raízes dispõem-se todas sobre o círculo unitário (porque o produto dos módulos das raízes deve ser 1).

b) $f(z)=p_0 z^n+\cdots+p_{n-1}z+p_n$ com $p_0 \geqslant p_1 \geqslant \cdots \geqslant p_n > 0$ terá a raiz -1 quando e só quando n for ímpar e $p_0=p_1 \geqslant p_2=p_3 \geqslant \cdots \geqslant p_{n-1}=p_n$, como imediatamente se reconhece.

3. Aditamento a 2, II₁, e III.

Se $k=0$ podemos escrever

$$\Sigma(1)=\alpha-\frac{1-\alpha}{p_0}(p_2+\cdots+p_n)+1-\alpha=$$
$$=1-\frac{1-\alpha}{p_0}(p_2+\cdots+p_n)$$

e o módulo das raízes é inferior à unidade desde que $n \geqslant 2$.

Do mesmo modo a condição $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i \geqslant p_k+p_l+p_m+\cdots+p_s$ referida em 2, III, pode ser substituída, quando $k=0$, pela condição $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i > p_l+p_m+\cdots+p_s$.

E assim como a 1.ª condição permite concluir que as raízes continuam, em módulo inferiores à unidade se não há mais que dois coeficientes consecutivos iguais e $p_0>p_1$, a 2.ª condição leva-nos a afirmar que tal conclusão subsiste mesmo que $p_0=p_1$, excepto no caso $p_0=p_1>p_2=p_3>\cdots>p_{n-1}=p_n$ (n ímpar) em que $\zeta=-1$.

4. 2.º Aditamento (*)

Como se viu no § 2, podemos escrever, referindo-nos ao polinómio $g(z)=(z-\alpha)f(z)$,

$$\Sigma(1)=\frac{1}{p_0}\left[\alpha p_0+(\alpha-1)\sum_{1}^{n} p_i+2\sum_{j}(p_{j+1}-\alpha p_j)\right]$$

com $\alpha<1$ e desde que se designem com o índice j todos os coeficientes que fazem $\frac{p_{j+1}}{p_j}=1$.

(*) Este aditamento não figurava no trabalho apresentado a concurso.

Temos portanto

$$\Sigma(1)=\alpha+\frac{\alpha-1}{p_0}\sum_{1}^{n} p_i+\frac{2(1-\alpha)}{p_0}\sum p_j=$$
$$=\alpha-\frac{1-\alpha}{p_0}\left[\sum_{1}^{n} p_i-2\sum p_j\right]=$$
$$=\alpha+\frac{1-\alpha}{p_0}\left[2\sum p_j-\sum_{1}^{n} p_i\right]$$

donde

$$\Sigma(1)<\alpha \text{ quando } \sum_{1}^{n} p_i \geqslant 2\sum p_j$$
$$\text{e } \quad \Sigma(1)<1 \text{ quando } \sum_{1}^{n} p_i > 2\sum p_j - p_0.$$

A 2.ª condição é mais útil e permite-nos concluir que as raízes de $f(z)=p_0 z^n+p_1 z^{n-1}+\cdots+p_{n-1}z+p_n$ com $p_0 \geqslant p_1 \geqslant \cdots \geqslant p_n > 0$ tem módulo inferior a 1 quando

$$\sum_{0}^{n} p_i > 2\sum p_j, \qquad i.e., \qquad \sum p_l > \sum p_j$$

designando por p_l todos os coeficientes seguidos do sinal $>$ e ainda o último e por p_j os coeficientes seguidos do sinal $=$.

$$\text{Se } \sum p_l=\sum p_j,\ 2\sum p_j=\sum_{1}^{n} p_i+p_0 \text{ e } \Sigma(1)=1;$$

$$\text{Se } \sum p_l<\sum p_j,\ 2\sum p_j>\sum_{1}^{n} p_i+p_0 \text{ e } \Sigma(1)>1$$

e em qualquer dos casos pode haver — mas não há necessàriamente — raízes de módulo igual a 1. Com $f_1(z)=z^2+z+1$ é $\sum p_l<\sum p_j$ e, para todas as raízes, $\rho=1$; mas com $f_2(z)=8z^3+8z^2+8z+3$ e $f_3(z)=2z^4+z^3+z^2+z+1$ todas as raízes têm módulo inferior à unidade, embora seja $\sum p_l<\sum p_j$ no 1.º caso e $\sum p_l=\sum p_j$ no segundo [1].

