe de tentar as seguintes. A resposta a cada uma delas não depende das anteriores. As respostas só são válidas com as respectivas justificações.

3611 — Dados os pontos $A(4, -1)$ e $B(2, -5)$ determine: *a*) A equação da recta que passa por A e é perpendicular a AB.

b) A equação da circunferência cujo diâmetro é o segmento AB definido pelos dois pontos dados.

R: *A equação da recta* AB *é dada pela equação* $(y+1):(-1+5)=(x-4):(4-2)$ *ou seja* $y=2x-9$; *a recta que lhe é perpendicular e passa pelo ponto* A *será* $y+1=-1/2\,(x-4)$.

b) *O centro da circunferência tem de coordenadas* $x=(4+2):2=3$ *e* $y=(-1-5):2=-3$. *O raio da circunferência é dado por* $r={}^1/_2\sqrt{(4-2)^2+(-1+5)^2}={}^1/_2\sqrt{4+16}=\sqrt{5}$. *A equação pedida é por isso* $(y+3)^2+(x-3)^2=5$.

3612 — Determine R de modo que o polinómio $P(x)=2x^4+6x^3-2kx+3k$ admita a raiz $x=-2$.

R: *Para isso deverá ser* $2\times16-6\times8+4k+3k=0$ *ou* $7k-16=0$ e $k=16/7$.

3613 — Considere a equação $(2c-1)x^2-2(c+1)x+1=0$ em que c é um parâmetro real. *a*) Justifique que, para qualquer valor de c, as raizes da equação são reais e diferentes. *b*) Determine c de modo que o número -1 fique compreendido no intervalo das raizes da mesma equação.

R: a) *Como* $\Delta=(c+1)^2-(2c-1)=c^2+2$ *é sempre positivo as raizes da equação são reais e diferentes para qualquer valor de* c. *Note-se no entanto que para o valor* $c={}^1/_2$ *a equação não é do 2.º grau, mas sucede que quando* c *tende para* ${}^1/_2$, *uma das raizes tende para* ∞ *e a outra para* ${}^1/_3$.

b) *Quando o coeficiente de* x^2 *é positivo, isto é, quando* $c>{}^1/_2$ *o trinómio tormará para* $x=-1$ *o sinal contrário ao do coeficiente de* x^2, *isto é, deverá ser negativo, quer dizer* $(2c-1)+2(c+1)+1<0$ *ou seja* $4c+2<0$ *ou* $c<-\dfrac{1}{2}$, *incompatível com* $c>{}^1/_2$. *Quando for* $c<{}^1/_2$ *deverá ser* $c>-{}^1/_2$; *isto é, deve ser* $-{}^1/_2<c<{}^1/_2$.

3614 — Dois números, cada um dos quais menores que 100, tem respectivamente *oito* e *doze* divisores. Determine esses números sabendo que o seu *m. d. c.* é 20.

R: *Como* m. d. c. *é* $20=2.^2 5$, *dois e cinco são os factores primos comuns aos dois números. Assim* $a=2^m 5.^n p$ *e* $b=2.^r 5^s q$ *onde* r *e* m *são iguais ou maiores que dois. Tendo* a *oito divisores, e por ser* $8=2.2.2=4.2$, *vê-se fàcilmente que* 1º) a *só tem dois factores primos portanto* 2 *e* 5; 2º) *que o expoente de* 5 *não pode ser* 3 *por ser* $a<100$, *logo* $a=2.^3 5=40$.

Como o número de divisores de b *é* $12=3.4=2.6=$ $=2.2.3$ *vê-se também que* b *deve ter três factores primos que o expoente de* 2 *é* 2 *e que o expoente dos outros é* 1. *Nestas condições o terceiro factor só pode ser* 3, *visto ser ainda* $b<100$. *Logo é* $b=2.^2\,3.5=60$.

3615 — *a*) Calcule os arcos positivos e inferiores a 2π radianos, soluções da equação $sen\,2x=-\sqrt{3}/2$.

b) Determine $f'(x)$ sabendo que $f(x)=(sen\,x+$ $+cos\,x):sen\,x$. Simplifique o resulto.

c) Do ponto P conduziram-se tangentes, PA e PB à circunferência de centro C. Sabendo que o ângulo APB mede $75°\,45'$ e que o segmento PA, compreendido entre P e o ponto de tangência A, mede 437,80 metros, determine o raio da circunferência. Resolva por logaritmos e indique o resultado, aproximando a menos de 1 centímetro.

R: a) *Os arcos inferiores a* 2π *cujo* seno *é* $-\sqrt{3}/2$ *são os arcos* $4\pi/3$ *e* $5\pi/3$, *quer dizer* $2x=4\pi/3$ *ou* $x=2\pi/3$ *e* $2x=5\pi/3$ *ou* $x=5\pi/6$.

b) $f'(x)=[(\cos x-\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x-\cos x(\operatorname{sen} x+$ $+\cos x)]:\operatorname{sen}^2 x=[-\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x]:\operatorname{sen}^2 x=-$ $-1/\operatorname{sen}^2 x=-\operatorname{cosec}^2 x$.

c) *o ângulo* APO *mede* $(75°\,45'):2=37°\,52'\,30''$. *No triângulo rectângulo em* A, [AOP], $\overline{AO}$, *que é um cateto, é o raio da circunferência. Assim será* $\overline{AO}=$ $=\overline{AP}\,\mathrm{tg}(A\hat{P}B:2)$ *isto é,* $\overline{AO}=437{,}80\times\mathrm{tg}\,37°\,52'\,30''$ *e* $\log\overline{AO}=\log 437{,}80+\log \mathrm{tg}\,37°\,52'\,30''=2{,}64128+$ $+\bar{1}{,}89086=2{,}53214$ *daqui se conclue ser* $\overline{AO}=$ $=340{,}54$ m.

