Problèmes de dépouillements — V*

Triangles imités du triangle arithmétique de Pascal

par Pierre Dufresne

$\theta \backslash b$	0	1	2	3	4	5
1	1					
2	1					
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a\,,\,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\ B>A-3\end{array}\right.$$

On rappelle que si $a>1$

$$N_{(a\,,\,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\ B>A-3\end{array}\right. = N_{(a-2\,,\,b)}\left|\begin{array}{l}A>B-1\\ B>A-1\end{array}\right.$$

et que si

$$a \geqslant b+1 \quad \text{et} \quad b \geqslant a-3$$

$$N_{(a\,,\,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\ B>A-3\end{array}\right. = \frac{(a+b-2)\,!}{(a-2)\,!\,b\,!} - \frac{(a+b-2)\,!}{(a-1)\,!\,(b-1)\,!} + \frac{(a+b-2)\,!}{a\,!\,(b-2)\,!} - \frac{(a+b-2)\,!}{(a+1)!(b-3)\,!} + \cdots$$

$$- \frac{(a+b-2)\,!}{(a-3)\,!\,(b+1)\,!} + \frac{(a+b-2)\,!}{(a-4)\,!\,(b+2)\,!} - \frac{(a+b-2)\,!}{(a-5)\,!\,(b+3)\,!} + \cdots$$

$\theta \backslash b$	0	1	2	3	4	5
1	1					
2	1					
3	1					
4		1				
5		1				
6			1			
7			1			
8				1		
9				1		
10					1	
11					1	

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a\,,\,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\ B>A-4\end{array}\right.$$

On rappelle que si $a>1$

$$N_{(a\,,\,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\ B>A-4\end{array}\right. = N_{(a-2\,,\,b)}\left|\begin{array}{l}A>B-1\\ B>A-2\end{array}\right.$$

et que si

$$a \geqslant b+1 \quad \text{et} \quad b \geqslant a-4$$

$$N_{(a\,,\,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\ B>A-4\end{array}\right. = \frac{(a+b-2)\,!}{(a-2)\,!\,b\,!} - \frac{(a+b-2)\,!}{(a-1)\,!\,(b-1)\,!} + \frac{(a+b-2)\,!}{(a+1)\,!\,(b-3)\,!} - \frac{(a+b-2)\,!}{(a+2)\,!\,(b-4)\,!} + \cdots$$

$$- \frac{(a+b-2)\,!}{(a-4)\,!\,(b+2)\,!} + \frac{(a+b-2)!}{(a-5)\,!\,(b+3)\,!} - \frac{(a+b-2)\,!}{(a-7)\,!\,(b+5)\,!} + \cdots$$

$\theta \backslash b$	0	1	2	3	4
1	1				
2	1				
3	1				
4	1	1			
5		2			
6		2	2		
7			4		
8			4	4	
9				8	
10				8	8
11					16

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a\,,\,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\ B>A-5\end{array}\right.$$

On rappelle que si $a>1$

$$N_{(a\,,\,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\ B>A-5\end{array}\right. = N_{(a-2\,,\,b)}\left|\begin{array}{l}A>B-1\\ B>A-3\end{array}\right.$$

et que si

$$a \geqslant b+1 \quad \text{et} \quad b \geqslant a-5$$

$$N_{(a\,,\,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\ B>A-5\end{array}\right. = \frac{(a+b-2)\,!}{(a-2)!\,b\,!} - \frac{(a+b-2)\,!}{(a-1)\,!\,(b-1)\,!} + \frac{(a+b-2)\,!}{(a+2)\,!\,(b-4)\,!} - \frac{(a+b-2)\,!}{(a+3)\,!\,(b-5)\,!} + \cdots$$

$$- \frac{(a+b-2)\,!}{(a-5)\,!\,(b+3)\,!} + \frac{(a+b-2)\,!}{(a-6)\,!\,(b+4)\,!} - \frac{(a+b-2)\,!}{(a-9)\,!\,(b+7)\,!} + \cdots$$

* Conclusão do artigo publicado nos n.os 44, 45, 46, 47 e 52 da G. M.