[1] As raízes de f_2 são $-1/2$ e $\frac{1\pm i\sqrt{11}}{4}$; quanto a f_3 aplique-se o método de COHN — *Álgebra Superior* — VICENTE GONÇALVES — 2.º vol., pág. 479.

Matemática pura e Matemática aplicada

por **A. Pereira Gomes**

Attaché de Recherches du Centre National de la Recherche Scientifique

Entre os aficionados da matemática aplicada e os da matemática pura ouvem-se por vezes discussões, sobre o papel, a importância e as relações mútuas dos dois campos matemáticos, nas quais mais aparente é o menosprezo recíproco (ou o desconhecimento?) do que um real desejo de encontrar uma plataforma de entendimento.

Parece valer a pena tratar deste assunto nas páginas da *Gazeta de Matemática*, onde desde já queremos registar alguns comentários.

São conhecidos no nosso país (e também fora dele) os largos esforços de actualização que em certos domínios fundamentais de matemática pura foram feitos, alguns anos atrás, nos Centros de Estudos Matemáticos de Lisboa e Porto, e que hoje são prosseguidos, ainda que através dificuldades múltiplas, pela Junta de Investigação Matemática. Teria sido feito um esforço paralelo no domínio da matemática aplicada? Em todo o caso nenhum eco dum tal movimento de actualização se repercutiu no *Boletim da S. P. M.*, ou nas páginas da *G. M.* que é uma revista «dos estudantes de Matemática das Escolas Superiores» portuguesas.

Ora em quase todas estas Escolas Superiores o ensino da matemática tem em vista a sua aplicação às diferentes técnicas, sendo portanto natural que os cursos de matemática pura estejam subordinados aos da matemática aplicada. Nas Faculdades de Ciências, nos cursos que constituem a licenciatura em Matemática, uma tal subordinação poderia à primeira vista supor-se inexistente. No entanto, quando se compara o volume de matérias que constituem essa licenciatura, no campo da matemática aplicada e no da matemática pura, verificamos ainda aqui a posição privilegiada que ocupa a matemática aplicada (Geometria Descritiva, Mecânica Racional, Cálculo das Probabilidades, Astronomia, Geodesia, Mecânica Celeste, Física Matemática). De resto, a própria estrutura desta licenciatura o confirma, pois aí vemos, nos dois últimos anos, os estudos de Matemática pura cederem o passo quase por completo às aplicações dos cursos de introdução feitos nos dois anos anteriores.

Nestas condições, não será sem dúvida desprovido de interêsse indagar, entre outras, as razões por que a *G. M.*, àparte os pontos de exame e uma colaboração esporádica vinda geralmente do estrangeiro, oferece o aspecto duma revista destinada a leitores alheados das aplicações da matemática.

Poderia talvez ser-se tentado a dar como explicação imediata o facto de os fundadores e colaboradores iniciais desta revista se interessarem sobretudo pela matemática pura. Mas como explicar então que do forte predomínio das matemáticas aplicadas no quadro de estudos matemáticos das Universidades portuguesas não tenha resultado um «élan» que levasse ao aparecimento de novos colaboradores vindos dos diferentes sectores da matemática aplicada? Por quê, também, na correspondência dos leitores, nunca se reclamou contra esta situação, que bem poderia ser julgada como uma carência pelos alunos das nossas Universidades. Ter-se-iam eles sequer apercebido disso?

É certo que os jóvens solicitados pelas aplicações da matemática se não propõem, em geral, uma licenciatura em matemática, mas um diploma de engenheiro. Mas isso não subtrai nada à força das interrogações anteriores, a menos que se admita que os candidatos a engenheiros frequentando as nossas Universidades consideram os conhecimentos matemáticos especializados como uma bagagem inútil, entre outras, para a sua preparação profissional. Muito me custaria ter de aceitar esta suposição como exacta.

Seja como for, parece inegável existir em Portugal um profundo divórcio entre os estudiosos da matemática pura e os da matemática aplicada, que muito dificulta o encontro dum terreno comum de colaboração. E no entanto essa colaboração é duma importância capital. Será ela imediatamente realizável?