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, Ciências Físico-Químicas, e Ciências Geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos — Ano de 1952 — Ponto n.º 2.

3616 — Provar que a soma de três números impares (positivos) consecutivos nunca é um número primo. R: *Sejam* $2n-1$, $2n+1$ e $2n+3$ *os três números impares consecutivos; a sua soma é* $6n+3=\dot{3}$ *que não é, por isso, um número primo.*

3617 — Determinar o número inteiro compreendido entre 900 e 1000 que dividido por 7 dê resto 4 e dividido por 13 dê resto 11. R: *Seja* $900<N<1000$. *Pelas condições do enunciado é* $N\equiv 7n+4=13r+11$ *ou seja* $7n-13r=7$, *equação cujas soluções gerais, em números inteiros, são dadas por* $n=1+13m$ *e* $r=7m$ *onde* m *é um inteiro qualquer. Daqui resulta* $N=91m+$ $+11$ *e das duas primeiras desigualdades obtem-se* $m>9$ *e* $m<10\frac{79}{91}$, *isto é,* $m=10$ *e* $N=921$.

3618 — Se dois números inteiros tiverem o máximo divisor comum d e o menor múltiplo comum m e se um deles for a, quanto vale o outro? Enuncie e demonstre o teorema que justifica a resposta. R: *Vale* (md):a, *porque o produto de dois números é igual ao produto do seu m. d. c. pelo seu m. m. c.*

3619 — Determinar o valor de n para o qual o número de arranjos de $n+1$ objectos 4 a 4 é igual a 36 vezes o número de combinações de n objectos 2 a 2. R: $(n+1)n(n-1)(n-2)=36\,n(n-1):2$, *equação equivalente a* $n^2-n-20=0$ *da qual só serve a solução positiva* $n=5$.

3620 — Determinar o parâmetro m da equação $16x^4-4mx^2+m-1=0$ de modo que as raizes estejam em progressão aritmética. R: *As raizes da equação são* $\pm 1/2$ *e* $\pm 1/2\sqrt{m-1}$. *Dado que há dois pares de números simétricos, que devem ser reais, a escolha do primeiro termo da progressão determina a dos restantes, tendo em conta que existem, desde logo, iguais as diferenças* $(1/2)-(1/2\sqrt{m-1})$ *e* $(-1/2\sqrt{m-1})-(-1/2)$. *Assim se o primeiro termo for* $-1/2$ *o segundo será* $-1/2\sqrt{m-1}$, *o terceiro* $+1/2\sqrt{m-1}$ *e o quarto,* $+\frac{1}{2}$. *A razão, neste caso, será* $r=-1/2\sqrt{m-1}+1/2$ *ou* $r=+1/2\sqrt{m-1}+1/2\sqrt{m-1}$ *donde é* $1/2(1-\sqrt{m-1})=$ $=\sqrt{m-1}$, *e daqui resulta* $m=10/9$. *Obteriamos o mesmo valor de* m *se o primeiro termo fosse* $+\frac{1}{2}$ *e o segundo* $+1/2\sqrt{m-1}$. *Se o primeiro termo for* $-1/2\sqrt{m-1}$ *e o segundo* $-1/2$, *será* $r=-\frac{1}{2}(1-$ $-\sqrt{m-1})$ *ou* $r=1/2-\left(-\frac{1}{2}\right)=1$ *e daqui* $1-$ $-\sqrt{m-1}=-2$ *e portanto* $m=10$. *Se considerássemos* $+1/2\sqrt{m-1}$ *como primeiro termo obteriamos o mesmo valor para* m.

3621 — Se a equação $ax^2+bx+c=0$, de coeficientes reais, tem a raiz $\alpha+\beta i$, onde α e β são reais $\beta\neq 0$ e $i=\sqrt{-1}$, qual é a outra raiz? Enuncie e demonstre o teorema que justifica a resposta. R: *A outra raiz é* $\alpha-\beta i$. *Porque se a outra raiz for* $u+vi$ *como a soma das raizes* $(\alpha+\beta i)+(u+vi)=$ $=(\alpha+u)+(\beta+v)i$ *é um número real* $-b/a$, *terá que ser* $\beta+v=0$ *ou seja* $v=-\beta$. *Por outro lado como o produto* $(\alpha+\beta i)(u-\beta i)=(\alpha u+\beta^2)+(u-\alpha)\beta i$ *é também um número real* c/a, *deverá ser* $u-\alpha=0$, *pois* $\beta\neq 0$, *e então é* $u=\alpha$.

Enunciados dos n.os 3611 a 3621 de J. Silva Paulo.