$\theta \backslash b$	0	1	2	3	4
1	1				
2	1				
3	1				
4	1	1			
5	1	2			
6		3	2		
7		3	5		
8			8	5	
9			8	13	
10				21	13
11				21	34

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\B>A-6\end{array}\right.$$

On rappelle que si $a>1$

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\B>A-6\end{array}\right.=$$

$$=N_{(a-2,b)}\left|\begin{array}{l}A>B-1\\B>A-4\end{array}\right.$$

et que si

$a>b+1$ et $b\geqslant a-6$

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\B>A-6\end{array}\right.=\frac{(a+b-2)!}{(a-2)!\,b!}$$

$$-\frac{(a+b-2)!}{(a-1)!\,(b-1)!}+\frac{(a+b-2)!}{(a+3)!\,(b-5)!}-$$

$$-\frac{(a+b-2)!}{(a+4)!\,(b-6)!}+\cdots-\frac{(a+b-2)!}{(a-6)!\,(b+4)!}+$$

$$+\frac{(a+b-2)!}{(a-7)!\,(b+5)!}-\frac{(a+b-2)!}{(a-11)!\,(b+9)!}-$$

$\theta \backslash b$	0	1	2	3	4	5
1	1					
2	1					
3	1					
4	1	1				
5	1	2				
6	1	3	2			
7		4	5			
8		4	9	5		
9			11	14		
10			13	27	14	
11				40	41	

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\B>A-7\end{array}\right.$$

On rappelle que si $a>1$

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\B>A-7\end{array}\right.=$$

$$=N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B-1\\B>A-5\end{array}\right.$$

et que si

$a\geqslant b+1$ et $b\geqslant a-7$

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\B>A-7\end{array}\right.=\frac{(a+b-2)!}{(a-2)!\,b!}$$

$$-\frac{(a+b-2)!}{(a-1)!\,(b-1)!}+\frac{(a+b-2)!}{(a+4)!\,(b-6)!}-$$

$$-\frac{(a+b-2)!}{(a+5)!\,(b-7)!}+\cdots-\frac{(a+b-2)!}{(a-7)!\,(b+5)!}+$$

$$+\frac{(a+b-2)}{(a-8)!\,(b+6)!}-\frac{(a+b-2)!}{(a-13)!\,b+11)!}+\cdots$$

$\theta \backslash b$	0	1	2	3	4	5
1	1					
2	1					
3	1					
4	1	1				
5	1	2				
6	1	3	2			
7	1	4	5			
8		5	9	5		
9		5	14	14		
10			19	28	14	
11			19	47	42	

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\B>A-8\end{array}\right.$$

On rappelle que si $a>1$

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\B>A-8\end{array}\right.=$$

$$=N_{(a-2,b)}\left|\begin{array}{l}A>B-1\\B>A-6\end{array}\right.$$

et si $a\geqslant b+1$ et $b\geqslant a-8$

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\B>A-8\end{array}\right.=\frac{(a+b-2)!}{(a-2)!\,b!}$$

$$-\frac{(a+b-2)!}{(a-1)!\,(b-1)!}+\frac{(a+b-2)!}{(a+5)!\,(b-7)!}-$$

$$-\frac{(a+b-2)!}{(a+6)!\,(a-8)!}+\cdots-\frac{(a+b-2)!}{(a-8)!\,(b+6)!}+$$

$$+\frac{(a+b-2)!}{(a-9)!\,(b+7)!}-\frac{(a+b-2)!}{(a-15)!\,(b+13)!}+\cdots$$

$\theta \backslash b$	0	1	2	3	4	5
1	1					
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B\\B>A-2\end{array}\right.$$

On rappelle que:

si $a\geqslant b\geqslant a-2$

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B\\B>A-2\end{array}\right.=$$

$$=N_{(a-1,b)}\left|\begin{array}{l}A>B-1\\B>A-1\end{array}\right.$$

$$=\frac{(a+b-1)!}{(a-1)!\,b!}-\frac{(a+b-1)!}{a!\,(b-1)!}+\frac{(a+b-1)!}{(a+1)!\,(b-2)!}-$$

$$-\frac{(a+b-1)!}{(a+2)!\,(b-3)!}+\cdots-\frac{(a+b-1)}{(a-2)!\,(b+1)!}+$$

$$+\frac{(a+b-1)!}{(a-3)!\,(b+2)!}-\frac{(a+b-1)!}{(a-4)!\,(b+3)!}+\cdots.$$

$\theta \backslash t$	0	1	2	3	4	5
1	1					
2	1					
3		1				
4		1				
5			1			
6			1			
7				1		
8				1		
9					1	
10					1	
11						1