Para responder com propriedade a tal pergunta seria necessário saber se se dispõe duma gama suficientemente graduada de matemáticos, cada um especializado no seu domínio, que possa assegurar uma espécie de ligação em cadeia, desde os ramos mais abstractos da matemática moderna às técnicas matemáticas que hoje servem os engenheiros.

Há aí, creio, matéria para reflectir. No sentido de acentuar o interêsse desta questão e de estimular iniciativas que venham ao encontro dela, damos aos leitores da *G. M.* a tradução dum artigo de THEODORE VON KÁRMÁN, que abre o n.º 1 do *Quaterly of Applied Mathematics* [Abril, 1943]: *Forjar matemáticas para engenheiros*. Nele assistimos a uma discussão entre um matemático e um engenheiro, conduzida a um nível elevado, com um certo humor... e competência.

Agosto 1952

Forjar Matemática para Engenheiros *

por Theodore von Kármán

Muitas vezes se tem dito que um dos primeiros objectivos da Matemática é de fornecer aos físicos e engenheiros os instrumentos para a solução dos seus problemas. Da história das Ciências Matemáticas ressalta como evidente que muitas descobertas matemáticas fundamentais foram iniciadas pelo impulso para compreender as leis da natureza e muitos métodos matemáticos foram inventados por homens

* Quaterly of Applied Mathematics, n.º 1 (April 1943), p. 2-6.

interessados pelas aplicações práticas. Não obstante todo o verdadeiro matemático sentirá que a restrição da pesquisa matemática aos problemas que têm aplicações imediatas seria uma injustiça para a «Rainha das Ciências». Na verdade, os devotos «minnesingers» da Rainha têm-se revoltado muitas vezes contra a degradação da sua «senhora» a uma posição de «ajudante» das suas irmãs de feição mais prática, e ocasionalmente mais prósperas.

Não é difícil compreender as razões para uma troca de pontos de vista de matemáticos e engenheiros. Elas foram indicadas mais de uma vez por representantes de ambas as profissões.

O matemático diz ao engenheiro: Eu levantei uma construção sobre sólidas fundações: um sistema de teoremas baseados sobre postulados bem definidos. Aprofundei a análise dos processos do pensamento lógico para descobrir se existem ou não proposições que possam ser consideradas verdadeiras ou pelo menos potencialmente verdadeiras. Interesso-me por relações funcionais entre entidades que são criações bem definidas do meu próprio espírito e por métodos que me habilitam a explorar vários aspectos de tais relações funcionais. Se vós achais úteis para o vosso trabalho diário alguns dos conceitos, processos lógicos ou métodos que eu desenvolvi, certamente me regozijarei. Todos os meus resultados estão à vossa disposição, mas deixai-me prosseguir os meus próprios objectivos pelas vias que me são próprias.

Diz o engenheiro: Os vossos grandes antepassados, que foram matemáticos bem antes de vós, falavam uma outra linguagem. LEONARDO EULER não distribuíu o seu tempo entre descobertas em matemáticas puras e na teoria de invenções de engenharia? Os fundamentos da teoria das turbinas, a teoria da flexão de colunas, a teoria da cravação de estacas no solo foram contribuições de EULER. O desenvolvimento da análise matemática não pode ser separado do desenvolvimento da física, especialmente do da mecânica. É duvidoso se um espírito humano poderia jamais ter concebido a ideia das equações diferenciais sem o acicate de encontrar um instrumento matemático para a determinação da trajectória dos corpos móveis. Se se supõe que o movimento é determinado por certas relações fundamentais mecânicas ou geométricas, que são válidas a cada instante do movimento, é-se naturalmente conduzido à ideia da equação diferencial. Também o cálculo das variações foi inventado principalmente para a solução de problemas físicos; alguns dos quais eram de natureza teleológica, outros de natureza prática. O século dezóito e as primeiras décadas do século dezanove foram talvez o período de mais glorioso progresso na ciência matemática; nesses tempos não havia distinção entre matemáticos puros e matemáticos aplicados. Posteriormente, os matemáticos de espírito abstracto consideraram que o grosso do trabalho estava feito; eles trataram de preencher certas lacunas lógicas, de sistematizar e codificar a abundância de métodos que os gigantes do período anterior tinham criado por uma combinação do pensamento lógico e da intuição criadora.

O matemático: Parece que vós subestimais a importância do que chamais sistematização e codificação. Não pensais que, a fim de assegurar uma aplicação correcta do cálculo e das equações diferenciais, era de absoluta necessidade definir exactamente o que significa o processo dos limites? Ou não era necessário dar um sentido preciso a termos tais como infinitamente pequeno ou infinitamente grande? Podeis recordar-vos que GALILEU — que dificilmente podereis chamar matemático puro ou abstracto — poz em relêvo as contradições que são inevitáveis se se tenta aplicar as noções de igualdade e desigualdade a quantidades infinitas. Ele notou que ou se pode dizer que o número de inteiros é maior do que o número de quadradros, pois cada quadrado é um inteiro, mas nem todos os inteiros são quadrados; ou se pode dizer, com a mesma justificação, que há tantos quadrados como inteiros, pois cada número tem um quadrado. As noções de comensurabilidade, numerabilidade e análise lógica do contínuo, a teoria dos conjuntos e, em tempos mais recentes, a topologia, foram étapas fundamentais no desenvolvimento do espírito humano. Muitos destes desenvolvimentos foram concebidos independentemente de qualquer aplicação física consciente. Mas mesmo para as aplicações era necessário melhorar as fundações da nossa própria casa, quer dizer, melhorar a estrutura lógica das matemáticas. Sem uma análise exacta das condições de convergência das séries (as condições que permitem levar por diante os processos de diferenciação e integração) ninguém pode sentir-se seguro a manejar séries. Não é exacto que a tendência para procurar uma fundamentação sólida para as novas descobertas tenha começado depois de os homens dotados de imaginação e intuição terem feito o trabalho de fundo. Já D'ALEMBERT pedia que o Cálculo assentasse no método dos limites. CAUCHY, LEGENDRE e GAUSS figuram certamente entre os génios matemáticos criadores, no vosso sentido; eles contribuíram efectivamente para a transição da intuição ao rigor. Na segunda metade do século dezanove este desenvolvimento continuou em direcção ao grande objectivo que os matemáticos daquela época — talvez com optimismo — consideravam ser a lógica perfeita e o absoluto rigor. Contudo, a juntar à clarificação dos fundamentos, aquele período também abriu novos caminhos para as matemáticas aplicadas. Vós mencionastes, por exemplo, as equações diferencias. Não crêdes que, a teoria das funções de variável complexa, a classificação das equações diferenciais segundo as suas singularidades, e a pesquisa destas singularidades, tudo isto desenvolvido no período que vós chamais o período de codificação, foram contribuições da maior importância para a construção de muitos ramos de matemática dos quais vós, engenheiros, tirais tanto benefício? Estas teorias mudaram o primitivo caminho de determinar soluções das equações diferenciais por tentativas num método sistemático dominando todo o campo.

O engenheiro: Concordo, especialmente com o que vós dissestes sobre variável complexa. Na verdade a tranformação conforme é um dos métodos mais poderosos e mais elegantes para a solução de problemas físicos e de engenharia. Também concordo convosco sobre a importância fundamental das singularidades. De facto, os nossos métodos gráficos e numéricos falham necessàriamente ou tornam-se desastrados na proximidade dos pontos irregulares e nós temos de recorrer aos métodos analíticos. Contudo, vós, matemáticos, estais infelizmente de certo modo na situação dum médico que se interessa menos pelas leis normais do funcionamento do corpo humano do que pelas suas enfermidades, ou na situação dum psicólogo que em vez de investigar as leis do processo mental normal concentra a sua atenção sôbre as aberrações patológicas do espírito humano. Nós temos de lidar em muitos casos com «funções sondas» («sound functions») e gostaríamos de ter métodos eficientes para determinar, com boa precisão, o seu comportamento em certos casos definidos.

Responde o matemático: Não podereis aplicar os métodos gerais que nós desenvolvemos para a solução das equações diferenciais e integrais? Se as soluções são dadas por funções sondas, como vos agrada chamar-lhes, não vejo qualquer grande dificuldade nem vejo o que esperais de nós.