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a\,,\,b)}\left|\begin{array}{l}A>B\\ B>A-3\end{array}\right.$$

On rappelle que

si $a \geqslant b \geqslant a-3$

$$N_{(a\,,\,b)}\left|\begin{array}{l}A>B\\ B>A-3\end{array}\right. =$$

$$= N_{(a-1\,,\,b)}\left|\begin{array}{l}A>B-1\\ B>A-2\end{array}\right.$$

$$=\frac{(a+b-1)\,!}{(a-1)\,!\,b\,!}-\frac{(a+b-1)\,!}{a\,!\,(b-1)\,!}+\frac{(a+b-1)\,!}{(a+2)\,!\,(b-3)\,!}-$$

$$-\frac{(a+b-1)\,!}{(a+3)\,!\,(b-4)\,!}+\cdots-\frac{(a+b-1)\,!}{(a-3)\,!\,(b+2)\,!}+$$

$$+\frac{(a+b-1)\,!}{(a-4)\,!\,(b+3)\,!}-\frac{(a+b-1)\,!}{(a-6)\,!\,(b+5)\,!}.$$

Tableau donnant en fonction de a *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a\,,\,b\,,\,c)}\,[A>B>C]$$

pour $c=0$ dans ce cas particulier la formule

$$N_{(a\,,\,b\,,\,c)}\,[A>B>C]=$$

$$=\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a-c}{a+c}\cdot\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{(a+b+c)\,!}{a\,!\,b\,!\,c\,!}$$

devient:

$$N_{(a\,,\,b\,,\,0)}\,[A>B>C]=\frac{a-b}{a+b}\;\frac{(a+b)\,!}{a\,!\,b\,!}$$

b \ a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9										
8										1430
7									429	1430
6								132	429	1001
5							42	132	297	572
4						14	42	90	165	275
3					5	14	28	48	75	110
2				2	5	9	14	20	27	35
1			1	2	3	4	5	6	7	8
0		1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tableau donnant en fonction de a *et de* b *les valeurs de*:

$$N_{(a\,,\,b\,,\,c)}\,[A>B>C]$$

pour $c=1$ dans ce cas particulier la formule

$$N_{(a\,,\,b\,,\,c)}\,[A>B>C]=$$

$$=\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a-c}{a+c}\cdot\frac{b-c}{b+c}\;\frac{(a+b+c)\,!}{a\,!\,b\,!\,c\,!}$$

devient:

$$N_{(a\,,\,b\,,\,1)}\,[A>B>C]=$$

$$=\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+1}\cdot\frac{b-1}{b+1}\;\frac{(a+b+1)\,!}{a\,!\,b\,!\,1\,!}$$

b \ a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9										
8										16.016
7									4.004	14.586
6								990	3.375	9.152
5							240	858	2.156	4.576
4						56	198	486	1.001	1.848
3					12	42	100	198	350	572
2				2	7	16	30	50	77	112
1										
0										

Tableau donnant en fonction de a *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a\,,\,b\,,\,c)}\,[A>B>C]$$

pour $c=2$ dans ce cas particulier la formule

$$N_{(a\,,\,b\,,\,c)}\,[A>B>C]=$$

$$=\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a-c}{a+c}\cdot\frac{b-c}{b+c}\;\frac{(a+b+c)\,!}{a\,!\,b\,!\,c\,!}$$

devient:

$$N_{(a\,,\,b\,,\,2)}\,[A>B>C]=$$

$$=\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a-2}{a+2}\cdot\frac{b-2}{b+2}\;\frac{(a+b+2)\,!}{a\,!\,b\,!\,2\,!}$$

b \ a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9										
8										93.366
7									19.448	77.350
6								3.850	15.444	43.316
5							702	2,860	8.019	18.720
4						110	462	1.300	3.003	6.125
3					12	54	154	352	702	1.274
2										
1										
0										