O engenheiro: Os vossos teoremas gerais tratam todos da existência das soluções e da convergência dos vossos métodos de solução. Podeis recordar-vos do dito de HEAVISIDE: «Segundo os matemáticos esta série é divergente; por conseguinte devemos poder fazer qualquer coisa de útil com ela». Vós gastais muito tempo e muito engenho para mostrar a existência de soluções que muitas vezes é evidente para nós, por razões óbvias de natureza física. Raramente vos dais a pena de encontrar e discutir as verdadeiras soluções. Se fazeis isso, então restringis-vos de ordinário a casos simples, como por exemplo, problemas envolvendo corpos de formas geométricas simples. Refiro-me às chamadas funções especiais. Concedo que uma grande parte de tais funções foram investigadas por matemáticos. Os seus valores foram tabulados e os seus desenvolvimentos em série e as suas representações por integrais definidos foram estabelecidos com grande pormenor. Infelizmente, tais funções têm apenas um campo restrito de aplicação em engenharia. O físico, na sua pesquisa das leis fundamentais, pode escolher especímenes de formas geométricas simples para a sua experimentação. O engenheiro tem de tratar directamente com estruturas de formas complicadas; ele não pode dar a uma estrutura uma forma geométrica simples, apenas pelo facto de a distribuição importante em tais estruturas pode ser calculada por funções especiais. Além disso, a maior parte das funções especiais são aplicáveis sòmente aos problemas lineares. No passado, físicos e engenheiros muitas vezes linearizavam os seus problemas para maior simplicidade. Os matemáticos gostavam desta simplificação porque ela fornecia um belo terreno de caça para aplicação de belos métodos matemáticos. Infelizmente, com o progresso da ciência de engenharia, a necessidade duma mais exacta informação e a necessidade de tocar a realidade física cada vez de mais perto, forçou-nos a debater-nos com muitos problemas não lineares.

O matemático: Bem, muitos matemáticos modernos estão extremamente interessados em problemas não lineares. Parece que a vossa primeira necessidade é o desenvolvimento de métodos apropriados de aproximação. Contudo, não tendes razão na vossa crítica das nossas demonstrações de existência. Muitas demonstrações de existência em matemática moderna vão para além dos limites da intuição. Então, também, compreendo que vós, engenheiros, tendes muito êxito com vários métodos de iteração. Se nós queremos demonstrar, por exemplo, a existência duma solução dum problema de valores fronteiras, muitas vezes utilizamos o método de iteração. Por outras palavras, nós construímos realmente uma sucessão de soluções aproximadas exactamente como vós fazeis. A grande diferença é que nós provamos, e vós sòmente presumis, que o processo de iteração conduz a uma única solução. Também o vosso chamado «método de energia» («energy method»), utilizado para a solução dos vossos problemas em elasticidade e em estruturas, parece-me estreitamente relacionado com os métodos directos de cálculo das variações, isto é, com métodos que tentam construir directamente a função minimizante para valores fronteiras dados, sem referência à equação diferencial de EULER-LAGRANGE. Parece-me que, finalmente, existem muitos elementos comuns em análise pura e matemática aplicada.

O engenheiro: Não o negarei; na verdade sempre senti que a análise é a espinha dorsal da matemática aplicada. Contudo, se vós realmente ides aplicar a análise aos casos reais, vereis que há uma grande distância desde a ideia geral do método de aproximação até a aplicação com êxito do mesmo método. Existe, por exemplo, a questão do tempo disponível e do poder humano. Para certos tipos de trabalho temos engenhosas invenções mecânicas ou eléctricas, tais como o analisador diferencial ou calculadores eléctricos. Contudo na maior parte dos casos temos de fazer o cálculo sem esse auxílio. Então não é suficiente saber que o processo de aproximação converge. Nós temos que encontrar qual o método que requere o menor tempo para um dado grau de aproximação. Nós temos que ter uma boa estimativa do melhoramento na precisão através das sucessivas étapas. Todas estas questões práticas requerem difíceis considerações matemáticas. Penso que necessitamos definitivamente de matemáticos que nos auxiliem a apurar e, se assim desejais dizê-lo, a criticar e sistematizar os nossos métodos intuitivos. De facto, aplicações frutuosas da matemática à engenharia requerem a cooperação de matemáticos e engenheiros. Não é de modo algum uma tarefa rotineira reconhecer as relações matemáticas basilares comuns em campos aparentemente muito diferentes. O matemático que intenta fazer pesquisas em matemática aplicada tem de ter um muito bom sentido dos processos físicos envolvidos. Por outro lado o engenheiro tem de entrar nos fundamentos da análise até uma profundidade considerável de modo a poder utilizar com propriedade os instrumentos matemáticos. Uma reunião arbitrária de máquinas não constitui um eficiente estabelecimento de máquinas. Sabemos que há no vosso arsenal matemático poderosos instrumentos. A tarefa que se nos depara é saber como adaptá-los e aplicá-los.