Tableau donnant en fonction de a *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b,c)}\,[A>B>C]$$

pour $c=3$ dans ce cas particulier la formule

$$N_{(a,b,c)}\,[A>B>C] =$$

$$= \frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a-c}{a+c}\cdot\frac{b-c}{b+c}\,\frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!}$$

devient:

$$N_{(a,b,3)}\,[A>B>C] =$$

$$= \frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a-3}{a+3}\cdot\frac{b-3}{b+3}\,\frac{(a+b+3)!}{a!\,b!\,3!}$$

9										
8										370.500
7									63.648	277.134
6								9.856	44.200	136.136
5							1.274	6.006	18.900	48.620
4						110	572	1.872	4.875	11.000
3										
2										
1										
0										
b/a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

A teoria das distribuições

«Há mais de 50 anos que o engenheiro Heaviside estabeleceu as suas regras de cálculo simbólico, numa audaciosa memória onde cálculos matemáticos, deficientemente justificados, são utilizados para a solução de problemas de física. Este cálculo simbólico, ou operacional, não deixou de se desenvolver desde então e serve de base aos estudos teóricos dos electricistas. Os engenheiros utilizam-no sistemàticamente, cada um dentro da sua concepção pessoal, com a consciência mais ou menos tranquila; tornou-se uma técnica «que não é rigorosa mas que dá bons resultados». Depois da introdução por Dirac da famosa função $\delta(x)$, que seria nula em todos os pontos, excepto para $x=0$, e seria infinita para $x=0$, por forma que $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,dx=+1$, as fórmulas de cálculo simbólico tornaram-se ainda mais inaceitáveis para o espírito de rigor dos matemáticos. Escrever que a função de Heaviside $Y(x)$, igual a 0 para $x<0$ e a 1 para $x\geq 0$, tem por derivada a função de Dirac $\delta(x)$ cuja própria definição é matemàticamente contraditória, e falar de derivadas $\delta'(x), \delta''(x), \cdots$ desta função destituída de existência real, é ultrapassar os limites que nos são permitidos. Como explicar o sucesso destes métodos? Quando uma tal situação contraditória se apresenta, é bem raro que dela não resulte uma nova teoria matemática que justifique, sob forma modificada, a linguagem dos físicos; há nessa mesma situação, uma fonte importante de progresso das matemáticas e da física...

Generalizámos a noção de função, primeiramente pela noção de medida, depois pela de distribuição. δ será uma medida e não uma função, δ' uma distribuição e não uma medida. Há já mesmo muito tempo que os teóricos do potencial magnético utilizam os *doublets* ou dípolos, os folhetos ou dupla camada, etc...; mas são todos seres diferentes, de definição aliás duvidosa, sem ligação alguma com as do cálculo simbólico dos electricistas...».

Assim inicia Laurent Schwartz, um dos mais jovens e valorosos matemáticos da actualidade, a sua bela obra em dois volumes, *Théorie des Distributions* (1).

A Redacção da G. M., interessada, ao máximo, em dar realização ao seu objectivo fundamental, ser efectivamente um «jornal dos estudantes de matemática das escolas superiores», «convertendo-se num instrumento de trabalho de reconhecida utilidade», pretende apresentar brevemente aos seus Leitores uma série de artigos de introdução à Teoria das Distribuições.

Tais artigos *devem dirigir-se ao tipo médio de estudante dos dois últimos anos das nossas Universidades,* isto é, *devem pressupor da parte dos seus leitores apenas conhecimentos rudimentares de Análise infinitésimal.* Um problema grave do nosso ensino reside na existência de uma juventude estudiosa que, salvo raríssimas excepções, se encontra a dois passos da vida prática, apenas com as perspectivas adquiridas através duma «sebenta», ou, mais discretamente, de «folhas».

Regosijar-nos-íamos se, como complemento do estudo de tal série de artigos, alguns dos nossos jovens universitários sentissem interesse no prosseguimento e aplicações dum tão recente ramo das matemáticas como o da Teoria das Distribuições.

J. G. T.

(1) Hermann & Cie., Editeurs, Paris