O matemático: Penso que vós haveis apreendido aí alguma coisa. Para levar mais longe a vossa analogia, a fim de transformar a solução dos problemas de engenharia em produção, vós necessitais uma certa espécie de inventores de instrumentos. Estes são os verdadeiros matemáticos aplicados. Os seus domínios originais podem diferir; eles podem partir da matemática pura, da física, ou da engenharia, mas o seu alvo comum é «forjar» matemática para a engenharia.

Tradução de A. Pereira Gomes

Duas desigualdades

por ***Ruy Luís Gomes***

No livro VI, Integração, da colecção Bourbaki, a páginas 220-221, vem enunciado (1) — exercício 10) a) — o seguinte resultado:

Num espaço de Banach (2) F , *sejam* a *e* b *dois vectores tais que* $|\mathrm{a}| = |\mathrm{b}| = 1$. *Mostrar que para todo número* t *tal que* $0 \leqslant \mathrm{t} \leqslant 1$, *e para todo* p *tal que* $1 \leqslant \mathrm{p} \leqslant \infty$

$$|a - tb|^p \leqslant 2^p\,|a - t^p b| \tag{1}$$

$$|a - t^p b| \leqslant 2p\,|a - tb|\,. \tag{2}$$

E como indicação para a sua resolução acrescenta-se — *exprimir* $\mathrm{a} - \mathrm{t}^p\,\mathrm{b}$ *como combinação linear de* $\mathrm{a} - \mathrm{t}\,\mathrm{b}$ *e* $\mathrm{a} - \mathrm{b}$ *e observar que para* $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, *vem* $|\mathrm{a} - \rho\,\mathrm{b}| \geqslant 1 - \rho$ *e* $|\mathrm{a} - \mathrm{b}| \leqslant 2\,|\mathrm{a} - \rho\,\mathrm{b}|$.

Ora, tratando-se de duas desigualdades fundamentais para o estudo das relações entre diferentes espaços L^p, pareceu-nos útil enviar para a *Gazeta de Matemática* uma demonstração de (1) e (2).

Desigualdade (1).

Se $|a - t^p b| \geqslant 1$ o resultado é imediato, pois as hipóteses feitas permitem-nos escrever

$$|a - tb| \leqslant |a| + |tb| = 1 + t \leqslant 2$$

e portanto

$$|a - tb|^p \leqslant 2^p \leqslant 2^p\,|a - t^p b|\,.$$

Se $|a - t^p b| < 1$, temos

$$|a - tb| = |a - t^p b + t^p b - tb| \leqslant |a - t^p b| + $$
$$+ t - t^p \leqslant |a - t^p b| + 1 - t^p \leqslant 2\,|a - t^p b|\,,$$

visto ser (3)

$$1 - t^p = \Big|\,|a| - |t^p b|\,\Big| \leqslant |a - t^p b|\,.$$

Por outro lado, como $|a - t^p b| < 1$, vem

$$|a - t^p b|^p < |a - t^p b|$$

(1) Com a marca que distingue os exercícios mais difíceis.

(2) Espaço vectorial sobre o corpo dos números reais ou complexos em que cada vector a tem uma *norma* $|a|$, finita, não-negativa, tal que: 1) $|a| = 0$ equivale a $a = 0$; 2) $|\lambda a| = |\lambda|\,|a|$, qualquer que seja o número λ, real ou complexo; 3) $|a+b| \leq |a| + |b|$. Não interessa neste exercício o facto de F ser ainda um espaço *completo*.

(3) A desigualdade triangular aplicada a $a = b + (a-b)$ e $b = a + (b-a)$ dá-nos $|a| \leq |b| + |a-b|$, $|b| \leq |a| + |a-b|$, donde $\big|\,|a| - |b|\,\big| \leq |a-b|$.